УДК 517.537.72

М. М. Зеліско, М. М. Шеремета (Львів. нац. ун-т)

ПРО СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ РЯДУ ДІРІХЛЕ

For the Dirichlet series with arbitrary abscissa of absolute convergence, we investigate a relation between the growth of the maximal term and $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \exp\{q\sigma\lambda_n\}\right)^{1/q}$, $q \in (0, +\infty)$.

Для ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності досліджено зв'язок між зростанням максимального члена і $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \exp\{q\sigma\lambda_n\}\right)^{1/q}$, $q \in (0, +\infty)$.

1. Вступ. Нехай (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (λ_n), а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$. Покладемо для $\sigma < A$ $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)|: t \in \mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma) = M(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}: n \ge 1\}$ — максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n \ge 1: |a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ — його центральний індекс, $\Lambda(\sigma) = \Lambda(\sigma, F) = \lambda_{\nu(\sigma, F)}$ — центральний показник, а

$$M_q^q(\sigma, F) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \exp\{q\sigma\lambda_n\}, \quad q \in (0, +\infty).$$

Зауважимо, що [1, с. 131]

$$M_2(\sigma, F) = \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{T}^{T} |F(\sigma + it)|^2 \, dt\right)^{1/2}$$

називається середнім значенням ряду Діріхле. На зв'язок між $M_q(\sigma, F)$, $\mu(\sigma, F)$ і $\Lambda(\sigma, F)$ вказує така теорема.

Теорема 1. *Нехай ряд Діріхле* (1) *має абсцису абсолютної збіжності* $A \in (-\infty, +\infty]$ *і* $\ln n(t) \le \dfrac{t}{\alpha(t)}$, $t \ge t_0$, *де* α — *додатна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція така, що* $\dfrac{t}{\alpha(t)} \nearrow +\infty$, $t \to +\infty$. *Тоді якщо* $\alpha(\Lambda(\sigma, F)) > \dfrac{2}{q(A - \sigma)}$, $\sigma \in [\sigma_0, A)$, *то для всіх досить близьких до* A *значень* $\sigma < A$

$$M_q(\sigma, F) \le \mu(\sigma, F)\left(1 + 3\exp\left\{\frac{\Lambda(\sigma + 2/(q\alpha(\Lambda(\sigma))))}{\alpha(\Lambda(\sigma))}\right\}\right)^{1/q}. \tag{2}$$

Зауважимо, що умова $\alpha(\Lambda(\sigma, F)) > \dfrac{2}{q(A - \sigma)}$, $\sigma \in [\sigma_0, A)$, у випадку $A = +\infty$ є зайвою. Зрозуміло, що за певних умов на показники теорему 1 можна уточнити. В п. 2 ми розглянемо випадки, коли $n(t) \le Kt$ $(t \ge t_0)$ і $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0$ $(n \ge n_0)$.

Далі будемо вважати, що $\mu(\sigma, F) \to +\infty$ $(\sigma \uparrow A)$. Якщо $A = +\infty$, то ця умова виконується завжди, а якщо $A < +\infty$, то $\mu(\sigma, F) \to +\infty$ $(\sigma \uparrow A)$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n| e^{A\lambda_n} = +\infty$. Якщо ж остання умова виконується, то ряд Діріхле має мажоранту Ньютона [2]. Зауважимо, що з умови $\alpha(\Lambda(\sigma, F)) > \dfrac{2}{q(A-\sigma)}$, $\sigma \in [\sigma_0, A)$, випливає існування мажоранти Ньютона. Оскільки максимальний член і центральний індекс ряду Діріхле (1) збігаються з максимальним членом і центральним індексом його мажоранти Ньютона, то теорему 1 досить довести для рядів Діріхле (1) таких, що

$$\varkappa_n = \frac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow A, \quad n \to \infty \tag{3}$$

(цю умову задовольняють коефіцієнти мажоранти Ньютона будь-якого ряду Діріхле). Покладемо

$$a = \lim_{n\to\infty} (\varkappa_n - \varkappa_{n-1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n), \qquad b = \overline{\lim_{n\to\infty}} (\varkappa_n - \varkappa_{n-1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай ряд Діріхле* (1) *має абсцису абсолютної збіжності* $A \in (-\infty, +\infty]$ *і* $\varkappa_n \nearrow A$, $n \to \infty$. *Тоді:*

1) *якщо* $a = b = 0$ *і* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \le D(\lambda_n - \lambda_{n-1})$, $n \ge n_0$, *то*

$$\lim_{\sigma\uparrow A} \frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} = +\infty;$$

