УДК 519.21

Ю. В. Коломиец, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider the weak convergence of measures corresponding to solutions of liner evolution equations which depend on diffusion processes to a Gaussian measure as a small parameter approaches to zero.

Розглядається слабка збіжність мір, породжених розв'язками лінійних еволюційних рівнянь, що залежать від дифузійних процесів, до гауссової міри при прямуванні малого параметра до нуля.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} u_t^\varepsilon(x) + \varepsilon A u_t^\varepsilon(x) + B\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_t^\varepsilon\right) u_t^\varepsilon(x) = 0,$$
$$t \geq 0, \quad x \in D \subset R^n; \quad u_t^\varepsilon(x)|_{\partial D} = 0, \quad u_t^\varepsilon(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, A и $B(t, z)$ — операторы в частных производных второго и первого порядков соответственно по пространственной переменной $x \in D$ — ограниченной области в R^n с регулярной границей ∂D. $z_t^\varepsilon = z_{t\varepsilon^{-1}}$ — диффузионные процессы со значениями в R^d, возмущающие коэффициенты оператора $B(t, z)$.

В предположении о выполнении условия баланса будем изучать слабую сходимость при $\varepsilon \to 0$ в смысле распределений процессов $\varepsilon^{-1/2}(u_t^\varepsilon(x) - f(x))$, используя мартингальную характеризацию предельного распределения. В соответствии с идеями, которые изложены в [1] для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, мы ожидаем, что предельное распределение будет гауссовским. Проверим эту гипотезу и охарактеризуем предельное распределение.

Отметим, что слабая сходимость процессов $u^\varepsilon_{t\varepsilon^{-1}}(x)$ при выполнении условия баланса для различных случайных возмущений рассматривалась в [2 – 6]. Доказывалась слабая сходимость решений исходного возмущенного уравнения к решению проблемы мартингалов, соответствующей стохастическому дифференциальному уравнению в частных производных.

1. Обозначения и предположения. Мы пользуемся соглашением о суммировании по повторяющимся индексам в одночленах; буквой C будем обозначать постоянные, не зависящие от ε. Символ „$\Rightarrow$" используется для указания слабой сходимости мер, $C^{k,m}_{z,x,b}$ — класс функций $f(z, x)$, k раз непрерывно дифференцируемых по z и m раз — по x, буква b в обозначении этого класса указывает на ограниченность этих функций вместе с отмеченными производными.

Пусть диффузионный процесс z_t, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\overline{\Omega}, \overline{F}, P)$ со значениями в R^d, задается инфинитезимальным оператором

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + b_i(t, z) \frac{\partial}{\partial z_i},$$

относительно коэффициентов которого предположим:

α1) функции $a_{ij}(t,z)$, $b_i(t,z)$ определены на $R_+ \times R^d$, принадлежат классу $C^{1,2}_{t,z}$ и являются периодическими по t и z с периодом 1;

α2) существует $\delta > 0$: $\forall \xi \in R^d$ $a_{ij}(t,z)\xi_i\xi_j \geq \delta |\xi|^2$.

Далее, предположим, что операторы A и $B(t,z)$ в (1) имеют вид

$$A = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{a}_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\right) + \overline{a}_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{a}_0(x),$$

$$B(t,z) = \overline{b}_i(t,z)\frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{b}_0(t,z),$$

$$i,j = 1, \ldots, n, \quad z \in R^d, \quad t \in R_+, \quad x \in D.$$

Сделаем предположения о коэффициентах этих операторов:

β1) функции $\overline{b}_i(t,z,x) \in C^{1,2,2}_{t,z,x,b}$, $\overline{b}_0(t,z,x) \in C^{1,2,1}_{t,z,x,b}$ и периодичны по t и z с периодом 1, $\overline{a}_{ij}(x) \in C^1_{x,b}$, $\overline{a}_i(x)$, $\overline{a}_0(x) \in C^0_{x,b}$;

β2) существует $\gamma > 0$: $\forall \eta \in D$ $\overline{a}_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \gamma|\eta|^2$.

