УДК 517.9

**И. И. Скрыпник,** канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# ОБ УСРЕДНЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С НЕОДНОРОДНЫМИ УСЛОВИЯМИ

A sequence of solutions of nonlinear elliptic problems are considered in the case when Dirichlet conditions are given on the one part of the boundary and Neumann conditions – on the other part of the boundary. The limit problem is obtained.

Розглядається послідовність розв'язків нелінійних еліптичних задач, коли на одній частині межі задаються умови Діріхле, на іншій – умови Неймана. Будується гранична задача.

**1.** Работы, посвященные линейным краевым задачам с быстро меняющимися граничными условиями, появились в середине 80-х годов. Подробные ссылки на эти работы можно найти, например, в [1].

В данной работе рассматривается усреднение нелинейной эллиптической задачи. Пусть $\Omega$ — гладкая область в $R^n$, $n \geq 2$, $\partial\Omega$ — ее граница. Предположим, что $\partial\Omega = \Gamma_s \cup \gamma_s$. Рассматривается следующая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) = a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u_s(x) = f(x), \quad x \in \gamma_s, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\cos(\nu, x_i) = g(x), \quad x \in \Gamma_s. \tag{3}$$

Здесь $\nu(x)$ — внешняя нормаль по отношению к $\partial\Omega$ в точке $x \in \Gamma_s$, $f(x)$, $g(x)$ — некоторые известные, определенные в $\overline{\Omega}$, функции.

Будем предполагать, что функции $a_i(x, u, p)$, $i = 0, \ldots, n$, определены при $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R^1$, $p \in R^n$ и удовлетворяют условиям:

$A_1$) функции $a_i(x, u, p)$ непрерывны по $u$, $p$ при почти всех $x \in \Omega$, измеримы по $x$ при любых $u$, $p$; $a_i(x, u, 0) \equiv 0$ при $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $i = 1, \ldots, n$;

$A_2$) существуют положительные постоянные $\nu$, $\mu$, $\varepsilon$ такие, что при $2 \leq$ $\leq m < n$ и всех значениях $x \in \overline{\Omega}$, $u, v \in R^1$, $p, q \in R^n$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x, u, p) - a_i(x, u, q)](p_i - q_i) \geq \nu(1 + |p| + |q|)^{m-2}|p - q|^2, \tag{4}$$

$$a_0(x, u, p)u \geq \nu|u|^m - (\nu - \varepsilon)|p|^m - \varphi(x), \tag{5}$$

$$|a_i(x, u, p) - a_i(x, v, q)| \leq \mu(1 + |u| + |p| + |v| + |q|)^{m-2} \times$$
$$\times(|p - q| + |u - v|), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$|a_0(x, u, p)| \leq \mu(|u| + |p|)^{m-1} + \varphi(x), \tag{7}$$

где $\varphi(x) \in L_r(\Omega)$, $r > n/m$.

Предположение $2 \leq m < n$ сделано ради простоты изложения. В случаях $1 < m < 2$, $m = n$ могут быть получены аналогичные результаты.

Под решением задачи (1) — (3) будем понимать функцию $u_s(x) \in W_m^1(\Omega)$ такую, что $u_s(x) - f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega, \gamma_s)$ и для произвольной функции $\varphi(x) \in$ $\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega, \gamma_s)$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right)\varphi\, dx = \int_{\Gamma_s} g(x)\varphi(x)\, dx. \tag{8}$$

При этом предполагается, что $f(x), g(x) \in W_q^1(\Omega)$, $q > n/m$.

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega, \gamma_s)$ определяется как замыкание функций из пространства $C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности $\gamma_s$, по норме пространства $W_m^1(\Omega)$.

Непосредственно проверяется, что существует постоянная $M$, не зависящая от $s$, такая, что при всех $s$ выполнены оценки

$$\| u_s \|_{W_m^1(\Omega)} \le M, \quad \max_{\overline{\Omega}} | u_s(x) | \le M. \tag{9}$$

Предполагаем, что $\gamma_s = \bigcup_{i=1}^{I(s)} F_i^{(s)}$. При каждом $s$ $F_i^{(s)}$ — замкнутые ограниченные множества, содержащиеся на $\partial\Omega$. Обозначим через $d_i^{(s)}$ нижнюю грань радиусов шаров, содержащих $F_i^{(s)}$, и пусть $x_i^{(s)} \in \partial\Omega$ — центр такого шара радиуса $d_i^{(s)}$, что $F_i^{(s)} \subset \overline{B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\right) \cap \partial\Omega}$. Через $r_i^{(s)}$ обозначим расстояние от $B\left(x_i^{(s)}, d_i^{(s)}\right)$ до множества $\bigcup_{j \ne i} B\left(x_j^{(s)}, d_j^{(s)}\right)$.

