УДК 517.544

П. В. Керекеша, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т),
Ю. И. Черский, д-р физ.-мат. наук (Ин-т инж. мор. флота, Одесса)

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В КОЛЬЦЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

An integral representation of an analytic function in a ring with corresponding limit values on the boundary is obtained. A new singular integral equation is suggested and solved in quadratures by using an integral representation and by complete studying the Carleman problem for a ring (in the normal case).

Одержано інтегральне зображення аналітичної функції в кільці з відповідними граничними значеннями на межі. Запропоноване нове сингулярне інтегральне рівняння, яке завдяки інтегральному зображенню і повному дослідженню задачі Карлемана для кільця (в нормальному випадку) розв'язано в квадратурах.

1. Интегральное представление аналитической функции в кольце. Пусть заданы постоянные r, R такие, что $0<r<R<\infty$.

***Определение* 1.** *Обозначим через* $\{r, R\}$ *пространство последовательностей* $\{\Phi_n\}$ *таких, что* $(r^n+R^n)\Phi_n \in l_2$.

***Определение* 2.** *Пространство аналитических в кольце* $r<|z|<R$ *функций* $\Phi(z)$ *обозначим через* $\{\{r, R\}\}$, *если существует такая постояная* C, *что для всех* $\rho \in [r, R]$

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\alpha})|^2 \, d\alpha < \mathbb{C}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(z) \in \{\{R^{-1}, R\}\}$, $R>1$. *Тогда справедливо интегральное представление*

$$\Phi(z) = \frac{K'}{2\pi \ln R} \int_{|\tau|=1} dn \, \frac{K'}{\ln R}\left(-i \ln \frac{z}{\tau}\right) \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau}, \tag{1}$$

где $dn\, t$ — *двоякопериодическая функция Якоби* [1], K *и* K' — *действительный и мнимый четверть периоды, связанные соотношением* $K/K' = \pi/\ln R$, $\varphi(t)$ — *произвольная функция, принадлежащая* $L_2(|t|=1)$, *а также справедливы соотношения*:

$$\Phi(R^{-1} t) = \frac{\varphi(t)}{2} - \frac{K'}{2\pi \ln R} \int_{|\tau|=1} \mathrm{cs} \, \frac{K'}{\ln R}\left(-i \ln \frac{t}{\tau}\right) \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau}, \tag{2}$$

$$\Phi(R t) = \frac{\varphi(t)}{2} + \frac{K'}{2\pi \ln R} \int_{|\tau|=1} \mathrm{cs} \, \frac{K'}{\ln R}\left(-i \ln \frac{t}{\tau}\right) \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau}, \tag{3}$$

$$\Phi(R t) + \Phi(R^{-1} t) = \varphi(t), \tag{4}$$

$$\Phi(R t) - \Phi(R^{-1} t) = \frac{K'}{\pi \ln R} \int_{|\tau|=1} \mathrm{cs} \, \frac{K'}{\ln R}\left(-i \ln \frac{t}{\tau}\right) \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как функция $\Phi(z) \in \{\{R^{-1}, R\}\}$, то справедливо разложение в ряд Лорана

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n t^n, \quad |t| = 1. \tag{6}$$

Очевидно,

$$\Phi_n = \frac{\varphi_{0,n}}{R^n + R^{-n}}, \tag{7}$$

где $\varphi_{0,n} \in l_2$.

