УДК 519.21

Ю. Н. Линьков, д-р физ.-мат. наук,
М. И. Медведева, асп. (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ТЕОРЕМЫ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ДВУХ ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ

Large deviation theorems for the logarithm of the likelihood ratio in two simple hypotheses testing problems for the general scheme of statistical experiments under null hypothesis and under alternative hypothesis are proved. The obtained theorems are applied to the investigation of the relation between the rates of a decrease of the first and second type error probabilities for Neymann - Pearson test.

Доведено граничні теореми про великі відхилення логарифма відношення правдоподібності у задачі розрізнення двох простих гіпотез у загальній схемі статистичних експериментів з нульовою гіпотезою та з альтернативою, які застосовуються для дослідження спадання ймовірностей помилок 1-го та 2-го роду критерію Неймана – Пірсона.

1. Введение. Предельные теоремы о больших уклонениях играют важную роль при исследовании скорости убывания вероятностей ошибок в задаче различения статистических гипотез [1 – 4]. При этом первые работы были посвящены установлению показателей экспонент вероятностей ошибок 2-го рода при заданных показателях экспонент вероятностей ошибок 1-го рода для наблюдений последовательностей независимых одинаково распределенных величин [4] и однородных эргодических цепей Маркова [5]. Решение этих задач основано на теоремах о больших уклонениях, примененных к логарифму отношения правдоподобия.

Настоящая работа посвящена теоремам о больших уклонениях для логарифма отношения правдоподобия в общей схеме статистических экспериментов и их применению к исследованию скорости убывания вероятностей ошибок 1- и 2-го рода для критерия Неймана – Пирсона. Устанавливаются теоремы о больших уклонениях как при нулевой гипотезе, так и при альтернативе. Это позволяет исследовать зависимость скорости убывания вероятности ошибок 2-го рода от скорости убывания вероятности ошибок 1-го рода и наоборот. При этом рассмотрен весь спектр скоростей убывания вероятностей ошибок. В недавней работе одного из авторов были получены первые результаты подобного типа [6].

2. Предварительные понятия и факты для общих бинарных статистических экспериментов. Пусть $(X^t, \mathfrak{B}^t, P^t, \tilde{P}^t)$, $t \in R_+$, — семейство бинарных статистических экспериментов, порожденных наблюдениями ξ^t, вообще говоря, произвольной природы, где P^t (соответственно $\tilde{P}^t$) — вероятностная мера, задающая распределение наблюдения ξ^t, если верна гипотеза H^t (соответственно $\tilde{H}^t$). Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез H^t и $\tilde{H}^t$ по результатам наблюдения ξ^t.

Пусть $Q^t = (P^t + \tilde{P}^t)/2$ и $\mathfrak{z}_t = dP^t/dQ^t$, $\tilde{\mathfrak{z}}_t = d\tilde{P}^t/dQ^t$ — производные Радона – Никодима мер P^t и $\tilde{P}^t$ соответственно относительно меры Q^t. Обозначим через $H_t(\varepsilon)$ интеграл Хеллингера порядка $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$ для мер $\tilde{P}^t$ и P^t, положив

$$H_t(\varepsilon) = H(\varepsilon; \tilde{P}^t, P^t) = E_{Q^t} \tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon},$$

где E_{Q^t} — математическое ожидание по мере Q^t. Здесь при $\varepsilon < 0$ и $\tilde{\mathfrak{z}}_t = 0$ полагаем $\tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon} = 0$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon} = \infty$), если $\mathfrak{z}_t = 0$ (соответственно $\mathfrak{z}_t > 0$). При $\varepsilon = 0$ полагаем $\tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon} = \mathfrak{z}_t I(\tilde{\mathfrak{z}}_t > 0)$, а при $\varepsilon = 1$ — $\tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon} = \tilde{\mathfrak{z}}_t I(\mathfrak{z}_t > 0)$. При $\varepsilon = 0$ и $\mathfrak{z}_t = 0$ полагаем $\tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon} = 0$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon} \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon} = \infty$), если $\tilde{\mathfrak{z}}_t = 0$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{z}}_t > 0$). Кроме того, через $\tilde{H}_t(\varepsilon)$

обозначим интеграл Хеллингера порядка $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$ для мер P^t и $\tilde{P}^t$, положив

$$\tilde{H}_t(\varepsilon) = H(\varepsilon; P^t, \tilde{P}^t) = E_{Q^t} \mathfrak{z}_t^{\varepsilon} \tilde{\mathfrak{z}}_t^{1-\varepsilon}.$$

Очевидно, что $\tilde{H}_t(\varepsilon) = H_t(1-\varepsilon)$. Введем отношения правдоподобия $z_t = \tilde{\mathfrak{z}}_t / \mathfrak{z}_t$, $\tilde{z}_t = \mathfrak{z}_t / \tilde{\mathfrak{z}}_t$, полагая $0/0 = 0$. Обозначим $\Lambda_t = \ln z_t$, $\tilde{\Lambda}_t = \ln \tilde{z}_t$. Введем величины

$$\varepsilon_t^- = \inf\{\varepsilon : H_t(\varepsilon) < \infty\}, \quad \varepsilon_t^+ = \sup\{\varepsilon : H_t(\varepsilon) < \infty\}.$$

Ниже нам потребуется следующая хорошо известная лемма (см. [7], лемма 2.3.1).