Будем предполагать, что выполнены условия:

$\text{A}_3$) $d_i^{(s)} \le c_1 r_i^{(s)}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \max\limits_{1 \le i \le I(s)} r_i^{(s)} = 0$, $c_1$ — не зависящая от $i, s$ постоянная;

$\text{A}_4$) выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{I(s)} \left\{ \frac{\left[ d_i^{(s)} \right]^{m(n-m)}}{\left[ r_i^{(s)} \right]^{n-1}} \right\}^{1/(m-1)} \le c_2 \tag{10}$$

с не зависящей от $s$ постоянной $c_2$.

Для формулировки еще одного условия на $F_i^{(s)}$. нам понадобится еще решение вспомогательной задачи, которую определим ниже.

Пусть $k$ — произвольное действительное число. Определим функции $v_i^{(s)}(x, k)$ как решение следующей задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left( x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k)}{\partial x} \right) = 0, \quad x \in B_i^{(s)} = B\left(x_i^{(s)}, 1\right) \cap \Omega, \tag{11}$$

$$v_i^{(s)}(x, k) = k, \quad x \in F_i^{(s)}, \tag{12}$$

$$v_i^{(s)}(x, k) = 0, \quad x \in \partial B\left(x_i^{(s)}, 1\right) \cap \Omega, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\left( x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k)}{\partial x} \right)\cos(\nu, x_j) = 0, \quad x \in B\left(x_i^{(s)}, 1\right) \cap \partial\Omega \setminus F_i^{(s)}. \tag{14}$$

Будем предполагать выполнение следующего условия:

$\text{A}_5$) существует непрерывная функция $c(x, k)$ такая, что для произвольного шара $B$ выполнено равенство

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i \in I_s(B)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k} \int_{\Omega} a_j\left( x, 0, \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k)}{\partial x} \right) \frac{\partial v_i^{(s)}(x, k)}{\partial x_j} dx = \int_{B \cap \partial\Omega} c(x, k)\, dx, \tag{15}$$

причем стремление к пределу в (15) является равномерным по $k$. В (15) $I_s(B)$ — множество тех номеров $i$, для которых $1 \le i \le I(s)$, $x_i^{(s)} \in B$.

Будет доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* $A_1 - A_5$ *и* $u_s(x)$ — *слабо сходящаяся к* $u_0(x)$ *последовательность решений задачи* (1) – (3). *Тогда последовательность* $u_s(x)$ *сильно сходится в* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p < m$ *и функция* $u_0(x)$ *является решением задачи*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0\left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right)\cos(\nu, x_i) = g(x) + c(x, f(x) - u(x)), \quad x \in \partial\Omega. \tag{17}$$

**2.** Отметим некоторые оценки решений модельной задачи.

Пусть $B_1^+ = B(0,1) \cap \{ x_n > 0 \}$. Определим функцию $v(x, k)$ как решение задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_j\left( x, 0, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad x \in B_1^+, \tag{18}$$

$$u = k, \quad x \in F, \tag{19}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial B(0,1) \cap R_+^n, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\left( x, 0, \frac{\partial u}{\partial x} \right)\cos(\nu, x_j) = 0, \quad x \in B(0,1) \cap R_+^n \setminus F. \tag{21}$$

Здесь $F \subset B(0, d) \cap \{ x_n = 0 \}$, $d < 1/8$, $R_+^n = \{ x_n > 0 \}$.

