УДК 519.21

А. В. Руденко (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ КОМПОНЕНТ МЕР В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУГРУППЫ ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА

We study the behavior of measures that are obtained under the effect of the Ornstain – Ulehnbeck semigroup T_t associated with the Gaussian measure μ upon an arbitrary probability measure ν in a separable Hilbert space as $t \to 0+$. We prove that densities of parts of $T_t\nu$ absolutely continuous with respect to μ converge in the measure μ to the density of a part of ν absolutely continuous with respect to μ. In the case where the space is finite-dimensional, we prove the convergence of these densities μ-absolutely everywhere. In the infinite-dimensional case, we present some sufficient conditions of the convergence almost everywhere. We also consider conditions on the absolute continuity of $T_t\nu$ with respect to μ in terms of coefficients of the expansion of $T_t\nu$ in a series in Hermite polynomials (an analog of the Ito – Wiener expansion) and relation with the finite absolute continuity.

Вивчається поведінка мір, які є результатом дії пігрупи Орнштейна – Уленбека T_t, що пов'язана з гауссовою мірою μ, на довільну ймовірнісну міру ν у сепарабельному гільбертовому просторі, при $t \to 0+$. Доведено, що щільності абсолютно неперервних частин $T_t\nu$ по відношенню до μ збігаються за мірою μ до щільності абсолютно неперервної частини ν по відношенню до μ. У випадку скінченної вимірності простору доведено збіжність цих щільностей μ-майже скрізь. У нескінченновимірному випадку наведено деякі достатні умови для збіжності майже скрізь. Також розглянуто умови на абсолютну неперервність $T_t\nu$ по відношенню до μ у термінах коефіцієнтів розкладу $T_t\nu$ в ряд за поліномами Ерміта (аналог розкладу Іто – Вінера) та зв'язок з фінітною абсолютною неперервністю.

1. Введение. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, μ — гауссова мера на $\mathfrak{B}(H)$ — σ-алгебре борелевых множеств в H, ν — некоторая вероятностная мера на $\mathfrak{B}(H)$. Статья посвящена аппроксимации плотности абсолютно непрерывной компоненты меры ν относительно μ с помощью полугруппы Орнштейна – Уленбека. Полугруппой Орнштейна – Уленбека в гильбертовом пространстве H, связанной с гауссовой мерой μ, называется полугруппа, действующая на ограниченные измеримые функции в H следующим образом [1]:

$$T_t f(x) = \int\limits_H f\left(e^{-t}x + \sqrt{(1-e^{-2t})}\, y\right)\mu(dy). \tag{1}$$

Действие T_t на меру ν будем записывать так:

$$T_t \nu(A) = \iint\limits_{H^2} \mathbf{1}_A\left(e^{-t}x + \sqrt{(1-e^{-2t})}\, y\right)\nu(dx)\mu(dy). \tag{2}$$

Целью статьи является получение достаточных условий на ν, гарантирующих, что плотность абсолютно непрерывной относительно μ компоненты $T_t\nu$ сходится к плотности абсолютно непрерывной относительно μ компоненты ν при $t \to 0+$.

Такой подход к исследованию абсолютно непрерывной компоненты мер обусловлен следующими обстоятельствами. Известно, что некоторые вероятностные меры можно отождествить с неотрицательными обобщенными функционалами от случайного элемента со значениями в H и распределением μ [1]. В этом случае в терминах разложения Ито – Винера действие полугруппы Орнштейна – Уленбека записывается совсем просто: коэффициенты разложения домножаются на e^{-tn} (см. п. 4). Такое разложение для финитно абсолютно