Введем пространства

$$H^m_0(D) := \left\{ u \in L^2(D): \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}} \in L^2(D), \quad \forall\, p: |p| \leq m,\ u\Big|_{\partial D} = 0 \right\},$$
$$m = 1, \ldots, 4.$$

Пространство, двойственное $H^1_0(D)$, обозначим через $H^{-1}(D)$. Тогда

$$A \in \mathfrak{L}(H^1_0(D), H^{-1}(D)), \quad B \in R^\infty(R_+ \times R^d;\ \mathfrak{L}(H^1_0(D), L^2(D)))$$

и выполнено условие коэрцитивности: существуют постоянные $\overline{\lambda}$, $\overline{\gamma} > 0$ такие, что для каждого $u \in H^1_0(D)$,

$$\langle Au, u\rangle + \overline{\lambda}\,|u|^2 \geq \overline{\gamma}\|u\|^2, \tag{2}$$

где $|\cdot|$ — норма в $L^2(D)$, $\|\cdot\|$ — норма в $H^1_0(D)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — отношение двойственности между $H^1_0(D)$ и $H^{-1}(D)$. Через $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $L^2(D)$.

β3) функция $f(x) \in H^2_0(D)$.

Как следует из [7, с. 106], уравнение (1) имеет единственное $H^1_0(D)$-решение и существует его $L^2(D)$-непрерывная модификация.

Обозначим через L^* оператор, формально сопряженный к L, и через Z — единичный тор в R^d.

Известно [8], что уравнение

$$L^* p(t,z) = 0,$$
$$\int_0^1\int_Z p(t,z)\,dt\,dz = 1,$$

имеет единственное положительное периодическое по t и z с периодом 1 решение из класса $C^{1,2}_{t,z}$.

Потребуем выполнения условия баланса

$$\alpha\beta)\quad \int_0^1\int_Z \overline{b}_i(t,z,x)\,p(t,z)\,dt\,dz = 1 \quad \forall x \in D, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

2. Слабая компактность мер. Запишем уравнение для процесса

$$\eta_t^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/2}(u_t^\varepsilon(x) - f(x)) \quad \forall\, \varepsilon > 0,$$

$$\frac{d}{dt}\eta_t^\varepsilon + \varepsilon A\eta_t^\varepsilon + B\left(\frac{t}{\varepsilon},\ z_t^\varepsilon\right)\eta_t^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}Af + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}B\left(\frac{t}{\varepsilon},\ z_t^\varepsilon\right)f = 0,$$

$$\eta_0^\varepsilon = 0.$$

Зафиксируем $T > 0$ и введем пространство

$$\Omega = C([0, T];\ \overline{L^2(D)})$$

с топологией равномерной сходимости (здесь $\overline{L^2(D)}$ — пространство $L^2(D)$ со слабой топологией). Пусть $\mathfrak{F}$ — борелевская σ-алгебра на Ω. Для всех $\varepsilon > 0$ через μ^ε будем обозначать вероятностную меру на $(\Omega, \mathfrak{F})$, порождаемую $\{\eta_t^\varepsilon, t \in [0, T]\}$.

Покажем, что семейство мер $\{\mu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ слабо компактно и любая его предельная мера μ^0 при $\varepsilon \to 0$ является решением проблемы мартингалов, соответствующей гауссовскому процессу в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим уравнения, в которые переменная x входит в качестве параметра

$$L\psi_i(s, z, x) = \overline{b}_i(s, z, x), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\int_0^1\int_Z \psi_i(s, z, x)\,ds\,dz = 0 \qquad \forall\, x \in D. \tag{3}$$

Существование единственного периодического с периодом 1 решения уравнения (3) для произвольного i следует из условий $\alpha 1, \alpha 2, \alpha\beta$ [8].

Определим оператор

$$\Psi(t, z) = \Psi_i(t, z, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \Psi_0(t, z, x). \tag{4}$$

Лемма 1. *Существует $C > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$*

$$M\sup_{0\le t\le T}|\eta_t^\varepsilon|^2 \le C, \quad \varepsilon M\int_0^T \|\eta_t^\varepsilon\|^2 dt \le C.$$

Доказательство. Рассмотрим случай малых ε, поскольку для $\varepsilon \ge \varepsilon_0 > 0$ утверждение очевидно. Введем для $u \in L^2(D)$ функцию

$$F(t, z, f, u) = (\Psi(t, z)f, u).$$

Далее, применив формулу Ито, запишем приращение функции

$$|\eta_t^\varepsilon|^2 + \sqrt{\varepsilon}F\left(\frac{t}{\varepsilon},\ z_t^\varepsilon,\ f,\ \eta_t^\varepsilon\right)$$