Введем обозначения

$$\Phi(t) = \Phi(e^{i\alpha}) = N(\alpha), \quad \Phi(z) = \Phi(\rho e^{i\alpha}) = N(\alpha - i\ln\rho),$$

$$\Phi(R^{-1}t) = N(\alpha + i\ln R), \quad \Phi(Rt) = N(\alpha - i\ln R), \quad \varphi_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{0,n} t^n,$$

$$\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t^n}{R^n + R^{-n}}, \quad \mu(e^{i\alpha}) = M(\alpha).$$

Используя формулу из [1, с. 388]

$$dn\, U = \frac{\pi}{2k} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos 2n\nu,$$

где $q = \exp(-\pi K'/K)$, $\nu = \pi U / 2K$, получаем

$$M(\alpha) = \frac{K}{\pi}\, dn\, \frac{K\alpha}{\pi} = \frac{K'}{\ln R}\, dn\, \frac{K'\alpha}{\ln R}. \tag{8}$$

Если теперь к равенствам (6) – (8) применить формулу свертки [2, с. 233], то получим

$$N(\alpha) = \frac{K'}{2\pi \ln R} \int_0^{2\pi} dn\, \frac{K'}{\ln R}(\alpha - \theta)\, \varphi_0(\theta)\, d\theta. \tag{9}$$

Отсюда

$$N(\alpha \pm i\ln R) = \frac{\varphi_0(\alpha)}{2} \pm \frac{K'}{2\pi \ln R} \int_0^{2\pi} cs\, \frac{K'}{\ln R}(\alpha - \theta)\, \varphi_0(\theta)\, d\theta. \tag{10}$$

При выводе формул (10) мы использовали свойство из [1, с. 384] $dn\, K'(\alpha \pm \pm i) = \mp i\, cs R\alpha$, а также равенство

$$M(\alpha \pm i\ln R) = \pi\delta_{2\pi}(\alpha) \mp i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} - e^n}{e^n + e^{-n}} \sin n\alpha.$$

Полагая в равенстве (9) $\alpha = -i\ln t$, $\theta = -i\ln\tau$ ($\ln t$ — выбранная ветвь $\operatorname{Ln} t$), получаем

$$\Phi(t) = \frac{K'}{2\pi \ln R} \int_{|\tau|=1} dn\, \frac{K'}{\ln R}\left(-i\ln\frac{t}{\tau}\right) \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau}, \tag{11}$$

где $\varphi(t) = \varphi_0(-i\ln t)$. Из формул (10), (11) получаем формулы (1) – (5).

2. Рассмотрим уравнение вида

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)K'}{2\pi \ln R} \int_{|\tau|=1} cs\, \frac{K'}{\ln R}\left(-i\ln\frac{t}{\tau}\right) \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau} = g(t), \quad |t| = 1, \quad R > 1. \tag{12}$$

Требуется найти функцию $\varphi(t)$, принадлежащую пространству $L_2(|t| = 1)$.

Известные функции $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \quad \text{(нормальный случай)}, \tag{13}$$

причем $a(t)$ и $b(t)$ принадлежат классу Винера (класс функций, коэффициенты Лорана которых принадлежат пространству l_1). Заданная функция $g(t) \in L_2(|t|=1)$.

Используя результаты п. 1, заключаем, что уравнение (12) равносильно следующей задаче Карлемана для кольца:

$$\Phi(R^{-1}t) = -\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\Phi(Rt) + \frac{g(t)}{a(t)-b(t)}. \tag{14}$$

Для исследования уравнения (12) в нормальном случае приведем результаты решения задачи Карлемана для кольца.

3. Решение задачи Карлемана по скачку. Требуется найти функцию $\Phi(z) \in \{\{R^{-1}, R\}\}$ по краевому условию

$$\Phi(R^{-1}t) - \lambda\Phi(Rt) = F(t), \quad |t| = 1, \tag{15}$$

а также постоянную $\lambda \in \mathbb{C}$. Функция $F(t)$ задана в $L_2(|t|=1)$ (либо в пространстве W).

Применяя к (15) оператор Лорана, получаем бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n R^{-n} t^n - \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n R^n t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^n$$

или

$$\Phi_n [R^{-n} - \lambda R^n] = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

При этом возможны варианты:

3а) $R^{-n} - \lambda R^n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\Phi_n = \frac{f_n}{R^{-n} - \lambda R^n}. \tag{17}$$

Применяя к (17) оператор Лорана, получаем

$$\Phi(t) = L\left(\frac{f_n}{R^{-n} - \lambda R^n}\right). \tag{18}$$

В этом случае существует единственное решение задачи (15).