© А. В. РУДЕНКО, 2004

непрерывных мер построено в [2]. Таким образом, получающаяся схема похожа на классическое суммирование расходящихся рядов по Абелю. В дальнейшем, комбинируя использование разложения Ито – Винера, записи действия полугруппы на него и предельного перехода, можно в некоторых частных случаях получать абсолютно непрерывную компоненту мер относительно μ. Выбор полугруппы Орнштейна – Уленбека в качестве объекта исследования обусловлен ее относительно простой структурой и тем, что она достаточно хорошо изучена. Есть основания считать, что ее замена на другой набор операторов в некоторых случаях (при определенных условиях на эти операторы) сохранит многие факты, доказанные в статье. В частности, при доказательстве сходимости по мере структура T_t использовалась лишь для доказательства того, что $T_t\nu$ слабо сходится к ν и $T_t f$ сходится к f в $L_1(H,\mu)$ при $t \to 0+$.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $(H, (\cdot,\cdot))$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(H)$ — борелевы множества на H, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в нем. Возьмем $\{\xi_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное гауссово распределение $(N(0,1))$, и $\{\lambda_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел таких, что $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < +\infty$. Тогда распределение случайной величины $\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\,\xi_n e_n$ будет гауссовой мерой на H; обозначим ее μ. Пусть $\mathcal{L}_n =$ л. о. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — линейное подпространство H, построенное на n первых векторах базиса в H, $B(x,r)$ — замкнутый шар с центром в $x \in H$ и радиусом $r > 0$, $B_b(H)$ — множество ограниченных измеримых функций на H, $C_b(H)$ — множество непрерывных ограниченных функций на H, $\mathfrak{M}(H)$ — множество вероятностных мер на H. Для $x \in H$ обозначим $x_k = (x, e_k)$. Действие полугруппы Орнштейна – Уленбека $\{T_t\}_{t>0}$, связанной с мерой μ, на функции и меры на H определим согласно (1) и (2). Это определение становится естественным, если рассматривать абстрактное винерово пространство, построенное с помощью H и μ [1]. Запись $\nu \ll \mu$ означает, что мера ν абсолютно непрерывна относительно μ, а запись $\nu \perp \mu$ — что ν сингулярна μ. Если выполняется $\nu \ll \mu$, то обозначим через $\dfrac{d\nu}{d\mu}(x)$, $x \in H$, плотность ν относительно μ. Известно, что меру ν можно разложить на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты относительно μ [3]. Будем обозначать абсолютно непрерывную компоненту через $\nu^{a.c.}$, сужение меры $\nu \in \mathfrak{M}(H)$ на $\mathfrak{B}(\mathcal{L}_n)$ через ν_n. Если $\{\theta^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность мер на $\mathfrak{B}(H)$, слабо сходящаяся к мере θ, т. е.

$$\forall f \in C_b(H): \int f(x)\theta^n(dx) \to \int f(x)\theta(dx), \quad n \to +\infty,$$

то будем писать $\theta^n \Rightarrow \theta$, $n \to +\infty$.

3. Конечномерный случай. В этом пункте исследуются интересующие нас свойства мер в случае конечномерного пространства. Чтобы не менять обозначения, в качестве конечномерного пространства будем рассматривать $\mathcal{L}_n$. Обозначим полугруппу Орнштейна – Уленбека на $\mathcal{L}_n$ как ${}^nT_t$, чтобы отличать ее от полугруппы в H.

Теорема 1. *Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $\nu_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{L}_n)$*

$$\forall t > 0: {}^nT_t\nu_n \ll \mu_n,$$

$$\frac{d({}^nT_t\nu_n)}{d\mu_n} \to \frac{d\nu_n^{a.c.}}{d\mu_n} t \to 0+ \quad п. в. \quad \mu_n.$$

Доказательство. Введем

$$p_n(t,x,y) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(1-e^{-2t})}} \exp\left(-\frac{e^{-2t}(x_k^2+y_k^2)-2e^{-t}x_k y_k}{2\lambda_k(1-e^{-2t})}\right),$$
$$x \in H, \quad y \in H, \quad t > 0.$$

Действие полугруппы Орнштейна – Уленбека, связанной с μ_n, на меры в $\mathcal{L}_n$ можно представить в виде

$${}^nT_t\,\nu_n(A) = \int_A \left(\int_{\mathcal{L}_n} p_n(t,x,y)\nu_n(dx)\right)\mu_n(dy), \quad \nu \in \mathfrak{M}(H), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{L}_n).$$

Эту формулу легко получить, преобразовав интеграл в определении ${}^nT_t$. Из приведенного выражения непосредственно следует, что ${}^nT_t\,\nu_n \ll \mu_n$ и

$$\frac{d^nT_t\nu_n}{d\mu_n}(y) \le \int_{\mathcal{L}_n} p_n(t,x,y)\nu_n(dx), \quad y \in \mathcal{L}_n.$$