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** *Существует постоянная* $c$, *зависящая лишь от* $n$, $m$, $\nu$, $\mu$, *такая, что для решения задачи* (18) – (21) *выполнены оценки*

$$\int\limits_{B_1^+} \left( 1 + \left| \frac{\partial v(x,k)}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \left| \frac{\partial v(x,k)}{\partial x} \right|^2 dx \le c k^2 d^{n-m} (|k| + d)^{m-2}, \tag{22}$$

$$\int\limits_{B_1^+} \left[ 1 + \left| \frac{\partial v(x,k)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v(x,\tilde{k})}{\partial x} \right| \right]^{m-2} \left| \frac{\partial v(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,\tilde{k})}{\partial x} \right|^2 dx \le$$

$$\le c\, |k - \tilde{k}|^2 d^{n-m} (|k| + |\tilde{k}| + d)^{m-2}, \tag{23}$$

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{B_1^+} \left[ a_j\left( x, 0, \frac{\partial v(x,k)}{\partial x} \right) \frac{1}{k} \frac{\partial v(x,k)}{\partial x_j} - a_j\left( x, 0, \frac{\partial v(x,\tilde{k})}{\partial x} \right) \frac{1}{\tilde{k}} \frac{\partial v(x,\tilde{k})}{\partial x_j} \right] dx \right| \le$$

$$\le c\, |k - \tilde{k}|^{2/m} d^{n-m} (|k| + |\tilde{k}| + d)^{m-2}, \tag{24}$$

$$|v(x,k)| \le |k| \min\left\{ c\left( \frac{d}{|x|} \right)^{(n-m)/(m-1)}, 1 \right\} \quad \text{при} \quad x \in B_1^+. \tag{25}$$

***Доказательство.*** Для определенности считаем, что $k > 0$. Подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (18) – (21), функцию $\varphi(x) = v(x,k) - k\psi(x)$, где $\psi(x) \in C^\infty(B^+)$, $\psi(x) = 0$ вне $B_{2d}^+$, $\psi(x) = 1$ в $B_d^+$, $|\partial\psi/\partial x| \le 1/d$. В результате получим

$$\int\limits_{B_1^+} \left( 1 + \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx \le c_1 k \int\limits_{B_1^+} \left( 1 + \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right)^{m-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| dx,$$

откуда будем иметь (22).

Неравенство (23) получается при подстановке в интегральное тождество, соответствующее задаче (18) – (21) для $v(x,k)$, $v(x,\tilde{k})$, функции $\varphi(x)=v(x,k)-v(x,\tilde{k})-(k-\tilde{k})\psi(x)$. Вычитая из одного полученного таким образом равенства другое, получаем (23). Аналогично получаем (24).

Для доказательства (25) при $k>0$ введем вначале множество

$$E_t = \{ x\in B_1^+ : 0\le v(x,k)\le t \}.$$

Подставим в интегральное тождество, соответствующее задаче (18) – (21), функцию $\varphi(x) = v_t-(t/k)v$, где $v_t=\min\{v(x,k),t\}$. После обычных преобразований имеем

$$\int_{E_t}\left(1+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \le c\frac{t}{k}\int_{B_1^+}\left(1+\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx \le$$

$$\le ctkd^{n-m}(k+d)^{m-2}.$$

Далее оценка (25) получается аналогично оценке (2. 6) из [2].

**3.** Из неравенства (9) следует, что $u_s(x)$ — решение задачи (1) – (3) — слабо сходится в $W_m^1(\Omega)$ к некоторой функции $u_0(x)\in W_m^1(\Omega)$.

Определим числовые последовательности $\{\lambda_s\}$, $\{\mu_s\}$ равенствами

$$\lambda_s^{m+1} = \max\left\{\left[\ln\frac{1}{r_i^{(s)}}\right]^{-1}, \int_{U_s}\left[\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m+|u_0(x)|^m+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^m+|f|^m\right]dx\right\},$$

$$\mu_s = \lambda_s^{-(m-1)/(n-m)(m+1)},$$

где $U_s = \bigcup_{i=1}^{I(s)}\left(B\left(x_i^{(s)},\overline{\rho}_i^{(s)}\right)\cap\Omega\right)$, $\overline{\rho}_i^{(s)} = (1/2)d_i^{(s)}+[r_i^{(s)}]^{(n-2)/(n-1)}$.