Лемма 1. *Для любых* $\varepsilon \in (\varepsilon_t^-, \varepsilon_t^+)$, *отличных от* 0 *и* 1,

$$H_t(\varepsilon) = E^t z_t^{\varepsilon} = \tilde{E}^t \tilde{z}_t^{1-\varepsilon} = \tilde{H}_t(1-\varepsilon),$$

где E^t и $\tilde{E}^t$ — *математическое ожидание по распределениям* P^t *и* $\tilde{P}^t$ *соответственно.*

Через δ_t обозначим критерий Неймана – Пирсона уровня α_t для различения гипотез H^t и $\tilde{H}^t$. Известно [7], что

$$\delta_t = I(\Lambda_t > d_t) + \varepsilon_t I(\Lambda_t = d_t), \tag{1}$$

где $d_t \in [-\infty, +\infty]$, $\varepsilon_t \in [0, 1]$ — параметры критерия δ_t, определяемые значением уровня α_t. Пусть β_t — вероятность ошибки 2-го рода критерия δ_t. Критерий δ_t является наиболее мощным критерием уровня α_t. Ниже будем рассматривать асимптотическое поведение α_t и β_t при $t \to \infty$. Из равенства (1) видно, что поведение α_t и β_t при $t \to \infty$ полностью определяется поведением логарифма отношения правдоподобия Λ_t при $t \to \infty$. В данной работе будем рассматривать случай, когда для Λ_t справедливы теоремы о больших уклонениях.

3. Теоремы о больших уклонениях для логарифма отношения правдоподобия. Введем следующее условие:

H. Существует интервал $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, содержащий точку 0 и такой, что для любого $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln H_t(\varepsilon) = c(\varepsilon),$$

где $\psi_t \to \infty$ при $t \to \infty$, а $c(\varepsilon)$ — строго выпуклая и дифференцируемая функция на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$.

Введем обозначения

$$\gamma_0 = c'(0), \quad \gamma_1 = c'(1), \quad \gamma_- = c'(\varepsilon_-+), \quad \gamma_+ = c'(\varepsilon_+-).$$

Теорема 1. *Если выполняется условие H, то справедливы следующие утверждения:*

а) *для любого* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \geq \gamma) = -I(\gamma) \in (-\infty, 0); \tag{2}$$

б) *для любого* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_0)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \le \gamma) = -I(\gamma) \in (-\infty, 0), \tag{3}$$

где $I(\gamma) = \gamma\varepsilon(\gamma) - c(\varepsilon(\gamma))$, *а* $\varepsilon(\gamma)$ *— единственное решение уравнения* $c'(\varepsilon) = \gamma$.

Доказательство. Учитывая лемму 1 и равенство $\Lambda_t = \ln z_t$, из [7 – 9] получаем следующий результат:

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) = -I(\gamma) \in (-\infty, 0) \quad \forall\, \gamma \in (\gamma_0, \gamma_+), \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma) = -I(\gamma) \in (-\infty, 0) \quad \forall\, \gamma \in (\gamma_-, \gamma_0). \tag{5}$$

Таким образом, для доказательства соотношений (2) и (3) достаточно показать, что в соотношениях (4) и (5) строгие неравенства $<$ и $>$ можно заменить на неравенства $\le$ и $\ge$ соответственно.

Пусть $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \in (\gamma_0, \gamma_+)$. Очевидно, имеем

$$P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma + \varepsilon) \le P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \ge \gamma) \le P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma - \varepsilon). \tag{6}$$

Так как по условию H функция $c(\varepsilon)$ строго выпукла, то в силу теоремы 26.3 из [10] (см. также теоремы VI.5.6 и VII.2.1 из [8]) функция $I(\gamma)$ дифференцируема. Применяя теперь к правой и левой частям неравенства (6) соотношение (4) и учитывая произвольность ε и непрерывность функции $I(\gamma)$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \ge \gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma) \tag{7}$$

для любого $\gamma \in (\gamma_+, \gamma_0)$.