Докажем сходимость. Для простоты рассмотрим случай $\lambda_i = 1,\ i = 1,\ldots$ $\ldots, n$. Для произвольных λ_i теорема доказывается аналогично. В таком предположении можно записать

$$\frac{d({}^nT_t\nu_n)}{d\mu_n}(y) = \int_{\mathcal{L}_n} \frac{1}{(1-e^{-2t})^{n/2}} \exp\left(-\frac{e^{-t}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)-2e^{-2t}(x,y)}{2(1-e^{-2t})}\right)\nu_n(dx).$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* θ_1, θ_2 *— меры на* $(\mathcal{L}_n, \mathfrak{B}(\mathcal{L}_n))$ *с конечными значениями на ограниченных множествах и* $\operatorname{supp}\theta_2 = \mathcal{L}_n$. *Пусть* f *— неотрицательная дифференцируемая монотонно убывающая функция* ($f\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty]$, $\exists f'(x) \le 0$) *такая, что* $f(x) \to 0,\ x \to +\infty$. *Тогда*

$$\int_{\{y:\|x-y\|\le\delta\}} f(\|x-y\|)\theta_1(dy) \le \sup_{0<r\le\delta} \frac{\theta_1(B(x,r))}{\theta_2(B(x,r))} \int_{\{y:\|x-y\|\le\delta\}} f(\|x-y\|)\theta_2(dy).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{\|x-y\|\le\delta} f(\|x-y\|)\theta_1(dy) = -\int_{\|x-y\|\le\delta}\left(\int_{\|x-y\|}^{+\infty} f'(t)\,dt\right)\theta_1(dy) =$$

$$= -\int_0^{+\infty} f'(t)\theta_1(\|y-x\| \le \min(t,\delta))\,dt \le$$

$$\le -\sup_{0<r\le\delta}\frac{\theta_1(B(x,r))}{\theta_2(B(x,r))}\int_0^{+\infty} f'(t)\theta_2(\|y-x\| \le \min(t,\delta))\,dt =$$

$$= \sup_{0<r\le\delta}\frac{\theta_1(B(x,r))}{\theta_2(B(x,r))}\int_{\|x-y\|\le\delta} f(\|x-y\|)\theta_2(dy),$$

что и доказывает лемму.

Заметим, что

$$\forall\, t > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{L}_n \quad \forall\, y \in \mathcal{L}_n:$$

$$\|x - y\| \le \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n(t, x, y) \le \frac{1}{(1-e^{-2t})^{n/2}} \exp\left(\frac{\|x\|^2 + (\|x\|+\delta)^2}{4} - \frac{e^{-t}\|x-y\|^2}{2(1-e^{-2t})}\right),$$

$$\|x - y\| > \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n(t, x, y) \le \frac{1}{(1-e^{-2t})^{n/2}} \exp\left(\frac{\|x\|^2}{2} - \frac{\left(\max\left\{0,\ \delta e^{-t} - (1-e^{-t})\|x\|\right\}\right)^2}{2(1-e^{-2t})}\right).$$

Разложим ν_n на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты:

$$\nu_n = \nu_n^{a.c.} + \nu_n^{\perp}, \qquad \nu_n^{a.c.} << \mu_n, \qquad \nu_n^{\perp} \perp \mu_n.$$

Обозначим $g(x) = \dfrac{d\nu_n^{a.c.}}{d\mu_n}$. Приведенные выше неравенства в совокупности с леммой дают возможность вывести следующие оценки $\left(\text{в качестве функции } f \text{ из леммы берется } f(x) = \exp\left(-\dfrac{e^{-t}x^2}{2(1-e^{-2t})}\right)\right)$:

$$\forall\, t > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{L}_n:$$

$$\int\limits_{\|x-y\|\le\delta} p_n(t,x,y)\,|g(y) - g(x)|\,\mu_n(dy) \le$$

$$\le \frac{\exp\left(\dfrac{\|x\|^2 + (\|x\|+\delta)^2}{4}\right)}{e^{-td/2}} \sup_{r\le\delta} \frac{\int_{B(x,r)} |g(x) - g(y)|\,\mu_n(dy)}{\mu_n(B(x,r))},$$

$$\int\limits_{\|x-y\|\le\delta} p_n(t,x,y)\,\nu_n^{\perp}(dy) \le \exp\left(\frac{\|x\|^2 + (\|x\|+\delta)^2}{4}\right) e^{td/2} \sup_{r\le\delta} \frac{\nu_n(B(x,r))}{\mu_n(B(x,r))},$$

$$\int\limits_{\|x-y\|\ge\delta} p_n(t,x,y)\,\nu_n(dy) \le$$

$$\le \frac{1}{(1-e^{-2t})^{n/2}} \exp\left(\frac{\|x\|^2}{2} - \frac{\left(\max\left\{0,\ \delta e^{-t} - (1-e^{-t})\|x\|\right\}\right)^2}{2(1-e^{-2t})}\right).$$