Проверим, что

$$\lim_{s\to\infty}\lambda_s = 0, \quad \lim_{s\to\infty}\mu_s = \infty, \quad \lim_{s\to\infty}\lambda_s\mu_s^{(n-m)m/(m-1)} = 0. \tag{26}$$

Вначале отметим очевидное неравенство

$$\sum_{i=1}^{I(s)}[r_i^{(s)}]^{n-1} \le c_3. \tag{27}$$

Используя неравенство Гельдера и оценки (10), (27), получаем

$$\sum_{i=1}^{I(s)}[d_i^{(s)}]^{n-m} \le \sum_{i=1}^{I(s)}\frac{[d_i^{(s)}]^{(n-m)m/(m-1)}}{[r_i^{(s)}]^{(n-1)/(m-1)}}\sum_{i=1}^{I(s)}[r_i^{(s)}]^{n-1} \le c_4. \tag{28}$$

Теперь(26) легко проверяется с помощью оценок (27), (28).

Введем последовательность $\rho_i^{(s)}$ и подмножества индексов $I_s'$, $I_s''$:

$$\rho_i^{(s)} = \max\left\{d_i^{(s)},[r_i^{(s)}]^{(n-1)/(n-m)}\mu_s\right\},$$

$$I_s' = \left\{i: i=1,\dots,I(s): d_i^{(s)}\ge\mu_s[r_i^{(s)}]^{(n-1)/(n-m)}\right\},$$

$$I_s'' = \left\{i: i=1,\dots,I(s): d_i^{(s)}<\mu_s[r_i^{(s)}]^{(n-1)/(n-m)}\right\}.$$

**Лемма 2.** *При выполнении условий* $A_3$, $A_4$ *справедливы соотношения*

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i\in I_s'}[d_i^{(s)}]^{n-m} = 0, \tag{29}$$

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I_s''} [\, \rho_i^{(s)} \,]^n \;=\; 0. \tag{30}$$

***Доказательство.*** Имеем

$$\sum_{i\in I_s'} [\, d_i^{(s)} \,]^{n-m} \;\le\; \sum_{i\in I_s'} \frac{[\, d_i^{(s)} \,]^{(n-m)m/(m-1)}}{[\, r_i^{(s)} \,]^{(n-1)/(m-1)} \mu_s^{(n-m)/(m-1)}} \;\le\; \frac{c_2}{\mu_s^{(n-m)/(m-1)}} \;\to\; 0.$$

Теперь из условий (26), (10) получаем (29).

Далее имеем

$$\sum_{i\in I_s''} [\, \rho_i^{(s)} \,]^n \;=\; \mu_s^n \sum_{i\in I_s''} [\, r_i^{(s)} \,]^{n(n-1)/(n-m)} \;\le$$

$$\le \max_{1\le i\le I(s)} \left( \mu_s^{n/m} [\, r_i^{(s)} \,]^{(n-1)/(n-m)} \right)^m \sum_{i=1}^{I(s)} [\, r_i^{(s)} \,]^{n-1}.$$

Из (26), (27) получаем (30).

Определим еще системы функций $\psi_i^{(s)}(x)$, $\varphi_i^{(s)}(x)$. Носители функций $\psi_i^{(s)}(x)$, $\varphi_i^{(s)}(x)$ содержатся соответственно в множествах $B(\, x_i^{(s)}, \, (\, 1 + 1/(2c_1))\, d_i^{(s)}) \cap \Omega$, $B\,(\, x_i^{(s)}, \, \lambda_2 \rho_i^{(s)}) \cap \Omega$, $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1 + 1/(2c_1)$, $\psi_i^{(s)}(x) = 1$ на $F_i^{(s)}$, $\varphi_i^{(s)}(x) = 1$ в $B\,(\, x_i^{(s)}, \, \lambda_1 \rho_i^{(s)}) \cap \Omega$, $0 \le \psi_i^{(s)}(x) \le 1$, $0 \le \varphi_i^{(s)}(x) \le 1$, $|\partial\psi_i^{(s)}/\partial x| \le c_0 / d_i^{(s)}$, $|\partial\varphi_i^{(s)}/\partial x| \le c_0/\rho_i^{(s)}$.