и, воспользовавшись (3), (4), сократим члены порядка $\varepsilon^{-1/2}$:

$$|\eta_t^\varepsilon|^2 + 2\varepsilon\int_0^t \langle A\eta_r^\varepsilon, \eta_r^\varepsilon\rangle dr = -\int_0^t \left(\overline{B}\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)\eta_r^\varepsilon, \eta_r^\varepsilon\right)dr -$$

$$-\int_0^t\left(B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f, \Psi\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f\right)dr - \sqrt{\varepsilon}\left[\int_0^t \left\langle Af, \eta_r^\varepsilon\right\rangle dr + \right.$$

$$+\int_0^t \left(B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)\eta_r^\varepsilon, \Psi\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f\right)dr + F\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_t^\varepsilon, f, \eta_t^\varepsilon\right)\Bigg] - \varepsilon\int_0^t \left\langle Af, \Psi\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f\right\rangle dr -$$

$$-\varepsilon^{3/2}\int_0^t \left\langle A\eta_r^\varepsilon, \Psi\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f\right\rangle dr + \int_0^t \left(\nabla_z F\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f, \eta_r^\varepsilon\right)\sigma\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)dw_r, \qquad (5)$$

где $\sigma\sigma^* = a$, $\overline{B} = B + B^*$ — оператор нулевого порядка, w_r — d-мерный винеровский процесс. Далее, использовав свойство коэрцитивности (2), применив неравенство Дэвиса [9, с. 60] для локальных мартингалов и произведя стандартные оценки, из (5) для достаточно малых ε получим

$$\frac{1}{2}M|\eta_t^\varepsilon|^2 \le \frac{1}{2}M\sup_{r\le t}|\eta_r^\varepsilon|^2 + \overline{\gamma}\varepsilon M\int_0^t \|\eta_r^\varepsilon\|^2 dr \le C + CM\int_0^t |\eta_r^\varepsilon|^2 dr.$$

После применения леммы Гронуолла получаем утверждение леммы.

Для модуля непрерывности функции $(\eta_r^\varepsilon, \theta)$ для всех θ из плотного подмножества $L^2(D)$ легко получить соотношения, идентичные содержащимся в лемме 3 [3], используя (3), (4) и технику, применяемую в [10, 2] (в качестве функции x_t^ε из [2, с.396] берем

$$(\eta_r^\varepsilon, \theta) - \sqrt{\varepsilon}\left(f, \Psi^*\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_t^\varepsilon\right)\theta\right).$$

На основании этих рассуждений и оценки леммы 1 из критерия предкомпактности множества K из Ω [10, с.42]:

1) $\sup\limits_{\eta\in K}\ \sup\limits_{t\in[0,T]} |\eta_t| < \infty$;

2) для каждого θ из плотного подмножества $L^2(D)$ отображение $\{t \to (\eta_t, \theta),\ \eta \in K\}$ является равностепенно непрерывным

получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Семейство вероятностных мер* $\{\mu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ *на* $(\Omega, \mathcal{F})$ *является слабо компактным.*

3. Сходимость мер. Для $h \in H_0^1(D)$ определим оператор

$$R(h) \in \mathfrak{L}(L^2(D)), \quad \beta, \gamma \in L^2(D),$$

$$(R(h)\beta, \gamma) = -2\int_0^1\int_Z (B(r,z)h, \beta)(\Psi(r,z)h, \gamma)p(r,z)\,dr\,dz.$$

Используя (3), (4), легко показать аналогично [3, с. 78], что

$$(R(h)\beta, \gamma) = \int_0^1\int_Z a_{ij}(r,z)(\Psi^i(r,z)h, \beta)(\Psi^j(r,z)h, \gamma)p(r,z)\,dr\,dz,$$

где

$$\Psi^m(r,z) := \frac{\partial}{\partial z_m}\Psi_i(r,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z_m}\Psi_0(r,z,x).$$

Очевидно, что $R(h) = R^*(h)$ и $R(h) \ge 0$.