2) *якщо* $a < +\infty$, *то*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \ge \left(2 + e^{-qa}\right)^{1/q};$$

3) *якщо* $a > 0$ *і* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \le D(\lambda_n - \lambda_{n-1})$, $n \ge n_0$, *то*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \le \left(2 + \frac{3 - \exp\{-qa/D\}}{\exp\{qa/D\} - 1}\right)^{1/q};$$

4) *якщо* $a = +\infty$ *і* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \le D(\lambda_n - \lambda_{n-1})$, $n \ge n_0$, *то*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} = 2^{1/q};$$

5) *якщо* $b < +\infty$, $0 < h \le \lambda_{n+1} - \lambda_n \le H < +\infty$, $n \ge n_0$, *і* $A = +\infty$, *то*

$$\lim_{\sigma\uparrow A} \frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \ge \left(1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{qbH}{2h} j(j+1)\right\}\right)^{1/q} > \left(1 + 2\exp\left\{-\frac{qbH}{h}\right\}\right)^{1/q};$$

6) *якщо* $b > 0$, $0 < h \le \lambda_{n+1} - \lambda_n \le H < +\infty$, $n \ge n_0$, *і* $A = +\infty$, *то*

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \le \left(1 + \frac{2}{\exp\{qbH/2h\} - 1}\right)^{1/q};$$

7) *якщо* $b = +\infty$, $0 < h \le \lambda_{n+1} - \lambda_n \le H < +\infty$, $n \ge n_0$, *і* $A = +\infty$, *то*

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} = 1.$$

Зауважимо, що якщо $0<h\le\lambda_{n+1}-\lambda_n\le H<+\infty$, $n\ge n_0$, і $A<+\infty$, то, оскільки $\varkappa_n-\varkappa_{n-1}\to 0$, $n\to\infty$, маємо рівність $b=0$ і, отже, $\varlimsup\limits_{\sigma\uparrow A}\dfrac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} = +\infty$.

Зауважимо також, що якщо $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le D(\lambda_n-\lambda_{n-1})$, $n\ge n_0$, то $D\ge 1$, тому що якщо $D<1$, то $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le K_1D^n$ і $\lambda_{n+1}\le\dfrac{K_2}{1-D}$, де K_1 і K_2 — додатні сталі, що неможливо.

2. ***Доведення теореми*** **1.** Оскільки скінченна сума ряду Діріхле на асимптотику $\dfrac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)}$ не впливає, то до ряду (1) додамо член $a_0\exp\{s\lambda_0\}$ з $a_0=1$ і $\lambda_0=0$, тобто замість ряду (1) розглянемо ряд Діріхле $F(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$.

Будемо спочатку вважати, що виконується умова (3). Тоді [3, с. 19] $\mu(\varkappa_m, F)=|a_m|\exp\{\varkappa_m\lambda_m\}$ для всіх m, а якщо $\varkappa_{m-1}<\varkappa_m$ для деякого m, то $\nu(\sigma, F)=m$ і $\mu(\sigma, F)=|a_m|\exp\{\sigma\lambda_m\}$ для всіх $\sigma\in[\varkappa_{m-1}, \varkappa_m)$. З (3) легко отримуємо також рівність

$$|a_n| = \exp\left\{-\sum_{j=0}^{n-1}\varkappa_j(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\},\quad n\ge 1.$$

Тому якщо $\varkappa_{m-1}\le\sigma<\varkappa_m$, то

$$\frac{|a_n|^q\exp\{q\sigma\lambda_n\}}{\mu^q(\sigma, F)} = \begin{cases}\exp\left\{-q\sum\limits_{j=n}^{m-1}(\sigma-\varkappa_j)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\}, & n<m,\\ 1, & n=m,\\ \exp\left\{-q\sum\limits_{j=m}^{n-1}(\varkappa_j-\sigma)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\}, & n>m.\end{cases}\tag{4}$$

Нехай $\beta=\beta(\sigma)\in(0, A-\sigma)$, а $p=p(\sigma)=\nu(\sigma+\beta(\sigma))$. Тоді $\varkappa_p>\sigma+\beta(\sigma)$ і

$$M_q^q(\sigma, F) = \left(\sum_{n=0}^{p}+\sum_{n=p+1}^{\infty}\right)|a_n|^q\exp\{q\sigma\lambda_n\} \le$$

$$\le \mu^q(\sigma, F)\left(p+1+\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{|a_n|^q\exp\{q\sigma\lambda_n\}}{\mu^q(\sigma, F)}\right) \le$$

$$\le \mu^q(\sigma, F)\left(p+1+\sum_{n=p+1}^{\infty}\exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}(\varkappa_p-\sigma)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\}\right) \le$$

$$\le \mu^q(\sigma, F)\left(p+1+\sum_{n=p+1}^{\infty}\exp\{-q\beta(\sigma)(\lambda_n-\lambda_p)\}\right).\tag{5}$$