Аналогично доказываем, что для любого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_0)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \le \gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma). \tag{8}$$

Объединяя теперь соотношения (4), (5), (7) и (8), получаем требуемые соотношения (2) и (3). Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** Соотношение (4) в работе [8] установлено без предположения строгой выпуклости и дифференцируемости функции $c(\varepsilon)$. Если же функция $c(\varepsilon)$ дифференцируема, но предположение строгой выпуклости не требуется, то в работе [8] доказано соотношение (5) с неравенством $\le$ вместо неравенства $<$. Кроме того, в работе [8] предполагается, что $\varepsilon_- = -\infty$ и $\varepsilon_+ = +\infty$, а утверждения доказываются с $\gamma_- = -\infty$ и $\gamma_+ = +\infty$.

Ниже нам потребуется аналог теоремы 1, в котором меняются местами меры P^t и $\tilde{P}^t$. Для его формулировки введем следующее условие, являющееся аналогом условия H:

$\tilde{H}$. Существует интервал $(\tilde{\varepsilon}_-, \tilde{\varepsilon}_+)$, содержащий точку 0 и такой, что для любого $\varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_-, \tilde{\varepsilon}_+)$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \tilde{H}_t(\varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon),$$

где $\tilde{\psi}_t \to \infty$ при $t \to \infty$, а $\tilde{c}(\varepsilon)$ — строго выпуклая и дифференцируемая функция на $(\tilde{\varepsilon}_-, \tilde{\varepsilon}_+)$.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{\gamma}_0 = \tilde{c}'(0), \quad \tilde{\gamma}_1 = \tilde{c}'(1), \quad \tilde{\gamma}_- = \tilde{c}'(\varepsilon_-+), \quad \tilde{\gamma}_+ = \tilde{c}'(\varepsilon_+-).$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если выполняется условие* $\tilde{H}$, *то справедливы следующие утверждения:*

а) *для любого* $\gamma \in (\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\tilde{\psi}_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t > \gamma) = \lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\tilde{\psi}_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t \geq \gamma) = -\tilde{I}(\gamma) \in (-\infty, 0);$$

б) *для любого* $\gamma \in (\tilde{\gamma}_-, \tilde{\gamma}_0)$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\tilde{\psi}_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t < \gamma) = \lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\tilde{\psi}_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t \leq \gamma) = -\tilde{I}(\gamma) \in (-\infty, 0),$$

где $\tilde{I}(\gamma) = \gamma\tilde{\varepsilon}(\gamma) - \tilde{c}(\tilde{\varepsilon}(\gamma))$, *а* $\tilde{\varepsilon}(\gamma)$ — *единственное решение уравнения* $\tilde{c}'(\varepsilon) = \gamma$.

Введем следующее условие:

H^*. Существует интервал $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, содержащий отрезок $[0, 1]$ и такой, что существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln H_t(\varepsilon) = c(\varepsilon),$$

где $\psi_t \to \infty$ при $t \to \infty$, а $c(\varepsilon)$ — строго выпуклая и дифференцируемая функция на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$.

Очевидно, что условие H^* является более сильным, чем условие H. Кроме того, так как $H_t(\varepsilon) = \tilde{H}_t(1-\varepsilon)$, то условие H^* влечет условие $\tilde{H}$ с $\tilde{\psi}_t = \psi_t$, $\tilde{c}(\varepsilon) = c(1-\varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon}_- = 1-\varepsilon_+$, $\tilde{\varepsilon}_+ = 1-\varepsilon_-$. Очевидно, $\tilde{c}'(\varepsilon) = -c'(1-\varepsilon)$ и, значит,

$$\tilde{\gamma}_0 = -\gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_1 = -\gamma_0, \quad \tilde{\gamma}_+ = -\gamma_-, \quad \tilde{\gamma}_- = -\gamma_+.$$

Функция $\tilde{I}(\gamma)$, введенная в следствии 1, также выражается через функцию $I(\gamma)$. На самом деле, так как $\varepsilon(\gamma)$ — единственное решение уравнения $c'(\varepsilon) = \gamma$, а $\tilde{\varepsilon}(\gamma)$ — единственное решение уравнения $\tilde{c}'(\varepsilon) = \gamma$ и $\tilde{c}'(\varepsilon) = -c'(1-\varepsilon)$, то получаем $\tilde{\varepsilon}(\gamma) = 1 - \varepsilon(-\gamma)$. Тогда

$$\tilde{I}(\gamma) = \gamma\tilde{\varepsilon}(\gamma) - \tilde{c}(\tilde{\varepsilon}(\gamma)) = \gamma(1-\varepsilon(-\gamma)) - c(\varepsilon(-\gamma)) =$$
$$= \gamma - \gamma\varepsilon(-\gamma) - c(\varepsilon(-\gamma)) = \gamma + I(-\gamma).$$

Объединяя теперь утверждения теоремы 1 и следствия 1, получаем следующее следствие.