Вводя последовательность $\omega_{\lambda,n} = (R^{-n} - \lambda R^n)^{-1}$ и обозначая $L\omega_{\lambda,n} = \Omega_\lambda(t)$, записываем решение задачи (15) в виде свертки

$$\Phi(t) = L(\omega_{\lambda,n} f_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_\lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau}. \tag{19}$$

3б) Пусть существует целое число ν такое, что $\lambda = R^{-2\nu}$. Оно всегда единственно. В этом случае для разрешимости (16) необходимо и достаточно, чтобы $f_\nu = 0$ или, что то же самое,

$$\int\limits_{|\tau|=1} \frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau^{\nu+1}} = 0. \tag{20}$$

Если условие (20) выполняется, то

$$\Phi_n = \begin{cases} \dfrac{f_n}{R^{-n} - \lambda R^n}, & n \neq \nu, \\ c = \mathrm{const}, & n = \nu. \end{cases}$$

Обозначим

$$\omega_{\lambda^{(\nu)},n} = \begin{cases} \dfrac{1}{R^{-n} - \lambda R^n}, & n \neq \nu, \\ 0, & n = \nu. \end{cases}$$

Соответствующее преобразование Лорана обозначим через $\Omega_{\lambda^{(\nu)}}$. Тогда

$$\Phi(t) = L\Phi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n t^n = Ct^\nu + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \omega_{\lambda^{(\nu)},n}$$

или

$$\Phi(t) = Ct^\nu + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \Omega_{\lambda_\nu}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau}, \tag{21}$$

где C — произвольная комплексная постоянная.

Итак, в случае 3б) для разрешимости уравнений (16) необходимо и достаточно условия (20). Если оно выполнено, то решение уравнений (16), а значит, и задачи (15) существует и зависит от произвольной комплексной постоянной.

4. Факторизация при нулевом индексе. Пусть функция

$$A_0(t) \in W, \quad A_0(t) \neq 0, \quad |t| = 1; \quad \operatorname{Ind} A_0(t) = d\arg A_0(t)\big|_{|t|=1} = 0.$$

Будем искать представление $A_0(t)$ в виде

$$A_0(t) = \lambda_0 \frac{X(R^{-1}t)}{X(Rt)}, \quad |t| = 1, \tag{22}$$

где $X(z)$ — искомая аналитическая в кольце $R^{-1} < |z| < R$ функция, предельное значение которой принадлежит W и не обращается в нуль в граничных точках кольца; λ_0 — искомое комплексное число. Прологарифмировав (22), получим

$$\ln X(R^{-1}t) - \ln X(Rt) = \ln A_0(t) - \ln \lambda_0. \tag{23}$$

Здесь $\ln A_0(t)$ — фиксированная ветвь $\operatorname{Ln} A_0(t)$.

Приведем без доказательства одно из свойств пространства винеровских функций.

Теорема 2. *Пусть* $h(t) \in W$, $h(t) \neq 0$, $\operatorname{Ind} h(t) = 0$, *тогда при подходящем выборе логарифма* $\ln h(t) \in W$.

Итак, задача факторизации $A_0(t)$ свелась к задаче (15), где

$$\Phi(t) = \ln X(t), \quad F(t) = \ln A_0(t) - \ln \lambda_0, \quad |t| = 1. \tag{24}$$

При этом согласно теореме 2 задача (23) представляет собой частный случай задачи Карлемана о скачке. Кроме того, явно проявляется случай 3б) $(\nu = 0)$. Из условия разрешимости (20)

$$\int_{|\tau|=1} \frac{\ln A_0(\tau) - \ln \lambda_0}{\tau}\, d\tau = 0$$

находим постоянную

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\ln A_0(\tau)\, d\tau}{\tau} \right), \tag{25}$$

при этом $X(t)$ определяется по формуле (21):

$$X(t) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{\ln A_0(\tau)\, d\tau}{\tau} \right). \tag{26}$$

Мы положили $C = 0$, поскольку в факторизации постоянная существенной роли не играет.