Из этих оценок можно сделать вывод, что для тех x, для которых

$$\lim_{\delta\to 0+} \frac{1}{\mu_n(B(x,\delta))} \int\limits_{B(x,\delta)} |g(y) - g(x)|\,\mu_n(dy) = 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0+} \frac{\nu_n^{\perp}(B(x,\delta))}{\mu_n(B(x,\delta))} = 0,$$

получаем

$$\frac{d({}^nT_t\nu_n)}{d\mu_n}(x) \to \frac{d\nu_n^{a.c.}}{d\mu_n}(x) t \to 0+.$$

Но указанные выше свойства выполняются μ_n-почти всюду (см. [3]), а значит, теорема доказана.

4. Бесконечномерный случай. Абсолютная непрерывность. Приведем необходимое, а также достаточное условие для абсолютной непрерывности $T_t \nu$ относительно μ. Для этого введем дополнительные обозначения. Пусть $\{H_n(x),\ x \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ — многочлены Эрмита со старшим коэффициентом 1. Для $\nu \in \mathfrak{M}(H)$, имеющей все моменты, положим

$$\forall\, k, n_1, \ldots, n_k, l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}: \quad a_{n_1,\ldots,n_k}^{l_1,\ldots,l_k}(\nu) = \int\limits_H \prod_{i=1}^{k} H_{n_i}\left(x_{l_i} / \sqrt{\lambda_{l_i}}\right) \nu(dx).$$

Назовем меру ν финитно абсолютно непрерывной относительно μ: $\nu \ll_0 \mu$, если

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{\substack{k, n_1, \ldots, n_k, l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N} \\ l_1 < \ldots < l_k \\ \sum_{i=1}^{k} n_i = n}} \left(a_{n_1,\ldots,n_k}^{l_1,\ldots,l_k}(\nu)\right)^2 \prod_{i=1}^{k} n_i! < +\infty$$

(более общее определение см. в [2]). Для каждого $s \in \mathbb{R}$ введем

$$W_s = \left\{ \nu \in \mathfrak{M}(H): \forall m \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N}\ \exists \int\limits_H x_l^m \nu(dx); \right.$$

$$\left. A_s(\nu) = \sum_{\substack{k, n_1, \ldots, n_k, l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N} \\ l_1 < \ldots < l_k}} \left(a_{n_1,\ldots,n_k}^{l_1,\ldots,l_k}(\nu)\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^s \prod_{i=1}^{k} n_i! < +\infty \right\}.$$

Отметим следующий факт, который несложно проверить, используя определение $T_t \nu$:

$$\forall\, k, n_1, \ldots, n_k, l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}: \quad a_{n_1,\ldots,n_k}^{l_1,\ldots,l_k}(T_t \nu) = e^{-t\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)} a_{n_1,\ldots,n_k}^{l_1,\ldots,l_k}(\nu). \tag{3}$$

Таким образом, действие полугруппы Орнштейна – Уленбека можно представить как умножение коэффициентов разложения на константу (зависящую только от суммы степеней полиномов, соответствующих коэффициенту, и от t).

Теорема 2. 1. *Если* $T_t \nu \ll \mu$ *и* $\dfrac{d(T_t \nu)}{d\mu} \in L_2(H, \mu)$, *то* $\nu \ll_0 \mu$.

2. *Если существует* $s \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\nu \in W_s$, *то* $T_t \nu \ll \mu$ *и* $\dfrac{d(T_t \nu)}{d\mu} \in$ $\in L_2(H, \mu)$.

Доказательство. 1. Заметим, что если $T_t \nu \ll \mu$ и $\dfrac{d(T_t \nu)}{d\mu} \in L_2(H, \mu)$, то, как следствие определения, $T_t \nu \ll_0 \mu$. Достаточно доказать, что $T_t \nu \ll_0$ $\ll_0 \mu \Leftrightarrow \nu \ll_0 \mu$, что в свою очередь является следствием (3).

2. Заметим, что для любых $s \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ $\exp(-tn) > n^s$ лишь для конечного числа $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, используя определение W_s и выражение для $a_{n_1,\ldots,n_k}^{l_1,\ldots,l_k}(T_t \nu)$, получаем

$$\sum_{\substack{k,n_1,\ldots,n_k,l_1,\ldots,l_k\in\mathbb{N}\\ l_1<\ldots<l_k}} \left(a^{l_1,\ldots,l_k}_{n_1,\ldots,n_k}(T_t\nu)\right)^2 \prod_{i=1}^{k} n_i! < +\infty.$$

Следовательно, $T_t\nu \ll \mu$ и $\dfrac{dT_t\nu}{d\mu} \in L_2(H,\mu)$.