Обозначим $D_i^{(s)} = B(\, x_i^{(s)}, \lambda_2\, \rho_i^{(s)})$. Пусть

$$u_i^{(s)} \;=\; \frac{1}{\operatorname{mes} D_i^{(s)}} \int_{D_i^{(s)}} u_0(x)dx, \quad f_i^{(s)} \;=\; \frac{1}{\operatorname{mes} D_i^{(s)}} \int_{D_i^{(s)}} f(x)dx. \tag{31}$$

Определим разложение

$$u_s(x) \;=\; u_0(x) \;+\; \sum_{i=1}^{4} r_s^{(i)}(x) \;+\; w_s(x), \tag{32}$$

где

$$r_s^{(1)}(x) \;=\; \sum_{i\in I_s'} \left[ u_i^{(s)} - u_0(x) \right] \psi_i^{(s)}(x) \;+\; \sum_{i\in I_s''} \left[ u_i^{(s)} - u_0(x) \right] \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(2)}(x) \;=\; \sum_{i\in I_s'} \left[ f(x) - f_i^{(s)} \right] \psi_i^{(s)}(x) \;+\; \sum_{i\in I_s''} \left[ f(x) - f_i^{(s)} \right] \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(3)}(x) \;=\; \sum_{i\in I_s'} v_i^{(s)}\!\left(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}\right) \varphi_i^{(s)}(x),$$

$$r_s^{(4)}(x) \;=\; \sum_{i\in I_s''} v_i^{(s)}\!\left(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)}\right) \varphi_i^{(s)}(x).$$

**Лемма 3.** *При выполнении условий* $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_4$ *последовательности* $r_s^{(1)}(x)$, $r_s^{(2)}(x)$, $r_s^{(3)}(x)$ *при* $s \to \infty$ *сильно сходятся к нулю в пространстве* $W_m^1(\Omega)$.

***Доказательство.*** Используя ограниченность последовательности $u_s(x)$, получаем

$$\left\| r_s^{(1)}(x) \right\|_{L_m(\Omega)}^m \;\le\; \sum_{i\in I_s'} \int_{\Omega} \left| u_i^{(s)} - u_0(x) \right|^m \left| \psi_i^{(s)}(x) \right|^m dx \;+$$

$$+ \sum_{i\in I_s''} \int_\Omega \left|u_i^{(s)} - u_0(x)\right|^m \left|\varphi_i^{(s)}(x)\right|^m dx \le c_5 \left\{ \sum_{i\in I_s'} \left[ d_i^{(s)} \right]^n + \sum_{i\in I_s''} \left[ \rho_i^{(s)} \right]^n \right\}. \quad (33)$$

Правая часть (33) стремится к нулю в силу (26), (29), (30). Далее имеем

$$\left\| \frac{\partial r_s^{(1)}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m \le c_6 \left\{ \sum_{i\in I_s'} \int_\Omega \left|u_i^{(s)} - u_0(x)\right|^m \left| \frac{\partial \psi_i^{(s)}(x)}{\partial x} \right|^m dx + \right.$$

$$+ \sum_{i\in I_s'} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m \left|\psi_i^{(s)}(x)\right|^m dx + \sum_{i\in I_s''} \int_\Omega \left|u_i^{(s)} - u_0(x)\right|^m \left|\frac{\partial \varphi_i^{(s)}}{\partial x}\right|^m dx +$$

$$\left. + \sum_{i\in I_s''} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m \left|\varphi_i^{(s)}(x)\right|^m dx \right\} \le c_7 \left\{ \sum_{i\in I_s'} \left[ d_i^{(s)} \right]^{n-m} + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m F_s(x) dx + \sum_{i\in I_s''} \left[ \rho_i^{(s)} \right]^n + \sum_{i\in I_s''} \int_{D_i^{(s)}} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^m dx \right\}, \quad (34)$$

где $F_s(x) = \sum_{i\in I_s'} \left[ \psi_i^{(s)}(x) \right]^m$. Первое, третье и четвертое слагаемые в правой части (34) стремятся к нулю в силу (29), (30), второе слагаемое в (34) — в силу того, что $F_s(x)$ стремится к нулю в $L_1(\Omega)$.

Стремление к нулю $r_s^{(2)}(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ проверяется аналогично. Из (22) получаем

$$\left\| r_s^{(3)}(x) \right\|_{W_m^1(\Omega)}^m \le c_8 \left( \sum_{i\in I_s'} \left[ d_i^{(s)} \right]^{n-m} + \sum_{i\in I_s'} \left[ d_i^{(s)} \right]^n \right). \quad (35)$$

Правая часть (35) стремится к нулю в силу (29).

**Лемма 4.** *При выполнении условий* $A_1 - A_4$ *последовательность* $r_s^{(4)}(x)$ *при* $s \to \infty$ *сильно сходится к нулю в пространстве* $W_p^1(\Omega)$ *при любом* $p < < m$.