5. Факторизация при любом индексе. Пусть

$$A(t) \in W, \quad A(t) \neq 0, \quad |t| = 1, \quad \operatorname{Ind} A(t) = \kappa. \tag{27}$$

Выберем число a такое, что $R^{-1} < |a| < 1$, тогда $\operatorname{Ind}((R^{-1}t - a)/(Rt - a))^{\kappa} = \kappa$, и функция $A_0(t) = A(t)((R^{-1}t - a)/(Rt - a))^{-\kappa}$ удовлетворяет всем условиям п. 4. Следовательно,

$$A(t) = \lambda_0 \left(\frac{R^{-1}t - a}{Rt - a} \right)^{\kappa} \frac{X\left(R^{-1}t\right)}{X(Rt)}, \tag{28}$$

где λ_0 определяется по формуле (25), а $X(t)$ — по (26).

6. Общий случай задачи Карлемана для кольца. Рассмотрим уравнение

$$\Phi(R^{-1}t) = A(t)\Phi(Rt) + H(t), \quad |t| = 1, \tag{29}$$

где $A(t)$, $H(t)$ — заданные функции, причем $H(t) \in L_2(|t| = 1)$, $A(t)$ удовлетворяет условиям п. 5. Найдем неизвестную функцию $\Phi(z) \in \{\{R^{-1}, R\}\}$. Подставим (28) в (29):

$$\frac{\Phi\left(R^{-1}t\right)}{\left(R^{-1}t - a\right)^{\kappa} X\left(R^{-1}t\right)} - \lambda_0 \frac{\Phi(Rt)}{((Rt) - a)^{\kappa}} = \frac{H(t)}{\left(R^{-1}t - a\right)^{\kappa} X\left(R^{-1}t\right)}. \tag{30}$$

Получим выражение вида (15).

Рассмотрим представившиеся случаи:

6а) $\operatorname{Ind} A(t) = \kappa = 0$. Если

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\ln A(\tau)}{\tau}\, d\tau \right) \neq R^{-2n}, \tag{31}$$

то существует безусловное и единственное решение

$$\Phi(t) = \frac{X}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{H(\tau)}{X\left(R^{-1}\tau\right)}\, \Omega_{\lambda_0}\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{32}$$

В случае существования $\nu \in \mathbb{Z}$ такого, что

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\ln A(\tau)}{\tau}\, d\tau \right) = R^{-2\nu},$$

для разрешимости задачи (29) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{|\tau|=1} \frac{H(\tau)}{X\left(R^{-1}\tau\right)\tau^{\nu+1}}\, d\tau = 0. \tag{33}$$

Если условие (33) выполнено, то задача (29) имеет решение, зависящее только от одной произвольной постоянной C:

$$\Phi(t) = X(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H(\tau)}{X\left(R^{-1}\tau\right)}\,\Omega_{\lambda_0^{(\nu)}}\left(\frac{t}{\tau}\right)d\tau + Ct^{\nu}\right]. \tag{34}$$

6б) $\operatorname{Ind} A(t) = \kappa > 0$. Пусть

$$\lambda_0 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[A(\tau)\left(\frac{R^{-1}\tau - a}{R\tau - a}\right)^{\kappa}\right]\frac{d\tau}{\tau}\right\} = R^{-2n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

Представим $\Phi(t)/\left(X(t)(t-a)^{\kappa}\right)$ следующим образом:

$$\frac{\Phi(t)}{X(t)(t-a)^{\kappa}} = \Psi(t) + \frac{P_{\kappa-1}(t)}{(t-a)^{\kappa}}, \tag{36}$$