Для всех $\omega \in \Omega$ определим $\upsilon_t(\omega) = \omega(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть $\mathcal{F}_t = \sigma\{\upsilon_r,\ r \in [0, t]\}$, тогда $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Будем говорить, что мера Q является решением проблемы мартингалов ПМ (R), если 1) $v_0(\omega)=0$, Q п.в.; 2) для всех $\theta \in H_0^1(D)$ процесс (v_t, θ) является непрерывным $\{Q, \mathcal{F}_t\}$-мартингалом, квадратическая вариация которого имеет вид

$$\langle (v, \theta) \rangle_t = t(R(f)\theta, \theta).$$

Как показано в [2, с. 402], существует $K(h) \in \mathfrak{L}(L^2(D))$ такой, что отображение $h \to K(h)$ линейно и $R(h) = K(h) \circ K^*(h)$. Далее аналогично [3, с. 78] введем оператор $N(h) = K(h)S^{-1/2}$, где S — ядерный, симметричный, неотрицательный оператор на $L^2(D)$ и $0 < \operatorname{Sp} S < \infty$. Таким образом, процесс v_t имеет вид

$$v_t = N(f)W_t.$$

Здесь W_t — винеровский процесс на некотором вероятностном пространстве со значениями в $L^2(D)$, с ковариационным оператором S [7, с. 87]. Таким образом, решение ПМ (R) является слабо единственным.

Теорема 2. *При* $\varepsilon \to 0$ *меры* $\mu^\varepsilon \Rightarrow Q$ *— единственному решению ПМ* (R).

Доказательство. Учитывая теорему 1 и предыдущие рассуждения, покажем, что пределом любой слабо сходящейся подпоследовательности мер $\{\mu^{\varepsilon_k}, \varepsilon_k > 0\}$ является мера Q, $\varepsilon_k \to 0$.

Пусть $\theta \in H_0^4(D)$, $\varphi(x) = x$ или $\varphi(x) = x^2$. Согласно [10, с. 19] достаточно показать, что

$$\varphi((v_t, \theta)) - \frac{1}{2}(R(f)\theta, \theta)\int_0^t \varphi''((v_r, \theta))\,dr$$

является $\{Q, \mathcal{F}_t\}$-локальным мартингалом. С помощью оператора $\Psi(r, z)$ определим функцию

$$G(t, z, f, \eta) = (\Psi(t, z)f, \eta)\varphi'((\eta, \theta)),$$

которая удовлетворяет уравнению

$$LG(t, z, f, \eta) = (B(t, z)f, \eta)\varphi'((\eta, \theta)),$$

$$\int_0^1\int_Z G(r, z, f, \eta)\,dr\,dz = 0. \tag{6}$$

Пусть $U_s: \Omega \to R$ — ограниченный $\mathcal{F}_s$-согласованный функционал. Тогда, взяв условное математическое ожидание от приращения функции

$$\varphi((\eta_t^\varepsilon, \theta)) + \sqrt{\varepsilon}\, G\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_t^\varepsilon, f, \eta_t^\varepsilon\right), \quad s < t,$$

и сократив члены порядка $\varepsilon^{-1/2}$ (используя (6)), получим

$$M\left\{U_s(\eta^\varepsilon)\left[\varphi((\eta_t^\varepsilon, \theta)) - \varphi((\eta_s^\varepsilon, \theta)) + \int_s^t \left(B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)\eta_r^\varepsilon, \theta\right)\varphi'((\eta_r^\varepsilon, \theta))\,dr + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_s^t \left(B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f, \theta\right)\left(\Psi\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right)f, \theta\right)\varphi''((\eta_r^\varepsilon, \theta))\,dr\right]\right\} =$$

$$= -M\left\{U_s(\eta^\varepsilon)\left[\int_s^t\left\langle\varepsilon^{3/2}A\eta_r^\varepsilon+\varepsilon Af+\sqrt{\varepsilon}\,B\left(\frac{r}{\varepsilon},z_r^\varepsilon\right)\eta_t^\varepsilon,\theta\right\rangle\left(\Psi\left(\frac{r}{\varepsilon},z_r^\varepsilon\right)f,\theta\right)\times\right.\right.$$

$$\times\ \varphi''((\eta_s^\varepsilon,\theta))dr+\int_s^t\left\langle\varepsilon A\eta_r^\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}Af,\theta\right\rangle\varphi'((\eta_r^\varepsilon,\theta))dr+$$

$$\left.\left.+\sqrt{\varepsilon}\left[G\left(\frac{t}{\varepsilon},z_t^\varepsilon,f,\eta_t^\varepsilon\right)-G\left(\frac{s}{\varepsilon},z_s^\varepsilon,f,\eta_s^\varepsilon\right)\right]\right]\right\}. \tag{7}$$