***Доказательство.*** В силу ограниченности $v_i^{(s)}(x, f_i^{(s)} - u_i^{(s)})$ получаем

$$\left\| r_s^{(4)}(x) \right\|_{L_m(\Omega)}^m \le c_9 \sum_{i\in I_s''} \left[ \rho_i^{(s)} \right]^n. \quad (36)$$

Правая часть (36) стремится к нулю в силу (30).

В силу неравенства (22)

$$\left\| \frac{\partial r_s^{(4)}(x)}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)}^m \le c_{10} \sum_{i\in I_s''} \left( \left[ d_i^{(s)} \right]^{n-m} + \left[ d_i^{(s)} \right]^n \right). \quad (37)$$

Правая часть (37) ограничена в силу (27), (28). Применяя неравенство Гельдера при $1 < p < m$, получаем

$$\left\| \frac{\partial r_s^{(4)}}{\partial x} \right\|_{L_p(\Omega)} \le \left\| \frac{\partial r_s^{(4)}}{\partial x} \right\|_{L_m(\Omega)} \left\{ \sum_{i\in I_s''} \left[ \rho_i^{(s)} \right]^n \right\}^{1/p - 1/m}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю в силу (30). Аналогично теореме 3. 1 из [2] доказывается следующая лемма.

**Лемма 5.** *Последовательность* $w_s(x)$, *определенная равенством* (32), *сильно стремится к нулю в* $W_m^1(\Omega)$.

**4.** Выведем предельное уравнение. Пусть $h(x)$ — произвольная функция класса $C^\infty(\Omega)$. Определим при $k = 1, 2, \ldots$ последовательности

$$h_{k,s}(x) = h(x) + \rho_s^{(1)}(x) + \rho_{s,k}^{(2)}(x) + \rho_{s,k}^{(3)}(x), \tag{38}$$

где

$$\rho_s^{(1)}(x) = \sum_{i \in I(s)} \left[ h_i^{(s)} - h(x) \right] \psi_i^{(s)}(x),$$

$$\rho_{s,k}^{(2)}(x) = - \sum_{i \in I'_{s,k}} \frac{1}{f_i^{(s)} - u_{i,k}^{(s)}} v_i^{(s)}\left(x, f_i^{(s)} - u_{i,k}^{(s)}\right) h_i^{(s)} \varphi_i^{(s)}(x), \tag{39}$$

$$\rho_{s,k}^{(3)}(x) = - \sum_{i \in I''_{s,k}} v_i^{(s)}(x, 1) h_i^{(s)} \varphi_i^{(s)}(x).$$

Здесь $u_k^{(0)}(x)$ — равномерно ограниченная последовательность из $C^\infty(\Omega)$, сходящаяся к $u_0(x)$ в $W_m^1(\Omega)$;

$$u_{i,k}^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} D_i^{(s)}} \int\limits_{D_i^{(s)}} u_k^{(0)}(x) dx, \quad h_i^{(s)} = \frac{1}{\operatorname{mes} D_i^{(s)}} \int\limits_{D_i^{(s)}} h(x) dx;$$

функции $\varphi_i^{(s)}(x)$, $\psi_i^{(s)}(x)$, множества $D_i^{(s)}$ те же, что и в п. 3;

$$I'_{s,k} = \left\{ i :\ 1 \le i \le I(s) : \left| f_i^{(s)} - u_{i,k}^{(s)} \right| \ge d_i^{(s)} \right\}.$$
$$I''_{s,k} = \left\{ i :\ 1 \le i \le I(s) : \left| f_i^{(s)} - u_{i,k}^{(s)} \right| < d_i^{(s)} \right\}. \tag{40}$$

Аналогично леммам 2, 3 доказывается следующая лемма.

**Лемма 6.** *При любом* $p < m$ *выполнено*

$$\lim_{s \to \infty} \left( \left\| \rho_s^{(1)} \right\|_{W_m^1(\Omega)} + \left\| \rho_{s,k}^{(2)} \right\|_{W_p^1(\Omega)} + \left\| \rho_{s,k}^{(3)} \right\|_{W_m^1(\Omega)} \right) = 0. \tag{41}$$

Подставляя в интегральное тождество (8) в качестве пробной функции функцию $h_{k,s}(x)$, получаем