где $P_{\kappa-1}(t)/(t-a)^{\kappa}$ — главная часть лорановского разложения в окрестности точки a. Тогда (30) примет вид (15):

$$\Psi\left(R^{-1}t\right) - \lambda_0\Psi(Rt) = \frac{H(t)}{X\left(R^{-1}t\right)\left(R^{-1}t - a\right)^{\kappa}} -$$

$$- \frac{P_{\kappa-1}\left(R^{-1}t\right)}{(Rt-a)^{\kappa}} + \lambda_0\frac{P_{\kappa-1}(Rt)}{(Rt-a)^{\kappa}}, \quad |t| = 1, \tag{37}$$

$P_{\kappa-1}(t)$ — многочлен степени не выше $\kappa - 1$. Отсюда по аналогии с (32)

$$\Phi(t) = \frac{X(t)(t-a)^{\kappa}}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{H(\tau)}{X\left(R^{-1}\tau\right)\left(R^{-1}\tau - a\right)^{\kappa}} - \frac{P_{\kappa-1}\left(R^{-1}\tau\right)}{\left(R^{-1}\tau - a\right)^{\kappa}} + \right.$$

$$\left. + \lambda_0\frac{P_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}}\right]\Omega_{\lambda_0}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} + X(t)P_{\kappa-1}(t). \tag{38}$$

Из (32) следует, что в этом случае однородная задача имеет ровно κ линейно независимых решений.

Если же выполняется условие

$$\lambda_0 = \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\ln\left[A(\tau)\left(\frac{R^{-1}\tau - a}{R\tau - a}\right)^{\kappa}\right]\frac{d\tau}{\tau}, \tag{39}$$

то сохраняют силу (36), (37). Условие разрешимости (33) заменяется следующим:

$$\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H(\tau)\,d\tau}{X\left(R^{-1}\tau\right)\left(R^{-1}\tau - a\right)^{\kappa}\tau^{\nu+1}} =$$

$$= \int\limits_{|\tau|=1}\frac{P_{\kappa-1}\left(R^{-1}\tau\right)d\tau}{\left(R^{-1}\tau - a\right)^{\kappa}\tau^{\nu+1}} - \lambda_0\int\limits_{|\tau|=1}\frac{P_{\kappa-1}(R\tau)\,d\tau}{(R\tau - a)^{\kappa}\tau^{\nu+1}}. \tag{40}$$

Таким образом, равенством (40) определяется один из коэффииционтов многочлена $P_{\kappa-1}(t)$. Этот коэффициент (например, при старшей степени) выразится через остальные, которые останутся произвольными комплексными постоянными. Согласно формулам (36) и (21)

$$\Phi(t) = X(t)P_{\kappa-1}(t) + X(t)(t-a)^{\kappa}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{H(\tau)}{X\left(R^{-1}\tau-a\right)^{\kappa}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{P_{\kappa-1}\left(R^{-1}\tau\right)}{\left(R^{-1}\tau-a\right)^{\kappa}} + \lambda_0\,\frac{P_{\kappa-1}(R\tau)}{(R\tau-a)^{\kappa}}\right]\Omega_{\lambda_0^{(\nu)}}\,\frac{d\tau}{\tau} + Ct^{\nu}\right\}. \qquad (41)$$

6в) $\operatorname{Ind} A(t) = \kappa < 0$. Полагая $\Psi(t) = \Phi(t)/\left((t-a)^{\kappa}X(t)\right)$, вместо (30) получаем (15), где

$$F(t) = \frac{H(t)}{\left(R^{-1}t-a\right)^{\kappa}X\left(R^{-1}t\right)}.$$

В первом подслучае согласно (19) получим функцию

$$\Phi(t) = \frac{X(t)}{2\pi i\,(t-a)^{-\kappa}}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\lambda_0}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H(\tau)\,d\tau}{\left(R^{-1}\tau-a\right)^{\kappa}X\left(R^{-1}\tau\right)\tau}. \qquad (42)$$