Следствие 2. *Если выполняется условие* H^*, *то справедливы следующие утверждения:*

а) *для любого* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$ *выполняется соотношение* (2);

в) *для любого* $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_1)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \leq \gamma) = -I(\gamma) + \gamma \in (-\infty, 0).$$

4. Скорость убывания вероятностей ошибок критерия Неймана – Пирсона. Справедлива следующая теорема, устанавливающая взаимосвязь между скоростями убывания вероятностей ошибок 1- и 2-го рода критерия Неймана – Пирсона при выполнении условия H^*.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* H^*. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого* $a \in (0, I(\gamma_1))$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b(a), \tag{9}$$

где $b(a) = a - \gamma(a) \in (0, \tilde{I}(\tilde{\gamma}_1))$, *а* $\gamma(a)$ — *единственное решение уравнения* $I(\gamma) = a$;

2) *для любого* $a \in [I(\gamma_1), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = 0, \tag{10}$$

а для любого $b \in [\tilde{I}(\tilde{\gamma}_1)), \infty]$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = 0; \tag{11}$$

3) *справедливы импликации*

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = 0 \Rightarrow \overline{\lim_{t\to\infty}} \psi_t^{-1} \ln \beta_t \le -\tilde{I}(\tilde{\gamma}_1), \tag{12}$$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = 0 \Rightarrow \overline{\lim_{t\to\infty}} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \le -I(\gamma_1). \tag{13}$$

Доказательство. 1. Докажем сначала импликацию $\Rightarrow$ в (9).

Пусть $\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t \to -a$ при $t \to \infty$, где $a \in (0, I(\gamma_1))$. Имеем $\alpha_t = P^t(Y_t > y_t) + \varepsilon_t P^t(Y_t = y_t)$, где $Y_t = \psi_t^{-1}\Lambda_t$, $y_t = \psi_t^{-1} d_t$. Покажем, что $y_t \to \gamma(a)$ при $t \to \infty$. Обозначим $\underline{y} = \underline{\lim}_{t\to\infty} y_t$, $\overline{y} = \overline{\lim}_{t\to\infty} y_t$. Тогда достаточно доказать, что $\underline{y} = \gamma(a)$ и $\overline{y} = \gamma(a)$.

Докажем сначала, что $\underline{y} = \gamma(a)$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\underline{y} \ne \gamma(a)$. Для доказательства используем очевидные оценки

$$P^t(Y_t > y_t) \le \alpha_t \le P^t(Y_t \ge y_t). \tag{14}$$

По определению $\underline{y}$ существует последовательность t_n такая, что $t_n \to \infty$ и $y_{t_n} \to \underline{y}$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $|y_{t_n} - \underline{y}| < \varepsilon$ для всех $n > n_0$.

Пусть сначала $\underline{y} \le \gamma_0$ и $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\gamma_0 + \varepsilon < \gamma(a)$. Тогда $y_{t_n} < \underline{y} + \varepsilon < \gamma_0 + \varepsilon$ и в силу теоремы 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} > y_{t_n}) \ge \lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} > \gamma_0 + \varepsilon) = -I(\gamma_0 + \varepsilon).$$

Отсюда в силу оценок (14) и неравенства $\gamma_0 + \varepsilon < \gamma(a)$ получаем противоречие.

Предположим теперь, что $\underline{y} \in (\gamma_0, \gamma(a)) \cup (\gamma(a), \gamma_1)$. Пусть ε настолько мало, что $(\underline{y} - \varepsilon, \underline{y} + \varepsilon) \in (\gamma_0, \gamma(a)) \cup (\gamma(a), \gamma_1)$. Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} > y_{t_n}) \ge \lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} > \underline{y} + \varepsilon) = -I(y + \varepsilon),$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} > y_{t_n}) \le \lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} \ge \underline{y} - \varepsilon) = -I(y - \varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности ε и непрерывности функции $I(\gamma)$, используя оценки (14), получаем $\lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln \alpha_{t_n} = -I(\underline{y})$. Так как $\underline{y} \ne \gamma(a)$, а функция $I(\gamma)$ строго монотонно возрастает на интервале (γ_0, γ_+), то отсюда снова получаем противоречие.

Наконец, пусть $\underline{y} \geq \gamma_+$. Возьмем ε настолько малым, что $\gamma_+ - \varepsilon > \gamma(a)$. Так как $y_{t_n} > \underline{y} - \varepsilon \geq \gamma_+ - \varepsilon$ при всех $n > n_0$, то в силу теоремы 1

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} \geq y_{t_n}) \leq \lim_{n\to\infty} \psi_{t_n}^{-1} \ln P^{t_n}(Y_{t_n} \geq \gamma_+ - \varepsilon) = -I(\gamma_+ - \varepsilon).$$

Так как $\gamma_+ - \varepsilon > \gamma(a)$ и, значит, $I(\gamma_+ - \varepsilon) > I(\gamma(a)) = a$, то отсюда в силу (14) снова получаем противоречие.