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_5 = 0, \tag{42}$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \int\limits_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial h}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) h \right\} dx - \int\limits_{\Gamma_s} g(x) h(x) dx,$$

$$\mathcal{J}_2 = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_s^{(1)}}{\partial x_j} dx,$$

$$\mathcal{J}_3 = - \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_{s,k}^{(2)}}{\partial x_j} dx, \tag{43}$$

$$\mathcal{J}_4 = - \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \frac{\partial \rho_{s,k}^{(3)}}{\partial x_j} dx,$$

$$\mathcal{J}_5 = \int\limits_\Omega a_0\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) \left[ \rho_s^{(1)} - \rho_{s,k}^{(2)} - \rho_{s,k}^{(3)} \right] dx - \int\limits_{\Gamma_s} g \left[ \rho_s^{(1)} - \rho_{s,k}^{(2)} - \rho_{s,k}^{(3)} \right] dx.$$

Уже отмеченная сходимость $u_s(x)$ к $u_0(x)$ в $W_p^1(\Omega)$ при $p < m$ позволяет совершить предельный переход в $\mathcal{J}_1$ и получить

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{J}_1 = \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)h \right\}dx - \int_{\partial\Omega} ghdx. \quad (44)$$

На основании (41), ограниченности $u_s(x)$ в $W_m^1(\Omega)$ и условий $\mathrm{A}_2$ получаем

$$|\mathcal{J}_2| + |\mathcal{J}_4| + |\mathcal{J}_5| \le \tau_s^{(1)}, \quad \tau_s^{(1)} \to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty. \quad (45)$$

Оценим $\mathcal{J}_3$:

$$\mathcal{J}_3 = -\int_\Omega \sum_{j=1}^n \left[ a_j\left(x, u_s, \frac{\partial u_s}{\partial x}\right) - a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_{s,k}^{(4)}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial \rho_{s,k}^{(2)}}{\partial x_j}dx -$$

$$- \int_\Omega \sum_{j=1}^n \left[ a_j\left(x, u_s, \frac{\partial r_{s,k}^{(4)}}{\partial x}\right) - a_j\left(x, 0, \frac{\partial r_{s,k}^{(4)}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial \rho_{s,k}^{(2)}}{\partial x_j}dx -$$

$$- \int_\Omega \sum_{j=1}^n a_j\left(x, 0, \frac{\partial r_{s,k}^{(4)}}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho_{s,k}^{(2)}}{\partial x_j}dx = \mathcal{J}_3^{(1)} + \mathcal{J}_3^{(2)} + \mathcal{J}_3^{(3)}. \quad (46)$$

Первый интеграл в правой части (46) оценивается следующим образом:

$$|\mathcal{J}_3^{(1)}| \le c_{11}\left[ \int_\Omega \left( 1 + \left|\frac{\partial u_s}{\partial x}\right|^m + \left|\frac{\partial r_{s,k}^{(4)}}{\partial x}\right|\right)^m dx \right]^{(m-2)/m} \times$$

$$\times \left\{ \left[ \int_\Omega \left( \left|\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \rho_{s,k}^{(2)}}{\partial x}\right|\right)^m dx \right]^{2/m} + \right.$$

$$\left. + \left[ \int_\Omega \left( \left|\frac{\partial r_{s,k}^{(1)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_s^{(2)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial r_{s,k}^{(3)}}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|\right)^m dx \right]^{1/m} \left[ \int_\Omega \left|\frac{\partial \rho_{s,k}^{(2)}}{\partial x}\right|^m dx \right]^{1/m} \right\}. \quad (47)$$

Для второго интеграла в (46) можно получить оценку

$$|\mathcal{J}_3^{(2)}| \le c\,\tau_s^{(2)}, \quad \tau_s^{(2)} \to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty. \quad (48)$$

Далее, используя условие $\mathrm{A}_5$, аналогично [2] из (42) – (47) получаем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^n a_j\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x_j} + a_0\left(x, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)h \right\}dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left\{ g(x) + c\big(x, f(x) - u_0(x)\big) \right\}hdx + \tau_{s,k}^{(3)}, \quad (49)$$

$$\tau_{s,k}^{(3)} \to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty, \quad k\to\infty.$$


1. *Чечкин Г.А.* Усреднение краевых задач с сингулярными возмущениями граничных условий // Мат. сб. – 1993.– **184**, №6.– С. 99–150.
2. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.– М.: Наука, 1990.– 448 с.


Получено 21.03.94