Определим теперь функции $g_{ij}(t,z,x,y)$, $i,j=0,1,\dots,n$, $x,y\in D$, как единственные периодические с периодом 1 решения соответствующих уравнений, $i,j=0,1,\dots,n$ (x,y входят в качестве параметров)

$$Lg_{ij}(t,z,x,y)=\psi_i(t,z,x)\overline{b}_j(t,z,y)-\int_0^1\int_Z\psi_i(r,z,x)\overline{b}_j(r,z,y)p(r,z)\,dr\,dz,$$

$$\int_0^1\int_Z g_{ij}(r,z,f,y)\,dr\,dz=0\quad\forall\,x,y\in D.$$

Введем обозначения $f_i(x)=\partial f(x)/\partial x_i$, $f_0(x)=f(x)$. Теперь определим функцию

$$H(t,z,\eta)=(\Psi(t,z)\eta,\theta)\varphi'((\eta,\theta))+$$

$$+\int_D\int_D\sum_{i,j=0}^n g_{ij}(t,z,x,y)f_i(x)f_j(y)\theta(x)\theta(y)\,dx\,dy\,\varphi''((\eta,\theta)),$$

удовлетворяющую соотношению

$$LH(t,z,\eta)=\mathcal{M}(t,z,\eta), \tag{8}$$

где

$$\mathcal{M}(t,z,\eta)=(B(t,z)\eta,\theta)\varphi'((\eta,\theta))+(B(t,z)f,\theta)(\Psi(t,z)f,\theta)\varphi''((\eta,\theta))-$$

$$-\int_0^1\int_Z(B(t,z)f,\theta)(\Psi(t,z)f,\theta)p(r,z)\,dr\,dz\,\varphi''((\eta,\theta)).$$

Запишем приращение функции $\varepsilon H(t/\varepsilon,\ z_t^\varepsilon,\ \eta_t^\varepsilon)$ при $s<t$, воспользовавшись соотношением (8). Взяв условное математическое ожидание, получим

$$M\left\{U_s(\eta^\varepsilon)\left[\int_s^t\left(B\left(\frac{r}{\varepsilon},z_r^\varepsilon\right)\eta_r^\varepsilon,\theta\right)\varphi'((\eta_r^\varepsilon,\theta))dr+\right.\right.$$

$$+\int_s^t\left(B\left(\frac{r}{\varepsilon},z_r^\varepsilon\right)f,\theta\right)\left(\Psi\left(\frac{r}{\varepsilon},z_r^\varepsilon\right)f,\theta\right)\varphi''((\eta_r^\varepsilon,\theta))dr-$$

$$\left.\left.-\int_s^t\int_0^1\int_Z(B(r,z)f,\theta)(\Psi(r,z)f,\theta)p(r,z)\,dr\,dz\,\varphi''((\eta_r^\varepsilon,\theta))dr\right]\right\}=$$

$$=M\left\{U_s(\eta^\varepsilon)\left[\varepsilon\left(H\left(\frac{t}{\varepsilon},\ z_t^\varepsilon,\ \eta_t^\varepsilon\right)-H\left(\frac{s}{\varepsilon},\ z_s^\varepsilon,\ \eta_s^\varepsilon\right)+\right.\right.\right.$$

$$+\int_s^t\left(B\left(\frac{r}{\varepsilon},z_r^\varepsilon\right)\eta_r^\varepsilon,H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon},\ z_r^\varepsilon,\ \eta_r^\varepsilon\right)\right)dr\right)+\varepsilon^2\int_s^t\left\langle A\eta_r^\varepsilon,H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon},z_r^\varepsilon,\ \eta_r^\varepsilon\right)\right\rangle dr+$$

$$+ \ \varepsilon^{3/2} \int_s^t \left\langle Af, H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon, \ \eta_r^\varepsilon\right) \right\rangle dr \ + \ \sqrt{\varepsilon} \int_s^t \left(B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right) f, H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}, \ z_r^\varepsilon, \ \eta_r^\varepsilon\right)\right) dr \Bigg] \Bigg\}. \quad (9)$$