Таким образом, полученные противоречия показывают, что $\underline{y} = \gamma(a)$. Аналогично показываем, что $\overline{y} = \gamma(a)$. Следовательно, доказано, что $y_t \to \gamma(a)$ при $t \to \infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $t_0 = t_0(\varepsilon)$ таково, что $|y_t - \gamma(a)| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$. Очевидно, справедливы неравенства

$$\tilde{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma(a) - \varepsilon) \leq \beta_t \leq \tilde{P}^t(\psi_t^{-1}\Lambda_t \leq \gamma(a) + \varepsilon).$$

В силу условия H^* меры P^t и $\tilde{P}^t$ эквивалентны для всех достаточно больших t и, значит, $\Lambda_t = -\tilde{\Lambda}_t$. Тогда

$$\tilde{P}^t(\psi_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t > -\gamma(a) + \varepsilon) \leq \beta_t \leq \tilde{P}^t(\psi_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t \geq -\gamma(a) - \varepsilon).$$

Отсюда в силу следствия 1, учитывая произвольность ε и непрерывность функции $\tilde{I}(\gamma)$, получаем $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -\tilde{I}(-\gamma(a))$. А так как $\tilde{I}(\gamma) = \gamma + I(-\gamma)$, то $\tilde{I}(-\gamma(a)) = -\gamma(a) + I(\gamma(a)) = a - \gamma(a) = b(a)$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b(a)$.

Таким образом, импликация $\Rightarrow$ в (9) доказана.

Докажем теперь импликацию $\Leftarrow$ в (9). Предположим, что $\psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b$ при $t \to \infty$, где $b = b(a) \in (0, \tilde{I}(\tilde{\gamma}_1))$. Обозначим через $\tilde{\gamma}(b)$ решение уравнения $\tilde{I}(\gamma) = b$. Как и при доказательстве импликации $\Rightarrow$ в (9), используя следствие 1, получаем $y_t \to -\tilde{\gamma}(b)$. Отсюда в силу теоремы 1 и оценок (14) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -I(-\tilde{\gamma}(b)).$$

Но $I(-\tilde{\gamma}(b)) = I(\tilde{\gamma}(b)) - \tilde{\gamma}(b) = b - \tilde{\gamma}(b)$. Обозначая $\tilde{a}(b) = b - \tilde{\gamma}(b)$, видим, что для завершения доказательства достаточно показать, что $\tilde{a}(b(a)) = a$. Тогда $\tilde{I}(-\tilde{\gamma}(a)) - \gamma(a) = a - \gamma(a) = b(a) = \tilde{I}(\tilde{\gamma}(b(a)))$. Отсюда в силу свойств функции $\tilde{I}(\gamma)$ имеем $\tilde{\gamma}(b(a)) = -\gamma(a)$. Таким образом, $\tilde{a}(b(a)) = b(a) - \tilde{\gamma}(b(a)) = a - \gamma(a) - \tilde{\gamma}(b(a)) = a$. Следовательно, импликация $\Leftarrow$ в (9) доказана. Тем самым утверждение 1 полностью доказано.

2. Докажем сначала импликацию (10). Пусть $\psi_t^{-1} \ln \alpha_t \to -a$ при $t \to \infty$, где $a \in [I(\gamma_1), \infty]$. Если $a \in [I(\gamma_1), I(\gamma_+ -))$, то, как и при доказательстве первой части теоремы, получаем $y_t \to \gamma(a)$ при $t \to \infty$, где $\gamma(a) \in [\gamma_1, \gamma_+)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t_0 = t_0(\varepsilon)$ такое, что $y_t > \gamma_1 - \varepsilon$ для всех $t > t_0$. Если же $a \in [I(\gamma_+ -), \infty]$, то легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_1 = t_1(\varepsilon)$ такое, что $y_t \geq \gamma_1 - \varepsilon$ для всех $t > t_1$. Следовательно, для $a \in [I(\gamma_1), \infty]$ имеем $y_t \geq \gamma_1 - \varepsilon$ при всех $t \geq t_0 \vee t_1$, и, значит, в силу следствия 1

$$0 \geq \overline{\lim_{t\to\infty}} \psi_t^{-1} \ln \beta_t \geq \underline{\lim_{t\to\infty}} \psi_t^{-1} \ln \beta_t \geq \underline{\lim_{t\to\infty}} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\tilde{\psi}_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t > -y_t) \geq$$

$$\geq \varliminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}^t(\psi_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t > -\gamma_1 + \varepsilon) = -\tilde{I}(-\gamma_1 + \varepsilon) = -I(\gamma_1 + \varepsilon) - \gamma_1 + \varepsilon.$$

Так как функция $I(\gamma)$ непрерывна и $I(\gamma_1) = \gamma_1$, то отсюда в силу произвольности ε получаем $\psi_t^{-1} \ln \beta_t \to 0$ при $t \to 0$. Значит, импликация (10) доказана.

Импликация (11) доказывается так же, как и импликация (10). Таким образом, утверждение 2 доказано.