Теорема 2 доказана.

5. Сходимость плотностей по вероятности в бесконечномерном случае. В бесконечномерном случае в общей ситуации удается доказать сходимость по мере. Для этого необходима следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* λ, γ, $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — *вероятностные меры на* $\mathfrak{B}(H)$, $\gamma_n \Rightarrow \gamma$, $n \to +\infty$ *и* γ *сингулярна* λ. *Тогда*

$$\frac{d\gamma_n^{a.c.}}{d\lambda} \to 0, \quad n \to +\infty, \qquad \text{по мере } \lambda.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\forall\,\varepsilon\in(0,1)\ \exists f_\varepsilon\colon H\to[0,1]\colon\ f_\varepsilon\in C_b(H),$$

$$\int_H f_\varepsilon(x)\lambda(dx) > 1-\varepsilon, \qquad \int_H f_\varepsilon(x)\gamma(dx) < \varepsilon.$$

Согласно условию леммы γ сингулярна λ, а значит,

$$\exists A\in\mathfrak{B}(H)\colon\ \lambda(A)=1,\ \ \gamma(A)=0.$$

Поскольку любая мера $\nu\in\mathfrak{M}(H)$ является мерой Радона, т. е.

$$\nu(A) = \sup\{\nu(K)\colon K \text{ — компакт}\}, \qquad A\in\mathfrak{B}(H),$$

то

$\exists A_1$ — замкнутое, A_2 — открытое: $A_1\subset A\subset A_2$, $\lambda(A_1) > 1-\varepsilon$, $\gamma(A_2)<\varepsilon$.

Положим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{d(x, H\setminus A_2)}{(d(x,A_1)+d(x,H\setminus A_2))},$$

где $d(x,A) = \inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$. Тогда

$$f_\varepsilon(x)=1,\ \ x\in A_1;\qquad f_\varepsilon(x)=0,\ \ x\notin A_2;$$

$$f_\varepsilon(x)\in[0,1],\ \ x\in H;\qquad f_\varepsilon\in C_b(H).$$

Очевидно, эта функция удовлетворяет необходимым условиям. Предположим, что утверждение леммы не выполняется, тогда

$$\exists\,\delta>0\ \ \exists\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}\colon\ \ \lambda\left(\left\{x\in H\colon \frac{d(\gamma_{n_k}^{a.c.})}{d\lambda}(x)>\delta\right\}\right) > \delta.$$

При этих предположениях выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\int_H f_\varepsilon(x)\,\gamma_{n_k}(dx) \ge \int_H f_\varepsilon(x)\frac{d(\gamma_{n_k}^{a.c.})}{d\lambda}\lambda(dx) \ge$$

$$\ge \int_H f_\varepsilon(x)\delta\mathbf{1}_{\left\{x\in H\colon \frac{d(\gamma_{n_k}^{a.c.})}{d\lambda}(x)>\delta\right\}}\lambda(dx) \ge$$

$$\geq \delta\left(\int_H f_\varepsilon(x)\lambda(dx) + \int_H \mathbf{1}_{\left\{x\in H:\frac{d(\gamma_{n_k}^{a.c.})}{d\lambda}(x)>\delta\right\}}\lambda(dx) - 1\right) \geq \delta(\delta-\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ и учитывая слабую сходимость последовательности γ_n, получаем

$$\varepsilon \geq \int_H f_\varepsilon(x)\gamma(dx) \geq \delta(\delta-\varepsilon).$$

Поскольку число $\varepsilon \in (0, 1)$ можно выбрать произвольно, получаем противоречие.

Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Имеет место сходимость*

$$\frac{d(T_t\nu)^{a.c.}}{d\mu} \to \frac{d\nu^{a.c.}}{d\mu}, \quad t \to 0+, \quad \textit{по мере } \mu.$$

Доказательство. Разложим меру ν на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты относительно μ:

$$\nu = \nu^{a.c.} + \nu^{\perp}, \quad \nu^{a.c.} << \mu, \quad \nu^{\perp} \perp \mu.$$

Для сингулярной части применим лемму 2, использовав то, что $T_t\nu \Rightarrow \nu$, $t \to 0+$, а для абсолютно непрерывной верно следующее:

$$\frac{dT_t(\nu^{a.c.})}{d\mu} \to \frac{d\nu^{a.c.}}{d\mu}, \quad t \to 0+, \quad \text{в} \quad L_1(H,\mu).$$

В результате

$$\frac{dT_t(\nu^{a.c.})}{d\mu} \to \frac{d\nu^{a.c.}}{d\mu}, \quad t \to 0+, \quad \text{по мере } \mu,$$

$$\frac{d(T_t\nu^{\perp})^{a.c.}}{d\mu} \to 0, \quad t \to 0+, \quad \text{по мере } \mu.$$

Складывая эти соотношения, получаем необходимый результат.

Теорема 3 доказана.

Учитывая результаты предыдущего пункта, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Если существует $s \in \mathbb{R}$ такое, что $\nu \in W_s$, то $T_t\nu << \mu$ и*

$$\frac{dT_t\nu}{d\mu} \to \frac{d\nu^{a.c.}}{d\mu}, \quad t \to 0+, \quad \textit{по мере } \mu.$$

6. Сходимость плотностей почти везде. Рассмотрим частный случай, в котором можно привести достаточное условие для сходимости почти везде. Введем дополнительные обозначения:

$$\forall\, s,\, n \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{L}_{s,n} = \text{л.о.}\{e_{s+1},\ldots,e_n\},$$

$$p_{s,n}(t,x,y) = \frac{p_n(t,x,y)}{p_s(t,x,y)}, \quad x,\, y \in H,$$

$\mu_{s,n}$, $\nu_{s,n}$ — сужение мер μ, ν на $\mathfrak{B}(\mathcal{L}_{s,n})$. Пусть $\{l_k \in \mathbb{N}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $S_k = \sum_{i=1}^k l_i$,

$\{\alpha_k \in (0,1)\}_{k\in\mathbb{N}}$, θ_{S_{i-1},S_i} — вероятностные меры на $\mathfrak{B}(\mathcal{L}_{S_{i-1},S_i})$. Положим $\tilde{\nu}_{S_{k-1},S_k} = (1-\alpha_k)\mu_{S_{k-1},S_k} + \alpha_k\theta_{S_{k-1},S_k}$, $k\in\mathbb{N}$. Далее будем предполагать, что

$$\exists\,\nu \in \mathfrak{M}(H):\quad \nu_{S_k} = \mathop{\times}_{i=1}^{k} \tilde{\nu}_{S_{i-1},S_i}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Приведем достаточное условие для абсолютной непрерывности $T_t\nu$.

Утверждение 1. *Предположим, что для некоторого $t \geq 0$ выполняется следующее*:

$$\forall\, i \in \mathbb{N}:\quad T_t\theta_{S_{i-1},S_i} \in W_0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\Big(A_0(T_t\theta_{S_{i-1},S_i}) - 1\Big) < +\infty.$$

Тогда $T_t\nu \ll \mu$ *и* $\dfrac{dT_t\nu}{d\mu} \in L_2(H,\mu)$.

Замечание. W_0 — это меры, имеющие L_2-плотность относительно μ. При этом $A_0(\nu) = \int_H \left(\dfrac{d\nu}{d\mu}(x)\right)^2 \mu(dx)$ (очевидно, что для вероятностных мер $A_0 \geq$ ≥ 1).

Доказательство. Из определения A_0 следует

$$A_0(T_t\nu) = \prod_{i=1}^{\infty} A_0(T_t\tilde{\nu}_{S_{i-1},S_i}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty}\left((1-\alpha_k)^2 + 2\alpha_k(1-\alpha_k) + \alpha_k^2 A_0(T_t\theta_{S_{i-1},S_i})\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \alpha_k^2 + \alpha_k^2 A_0(T_t\theta_{S_{i-1},S_i})\right) < +\infty,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 4. *Пусть*:

1) $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i < +\infty$;

2) $\exists\, t_0 > 0$: $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i \sup_{t\in(0,t_0)}\int_H p_{S_{i-1},S_i}(t,x,y)\theta_{S_{i-1},S_i}(dy) < +\infty$ *п. в.* μ.