Теперь вычтем из соотношения (7) соотношение (9). В результате будем иметь

$$M^\varepsilon \Bigg\{ U_s(v) \Bigg[\varphi((v_t, \theta)) - \varphi((v_s, \theta)) +$$

$$+ \int_s^t \int_0^1 \int_Z (B(r, z) f, \theta)(\Psi(r, z) f, \theta) p(r, z)\, dr\, dz\, \varphi''((v_r, \theta)) dr \Bigg] \Bigg\} =$$

$$= -M \Bigg\{ U_s(\eta^\varepsilon) \Bigg[\int_s^t \left\langle \varepsilon^{3/2} A \eta_r^\varepsilon + \varepsilon A f + \sqrt{\varepsilon}\, B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right) \eta_r^\varepsilon, \theta \right\rangle \varphi''((\eta_r^\varepsilon, \theta)) dr +$$

$$+ \int_s^t \left\langle \varepsilon A \eta_r^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} A f, \theta \right\rangle \varphi'((\eta_r^\varepsilon, \theta)) dr + \sqrt{\varepsilon} \left[G\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_t^\varepsilon, f, \eta_t^\varepsilon\right) - G\left(\frac{s}{\varepsilon}, z_s^\varepsilon, f, \eta_s^\varepsilon\right) \right] +$$

$$+ \ \varepsilon \left[H\left(\frac{t}{\varepsilon}, \ z_t^\varepsilon, \ \eta_t^\varepsilon\right) - H\left(\frac{s}{\varepsilon}, \ z_s^\varepsilon, \ \eta_s^\varepsilon\right) + \int_s^t \left(B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right) \eta_r^\varepsilon, H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}, \ z_r^\varepsilon, \ \eta_r^\varepsilon\right)\right) dr \right] +$$

$$+ \ \varepsilon^2 \int_s^t \left\langle A \eta_r^\varepsilon, H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon, \ \eta_r^\varepsilon\right) \right\rangle dr \ + \ \varepsilon^{3/2} \int_s^t \left\langle A f, H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon, \ \eta_r^\varepsilon\right) \right\rangle dr \ +$$

$$+ \ \sqrt{\varepsilon} \int_s^t \left(B\left(\frac{r}{\varepsilon}, z_r^\varepsilon\right) f, H'_\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}, \ z_r^\varepsilon, \ \eta_r^\varepsilon\right)\right) dr \Bigg] \Bigg\}, \quad (10)$$

где M^ε — математическое ожидание по мере μ^ε. Воспользовавшись оценками леммы 1, перейдем к пределу по любой слабо сходящейся подпоследовательности $\{\mu^{\varepsilon_k}\}$, $\varepsilon_k \to 0$. Правая часть соотношения (10) стремится к нулю. Из предельного соотношения следует, что предельная мера Q является решением ПМ (R).

1. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1987.– 328 с.
2. *Bouc R., Pardoux E.* Asymptotic analysis of P.D.E.s with wideband noise disturbances, and expansion of the moments // Stochast, Anal. and Appl. – 1984.– **2**, № 4.– P. 369 – 422.
3. *Коломиец Ю.В.* Усреднение эволюционных уравнений со случайными возмущениями // Теория случайн. процессов и ее прил. – Киев: Наук. думка, 1990.– С. 72 – 81.
4. *Watanabe H.* On the convergence of partial differential equations of parabolic type with rapidly oscillating coefficients to stochastic partial differential equations // Appl. Math. and Optim.– 1989.– 20.– P. 81 – 96.
5. *Коломиец Ю.В.* Об усреднении эволюционных уравнений, возмущенных случайными процессами со скачками // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 197 – 207.
6. *Коломиець Ю.В.* Усереднення для рівнянь з частинними похідними, коефіцієнти яких збурені стрибкуватими марковськими процесами // Там. же. – С. 1367 – 1375.
7. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях. – М.: ВИНИТИ, 1979. – С. 72 – 147. – (Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. / ВИНИТИ; Т.14).
8. *Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures.– Amsterdam etc.: North-Holland publ., 1978.– 700 p.
9. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.– 512 с.
10. *Viot M.* Solutionce et unicite de diffusions a valeurs dans un espase de Hilbert // Ann. Inst. H. Poincare.– 1974.– № 10.– 152 p.

Получено 21.03.94