Для устранения полюса у этой функции в точке $z = a$ необходимо и достаточно выполнить $|\kappa|$ условий:

$$\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\lambda_0}^{(j)}\left(\frac{a}{\tau}\right)\frac{H(\tau)\,d\tau}{X\left(R^{-1}\tau\right)\left(R^{-1}\tau-a\right)^{\kappa}\tau^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, |\kappa|-1. \qquad (43)$$

Если эти условия выполнены, то задача Карлемана имеет единственное решение (42).

Рассмотрим второй подслучай, когда существует целое число ν, при котором выполнено равенство (39). Условие (20) приводит к следующему необходимому условию разрешимости:

$$\int\limits_{|\tau|=1}\frac{H(\tau)\,d\tau}{\left(R^{-1}\tau-a\right)^{\kappa}X\left(R^{-1}\tau\right)\tau^{\nu+1}} = 0. \qquad (44)$$

Предполагаем это условие выполненным. Тогда в соответствии с (21)

$$\Phi(t) = \frac{X(t)}{(t-a)^{\kappa}}\left\{Ct^{\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\lambda_0^{(\nu)}}\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{H(\tau)\,d\tau}{\left(R^{-1}\tau-a\right)^{\kappa}X\left(R^{-1}\tau\right)\tau}\right\}. \qquad (45)$$

Запишем необходимые и достаточные условия, при которых устраняется полюс в точке

$$\left.\left(C\frac{d^j}{dt^j}t^{\nu}\right)\right|_{t=a} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_{\lambda_0^{(\nu)}}\left(\frac{a}{\tau}\right)\frac{\tau^{-j-1}H(\tau)\,d\tau}{\left(R^{-1}\tau-a\right)^{\kappa}X\left(R^{-1}\tau\right)} = 0,$$

$$j = 0, 1, \ldots, |\kappa|-1. \qquad (46)$$

Этими условиями определяется постоянная C и остается совокупность (44), (46) необходимых и достаточных условий разрешимости (равенство нулю значений $|\kappa|$ линейно независимых функционалов). В случае разрешимости задача Карлемана имеет единственное решение (45).

7. Исследование сингулярных интегральных уравнений вида (12). В соответствии с результатами пп. 3–6 справедлива следующая теорема.ь

Теорема 3. *Пусть*

$$A(t) = -\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)} \in W,$$

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \quad (\textit{условие}\ (13)), \quad \operatorname{Ind} A(t) = \kappa.$$

Тогда в случае нулевого индекса уравнение (12) *либо имеет безусловное и единственное решение, либо решение с одним условием резрешимости (при его выполнении решение содержит одну произвольную постоянную). Если* $\kappa > 0$, *то общее решение уравнения* (12) *содержит ровно* κ *линейно независимых решений. При* $\kappa < 0$ *решение уравнения* (12) *может существовать лишь при выполнении* $|\kappa|$ *условий разрешимости.*

В случае существования решения задачи Карлемана (например, при $\kappa > 0$) решение уравнения (12) строится по формуле $\varphi(t) = \Phi(Rt) + \Phi(R^{-1}t)$ с использованием соответствующих результатов пп. 3–6.

Отметим, что идейная сторона решения задачи Карлемана известна (см. [2], исторический обзор в § 31). Среди указанных там отметим результаты Э. И. Зверовича и В. А. Чернецкого, которые впервые рассмотрели задачу Карлемана в $(m+1)$-связной области. Элементы конструктивного решения задачи Карлемана в концентрическом кольце содержатся в [3, с. 248; 4].

1. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
4. *Зверович Э. И., Крушевский Е. А., Митюшев В. В.* Краевая задача Карлемана для кольца и ее приложения // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика, математика и механика. – 1986. – № 1. – 4 с.

Получено 04.06.93