Тогда

$$\frac{d(T_t\nu)^{a.c.}}{d\mu} \to \frac{d\nu^{a.c.}}{d\mu}, \quad t \to 0+, \quad \mu\text{-почти всюду}.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\frac{d({}^{S_k}T_t\nu_{S_k})}{d\mu_{S_k}} \to \prod_{i=1}^{k}\frac{d\nu^{a.c.}_{S_{i-1},S_i}}{d\mu_{S_{i-1},S_i}},$$

$$t \to 0+, \text{ равномерно по } k, \ \mu\text{-почти всюду}.$$

Запишем выражение для $M_k^t = \dfrac{d({}^{S_k}T_t\nu_{S_k})}{d\mu_{S_k}}$:

$$M_k^t(x) = \prod_{i=1}^{k} \int_H p_{S_{i-1},S_i}(t,x,y)\nu_{S_{i-1},S_i}(dy) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\left(1-\alpha_i+\alpha_i\int_H p_{S_{i-1},S_i}(t,x,y)\theta_{S_{i-1},S_i}(dy)\right).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и докажем, что (этого будет достаточно)

$$\exists\, t_1 > 0\ \forall\, t \in (0,t_1)\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\quad \left|M_n^t(x) - M_n^0(x)\right| \le \varepsilon$$

(здесь и далее все выполняется μ-почти всюду по x). Из условий теоремы получаем

$$\forall\, t \in (0,t_0)\ \forall\, i \in \mathbb{N}:\quad c_i = 1-\alpha_i < \frac{M_i^t(x)}{M_{i-1}^t(x)} < C_i(x) =$$

$$= 1 + \alpha_i \sup_{t\in(0,t_0)} \int_H p_{S_{i-1},S_i}(t,x,y)\theta_{S_{i-1},S_i}(dy),$$

$$\prod_{i=1}^{\infty} c_i = c \in (0,1),$$

$$\prod_{i=1}^{\infty} C_i(x) = C(x) \in (1,+\infty).$$

Заметим, что

$$\forall\, t \in (0,t_0)\ \forall\, n,m \in \mathbb{N}:\quad n \le m,\quad \left|M_m^t(x) - M_m^0(x)\right| \le$$

$$\le \frac{M_m^t}{M_n^t}\left|M_n^t(x) - M_n^0(x)\right| + M_n^0\left|\frac{M_m^t(x)}{M_n^t(x)} - 1\right| + \left|M_n^0(x) - M_m^0(x)\right| \le$$

$$\le C(x)\left(\left|M_n^t(x) - M_n^0(x)\right| + \left|\frac{M_m^t(x)}{M_n^t(x)} - 1\right| + \left|\frac{M_m^0(x)}{M_n^0(x)} - 1\right|\right),$$

$$\left|\frac{M_m^t(x)}{M_n^t(x)} - 1\right| \le \max\left(\left|1 - \prod_{i=n+1}^{\infty} c_i(x)\right|, \left|1 - \prod_{i=n+1}^{\infty} C_i(x)\right|\right).$$

В п. 3 доказано, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N}:\quad M_n^t(x) \to M_n^0(x).$$

Этого достаточно, чтобы утверждать, что можно выбрать n и t_1 так, чтобы

$$\forall\, t \in (0,t_1):$$

$$\forall\, m \ge n:\quad \left|\frac{M_m^t(x)}{M_n^t(x)} - 1\right| \le \frac{\varepsilon}{3C(x)},$$

$$\forall\, m < n:\quad \left|M_m^t(x) - M_m^0(x)\right| \le \varepsilon,$$

$$\left|M_n^t(x) - M_n^0(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3C(x)}.$$

Комбинируя полученные неравенства, получаем необходимую оценку.

Известно, что [4]

$$\forall t \geq 0: \quad \frac{d^n T_t \nu_n}{d\mu_n} = \frac{d(T_t\nu)_n}{d\mu_n} \to \frac{d(T_t\nu)^{a.c.}}{d\mu},$$

$$n \to +\infty, \qquad \mu\text{-почти всюду.}$$

Поэтому достаточно доказать, что можно поменять порядок перехода к пределу в соотношении

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to 0+} \frac{d^n T_t \nu_n}{d\mu_n} = \frac{d\nu^{a.c.}}{d\mu}$$

и результат не изменится. Но это следует из доказанной равномерной сходимости.