3. Докажем сначала импликацию (12). Причем доказывать будем от противного. Пусть $\psi_t^{-1} \ln \alpha_t \to 0$ при $t \to \infty$, но $\varlimsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b > -\tilde{I}(\tilde{\gamma}_1)$. Тогда существует последовательность t_n такая, что $t_n \to \infty$ и $\psi_{t_n}^{-1} \ln \beta_{t_n} \to -b$ при $n \to \infty$, где $b < \tilde{I}(\tilde{\gamma}_1)$. Применяя теперь утверждение 1, получаем $\psi_{t_n}^{-1} \ln \alpha_{t_n} \to$ $\to -\tilde{a}(b) < 0$ при $n \to \infty$, и, значит, приходим к противоречию. Следовательно, импликация (12) доказана. Импликация (13) доказывается аналогично. Значит, утверждение 3 доказано.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Замечание 2. Импликация $\Rightarrow$ в (9) ранее сформулирована в работе [6] без детального доказательства. Для независимых одинаково распределенных наблюдений $\xi^t = (\xi_1, \ldots, \xi_t)$ эта импликация доказана ранее в работе Бирже [4]. Ниже приведен пример, в котором $I(\gamma_+ -) < \infty$, и указан способ построения критерия Неймана – Пирсона, для которого $\psi_t^{-1} \ln \alpha_t \to -a$ при $a \in [I(\gamma_+ -), \infty]$.

5. Примеры. 1. Пусть $\xi^t = (\xi_1, \ldots, \xi_t)$, $t = 1, 2, \ldots$, где ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — независимые одинаково распределенные величины. Предположим, что случайная величина Λ_1 невырождена относительно меры P^1, а функция $\ln H_1(\varepsilon)$ конечна при всех $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, где интервал $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ содержит точку 0. Тогда выполняется условие H с $\psi_t = t$ и $c(\varepsilon) = \ln H_1(\varepsilon)$. При этом из конечности $c(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ вытекает дифференцируемость (и даже аналитичность) $c(\varepsilon)$, а из невырожденности распределения Λ_1 вытекает ее строгая выпуклость [3]. Если, кроме того, $1 \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, то выполняется и условие H^*. При этих условиях справедливы теоремы 1 и 2, причем

$$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{I}(\tilde{\gamma}_1) = E\Lambda_1 = I(P^1 // \tilde{P}^1), \quad \gamma_1 = I(\gamma_1) = \tilde{E}\Lambda_1 = I(P^1 // \tilde{P}^1)$$

— относительные энтропии для мер P^1 и $\tilde{P}^1$ [7]. При этом из теоремы 2 получаем известный результат Бирже [4].

2. Пусть $\xi^t = (\xi_{t1}, \ldots, \xi_{tt})$, $t = 1, 2, \ldots$, где $\xi_{t1}, \ldots, \xi_{tt}$ — независимые гауссовские величины при гипотезах H^t и $\tilde{H}^t$, причем ξ_{ti} имеет при гипотезе H^t (соответственно $\tilde{H}^t$) нормальное распределение $\mathcal{N}(a_{ti}, \sigma_{ti}^2)$ (соответственно $\mathcal{N}(\tilde{a}_{ti}, \tilde{\sigma}_{ti}^2)$). Нетрудно показать, что $0 < H_t(\varepsilon) < \infty$ при $\varepsilon \in (\varepsilon_t^-, \varepsilon_t^+)$, где

$$\varepsilon_t^- = -\min_{1\le i\le t} \left\{ \left(\frac{\sigma_{ti}}{\tilde{\sigma}_{ti}} \vee 1 \right)^2 - 1 \right\}^{-1},$$

$$\varepsilon_t^+ = \min_{1\le i\le t} \left\{ 1 - \left(\frac{\sigma_{ti}}{\tilde{\sigma}_{ti}} \wedge 1 \right)^2 \right\}^{-1},$$

причем

$$H_t(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{t}\left(\frac{\sigma_{ti}}{\tilde{\sigma}_{ti}}\right)^{\varepsilon}\left\{\varepsilon\left(\frac{\sigma_{ti}}{\tilde{\sigma}_{ti}}\right)^2+1-\varepsilon\right\}^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(a_{ti}-\tilde{a}_{ti})^2}{\varepsilon\sigma_{ti}^2+(1-\varepsilon)\tilde{\sigma}_{ti}^2}\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\right\}.$$

Если $a_{ti}=a$, $\tilde{a}_{ti}=\tilde{a}$, $\tilde{\sigma}_{ti}=\tilde{\sigma}$ и $\sigma_{ti}=\sigma$ для всех $i=1,2,\ldots,t$ и $t = 1,2,\ldots$, то мы попадаем в условия примера 1 и, очевидно, в этом случае выполняется условие H^* с $\psi_t=t$,

$$\varepsilon_- = \left\{\left(\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}\vee 1\right)^2-1\right\}^{-1}, \quad \varepsilon_+ = \left\{1-\left(\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}\wedge 1\right)^2\right\}^{-1},$$

$$c(\varepsilon) = \varepsilon\ln\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}} - 2^{-1}\ln\left(\varepsilon\left(\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}\right)^2+1-\varepsilon\right)-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\frac{(a-\tilde{a})^2}{\varepsilon\sigma^2+(1-\varepsilon)\tilde{\sigma}^2}.$$

Если $\tilde{\sigma}_{ti}=\sigma_{ti}$ для всех $i=1,2,\ldots,t$ и $t=1,2,\ldots$, то

$$H_t(\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\tilde{a}_{ti}-a_{ti}}{\sigma_{ti}}\right)^2\right\}.$$

Предполагая, что $\psi_t=\sum_{i=1}^{t}((\tilde{a}_{ti}-a_{ti})/\sigma_{ti})^2\to\infty$ при $t\to\infty$, получаем, что условие H^* выполняется с $\varepsilon_-=-\infty$, $\varepsilon_+=\infty$ и $c(\varepsilon)=-2^{-1}\varepsilon(1-\varepsilon)$. В данном случае $\gamma_-=-\infty$, $\gamma_0=-2^{-1}$, $\gamma_1=2^{-1}$, $\gamma_+=+\infty$ и $I(\gamma)=2^{-1}(\gamma+2^{-1})^2$. Решая уравнение $I(\gamma)=a$ в области $\gamma\in(\gamma_0,\gamma_1)=(-2^{-1},2^{-1})$, для любого $a\in(0,2^{-1})$ получаем $\gamma(a)=-2^{-1}+\sqrt{2a}$. Следовательно, $b(a)=(\sqrt{2a}-1)^2/2$.

Пусть теперь $\tilde{a}_{ti}=a_{ti}$ при всех $i=1,2,\ldots,t$ и $t=1,2,\ldots$. Тогда

$$H_t(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{t}\left(\frac{\sigma_{ti}}{\tilde{\sigma}_{ti}}\right)^{\varepsilon}\left\{\varepsilon\left(\frac{\sigma_{ti}}{\tilde{\sigma}_{ti}}\right)^2+1-\varepsilon\right\}^{-1/2}.$$

Будем считать, что $\sigma_{ti}/\tilde{\sigma}_{ti}=\kappa_t$ при всех $i=1,2,\ldots,t$ и $\kappa_t\to\kappa$ при $t\to\infty$. Тогда, полагая $\kappa\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, получаем, что условие H^* выполняется с $\psi_t=t$, $\varepsilon_-=-((\kappa\vee 1)^2-1)^{-1}$, $\varepsilon_+=(1-(\kappa\wedge 1)^2)^{-1}$ и $c(\varepsilon)=2^{-1}(\varepsilon\ln\kappa^2 - \ln(\varepsilon(\kappa^2-1)+1))$. В данном случае $\gamma_-=\ln\kappa$ при $\kappa\in(0,1)$ и $\gamma_-=-\infty$ при $\kappa\in(1,\infty)$, а $\gamma_+=+\infty$ при $\kappa\in(0,1)$ и $\gamma_+=\ln\kappa$ при $\kappa\in(1,\infty)$, $\gamma_0 = 2^{-1}(\kappa^2-1-\ln\kappa^2)$, $\gamma_1=2^{-1}(\kappa^{-2}-1-\ln\kappa^{-2})$. Кроме того, легко показать, что $I(\gamma)=2^{-1}(z(\gamma)-1-\ln z(\gamma))$, где $z(\gamma)=(\ln\kappa^2-2\gamma)/(\kappa^2-1)$.

Пусть сначала $0<\kappa<1$. Тогда $\gamma>\gamma_0$ тогда и только тогда, когда $z(\gamma)>1$. Обозначим через z_a решение уравнения $z-1-\ln z=2a$ в области $z>1$ при $a\in(0,I(\gamma_1))$. Тогда $\gamma(a)=\ln\kappa+2^{-1}z_a(1-\kappa^2)$, и, значит, $b(a)=a-\ln\kappa - 2^{-1}z_a(1-\kappa^2)$.

Пусть теперь $1<\kappa<\infty$. Тогда $\gamma>\gamma_0$ тогда и только тогда, когда $0 < z(\gamma)<1$. Обозначим через $\tilde{z}_a$ решение уравнения $z-1-\ln z=2a$ в области $0<z<1$ при $a\in(0,I(\gamma_1))$. Тогда $\gamma(a)=\ln\kappa-2^{-1}\tilde{z}_a(\kappa^2-1)$ и, значит, $b(a)=a-\ln\kappa-2^{-1}\tilde{z}_a(1-\kappa^2)$.