Пример. Пусть в обозначениях теоремы $l_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\theta_{n,n+1} = \delta_0$ — дельта-мера в нуле. Запишем получающиеся при этом плотности для мер $T_t \nu$:

$$\frac{d^n T_t \nu_n}{d\mu_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \alpha_k + \alpha_k \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \exp\left(-\frac{e^{-2t} x_k^2}{2\lambda_k (1-e^{-2t})}\right)\right).$$

Заметим, что $A_0(T_t\theta_{n,n+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-4t}}}$, т. е. условия $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < +\infty$ достаточно для того, чтобы для всех $t > 0$ выполнялось $T_t \nu << \mu$. Покажем, во что превращается условие 2 теоремы 4

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k \sup_{t\in(0,t_0)} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \exp\left(-\frac{e^{-2t} x_k^2}{2\lambda_k (1-e^{-2t})}\right) < +\infty \quad \text{п. в.} \quad \mu.$$

Супремум можно оценить следующим образом (исследовав поведение производной по t):

$$\sup_{t\in(0,t_0)} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \exp\left(-\frac{e^{-2t} x_k^2}{2\lambda_k (1-e^{-2t})}\right) \leq \max\left(1, \frac{\sqrt{\lambda_k}}{|x_k|}\right).$$

Следовательно, сходимость почти всюду по μ ряда

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_k \max\left(1, \frac{\sqrt{\lambda_k}}{|x_k|}\right) < +\infty$$

достаточна для выполнения условия 2 теоремы 4.

Заметим, что можно заменить $x_k/\sqrt{\lambda_k}$ на ξ_k (те же, что и при построении меры μ, независимые стандартные гауссовы случайные величины) и, рассмотрев сходимость почти наверное (которая эквивалентна рассматриваемой выше сходимости почти всюду по мере μ), применить теорему Колмогорова о трех рядах. Опустив подробности, запишем получающееся условие на α_k:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_k \ln \alpha_k < +\infty,$$

$$\alpha_k \to 0, \qquad k \to +\infty.$$

Заметим, что отсюда следует и сходимость ряда из α_k, т. е. выполнены все условия теоремы и, следовательно,

$$\frac{dT_t\nu}{d\mu}(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \alpha_k + \alpha_k \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \exp\left(-\frac{e^{-2t} x_k^2}{2\lambda_k (1-e^{-2t})}\right)\right) \to$$

$$\to \frac{d\nu}{d\mu}(x) = \prod_{i=1}^{+\infty} (1-\alpha_k).$$

Одна из возможностей дальнейшего исследования условий теоремы — внести супремум под знак интеграла (сделать условие более сильным). К сожалению, при этом возникают проблемы с интегрируемостью, и условие становится почти непригодным к использованию. Действительно, можно заметить, что при этом функция под интегралом в окрестности точки x будет вести себя как $\|z\|^{-d}$, $z \in \mathbb{R}^d$, в окрестности нуля (аналогично тому, как было в рассмотренном выше примере). Здесь d — размерность пространства, по которому берется интеграл. То есть получившаяся функция не будет интегрируема по мере Лебега в $\mathbb{R}^d$ (для всех $x \in H$), а значит, чтобы выполнялось условие теоремы, меры θ_{S_{i-1},S_i} должны быть сингулярны мере Лебега. Однако и это не гарантирует интегрируемости функций $\|z-u\|^{-d}$ z, $u \in \mathbb{R}^d$. Рассмотрим следующие меры на $\mathfrak{B}([0;1])$:

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \delta_{k/n},$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \gamma_n, \quad \beta_n \in (0,1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n = 1.$$

Очевидно, что γ — мера, сосредоточенная на не более чем счетном множестве, т. е. она сингулярна мере Лебега. Докажем, что можно подобрать β_n (с учетом приведенных выше ограничений) так, чтобы все интегралы

$$\int_0^1 \frac{1}{|u-v|} \gamma(du), \qquad v \in (0,1),$$

были бесконечными. Заметим, что

$$\inf_{v \in (0,1)} \int_0^1 \frac{1}{|u-v|} \gamma_n(du) \to +\infty, \qquad n \to +\infty.$$

Отсюда следует, что можно выбрать β_n так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \inf_{v \in (0,1)} \int_0^1 \frac{1}{|u-v|} \gamma_n(du) = +\infty.$$

Этого достаточно для бесконечности интегралов. Аналогичное построение можно сделать и в $\mathbb{R}^d$.

1. *Watanabe S.* Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus. – Berlin etc.: Springer, 1984.
2. *Дороговцев А. А.* Измеримые функционалы и финитно абсолютно непрерывные меры на банаховых пространствах // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 9. – С. 1194 – 1204.
3. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, 1967. – 220 с.
4. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.

Получено 25.06.2003