Пусть теперь $\kappa=1$. Предполагая, что $t(\kappa_t-1)^2\to\infty$ при $t\to\infty$, получаем, что условие H^* выполняется с $\psi_t=t(\kappa_t-1)^2$, $\varepsilon_-=-\infty$, $\varepsilon_+=+\infty$, $c(\varepsilon) = -\varepsilon(1-\varepsilon)$. В данном случае $\gamma_-=-\infty$, $\gamma_0=-1$, $\gamma_1=1$, $\gamma_+=+\infty$ и $I(\gamma)=(1+$

$+\gamma)^2/4$. Следовательно, $\gamma(a)=2\sqrt{a}-1$ и значит, $b(a)=(1-\sqrt{a})^2$ при $a\in$ $\in(0,1)$.

3. Пусть $\xi^t=(\xi_1,\dots,\xi_t)$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные величины, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями p и q, если верна гипотеза H^t, и с вероятностями $\tilde p$ и $\tilde q$, если верна гипотеза $\tilde H^t$, причем $\tilde p\neq p$. Тогда выполняется условие H^* с $\psi_t=t$, $\varepsilon_-=-\infty$, $\varepsilon_+=\infty$ и

$$c(\varepsilon)=\varepsilon\ln(\tilde q q^{-1})+\ln[q+(\tilde p q)^{\varepsilon}(p\tilde q)^{-\varepsilon}p].$$

В этом случае

$$\gamma_0=-p\ln(p\tilde p^{-1})-q\ln(q\tilde q^{-1})=-I(p//\tilde p),$$

$$\gamma_1=\tilde p\ln(\tilde p p^{-1})+\tilde q\ln(\tilde q q^{-1})=+I(\tilde p//p),$$

где $I(p//\tilde p)$ (соответственно $I(\tilde p//p)$) — относительная энтропия распределения (p,q) относительно распределения $(\tilde p,\tilde q)$ (соответственно $(\tilde p,\tilde q)$ относительно (p,q)). Кроме того,

$$\gamma_-=\begin{cases}\ln(\tilde q q^{-1}), & p<\tilde p;\\ \ln(\tilde p p^{-1}), & p>\tilde p,\end{cases}\qquad \gamma_+=\begin{cases}\ln(\tilde p p^{-1}), & p<\tilde p;\\ \ln(\tilde q q^{-1}), & p>\tilde p.\end{cases}$$

Случайная величина Λ_t принимает значения $t\ln(\tilde q q^{-1})+k\ln[\tilde p q(p\tilde q)^{-1}]$ с вероятностями $C_t^k p^k q^{t-k}$, $k=0,1,\dots,t$, при гипотезе H^t, так что максимальное значение Λ_t есть $t\gamma_+$. Отсюда следует, что минимальное значение уровня α_t критерия Неймана – Пирсона есть $\alpha_t=\varepsilon_t P^t(\Lambda_t=t\gamma_+)$, равное $\varepsilon_t p^t$ при $p>\tilde p$ и $\varepsilon_t q^t$ при $p>\tilde p$. Так как в данном случае

$$I(\gamma_+-)=\begin{cases}\ln p^{-1}, & p<\tilde p;\\ \ln q^{-1}, & p>\tilde p,\end{cases}$$

то $t^{-1}\ln P^t(\Lambda_t=t\gamma_+)=-I(\gamma_+-)$. Следовательно, при условии существования предела $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\ln\varepsilon_t=\varepsilon\in[-\infty,0]$ получаем

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\ln\alpha_t=-[I(\gamma_+-)+\varepsilon]=-a,$$

где $a\in[I(\gamma_+-),\infty]$. Таким образом, скорость убывания α_t с показателем экспоненты $a\in[I(\gamma_+-),\infty]$ может быть обеспечена в условиях данного примера за счет подбора скорости убывания ε_t.

1. *Bahadur R. R.* Some limit theorems in statistics. – Philadelfia: SIAM, 1971. – 42 p.
2. *Chernoff H.* Large sample theory: parametric case // Ann. Math. Statist. – 1956. – **27**, № 1. – P. 1 – 22.
3. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. – Новосибирск: Наука, 1992. – 222 с.
4. *Birge L.* Vitesses maximales de decroissance des erreurs et test optimaux associes // Z. Warscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1981. – **55**, № 2. – P. 261 – 273.
5. *Арутюнян Е. А.* Скорость как функция надежности при оптимальной передаче информации: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1991. – 29 с.
6. *Линьков Ю. Н.* Большие уклонения в задаче различения считающих процессов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1514 – 1521.
7. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
8. *Ellis R. S.* Entropy, large deviations and statistical mechanics. – Berlin: Springer, 1985. – 364 p.
9. *Cox J. T., Griffeath D.* Large deviation for Poisson systems of independent random walks // Z. Warscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1984. – **6**, № 4. – P. 543 – 558.
10. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471 с.

Получено 21.03.94