Вважаючи, що $q\beta(\sigma)>\dfrac{1}{\alpha(\lambda_p)}$, і використовуючи умову $\ln n(t)\le\dfrac{t}{\alpha(t)}$, $t\ge t_0$, маємо

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \exp\left\{-q\beta(\sigma)\left(\lambda_n - \lambda_p\right)\right\} \le e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \sum_{n=p+1}^{\infty} \exp\{-q\beta(\sigma)\lambda_n\} \le$$

$$\le e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \int_{\lambda_p}^{\infty} \exp\{-q\beta(\sigma)t\}\, dn(t) \le$$

$$\le q\beta(\sigma) e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \int_{\lambda_p}^{\infty} n(t) \exp\{-q\beta(\sigma)t\}\, dt \le$$

$$\le q\beta(\sigma) e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \int_{\lambda_p}^{\infty} \exp\left\{-q\beta(\sigma)t + \frac{t}{\alpha(t)}\right\} dt \le$$

$$\le q\beta(\sigma) e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \int_{\lambda_p}^{\infty} \exp\left\{-q\beta(\sigma)t + \frac{t}{\alpha(\lambda_p)}\right\} dt =$$

$$= \frac{q\beta(\sigma)}{q\beta(\sigma) - 1/\alpha(\lambda_p)} e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \exp\left\{-q\beta(\sigma)\lambda_p + \frac{\lambda_p}{\alpha(\lambda_p)}\right\} =$$

$$= \frac{q\beta(\sigma)}{q\beta(\sigma) - 1/\alpha(\lambda_p)} \exp\left\{\frac{\lambda_p}{\alpha(\lambda_p)}\right\}.$$

Тому з (5) отримуємо

$$M_q^q(\sigma, F) \le \mu^q(\sigma, F)\left(p + 1 + \frac{q\beta(\sigma)}{q\beta(\sigma) - 1/\alpha(\lambda_p)} \exp\left\{\frac{\lambda_p}{\alpha(\lambda_p)}\right\}\right) \le$$

$$\le \mu^q(\sigma, F)\left(\exp\left\{\frac{\lambda_p}{\alpha(\lambda_p)}\right\} + 1 + \frac{q\beta(\sigma)}{q\beta(\sigma) - 1/\alpha(\lambda_p)} \exp\left\{\frac{\lambda_p}{\alpha(\lambda_p)}\right\}\right). \tag{6}$$

Виберемо $\beta(\sigma) = \dfrac{2}{q\alpha(\Lambda(\sigma))}$. Тоді $\sigma + \beta(\sigma) < A$, $\alpha(\lambda_p) = \alpha(\Lambda(\sigma + \beta(\sigma))) \ge \alpha(\Lambda(\sigma))$, $q\beta(\sigma) > \dfrac{1}{\alpha(\lambda_p)}$ і $q\beta(\sigma) - \dfrac{1}{\alpha(\lambda_p)} \ge \dfrac{1}{\Lambda(\sigma)}$. Тому

$$1 + \left(1 + \frac{q\beta(\sigma)}{q\beta(\sigma) - 1/\alpha(\lambda_p)}\right) \exp\left\{\frac{\lambda_p}{\alpha(\lambda_p)}\right\} \le$$

$$\le 1 + 3\exp\left\{\frac{\Lambda(\sigma + \beta(\sigma))}{\alpha(\Lambda(\sigma + \beta(\sigma)))}\right\} \le$$

$$\le 1 + 3\exp\left\{\frac{\Lambda(\sigma + 2/(q\alpha(\Lambda(\sigma))))}{\alpha(\Lambda(\sigma))}\right\},$$

і з (6) дістаємо (2).

Теорему 1 у випадку виконання умови (3) доведено.

У загальному випадку ряд (1) має мажоранту Ньютона $F_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \exp\{s\lambda_n\}$, для якої виконується (3) з a_n^0 замість $|a_n|$. Як було зазначено, максимальні члени і центральні індекси ряду (1) та його мажоранти Ньютона збігаються, а оскільки $|a_n| \le a_n^0$, то $M_q(\sigma, F) \le M_q(\sigma, F_0)$ і, отже, теорему 1 повністю доведено.

Припустимо тепер, що $n(t) \le Kt$, $t \ge t_0$, і $\Lambda(\sigma) > \frac{1}{A-\sigma}$. Тоді, як і вище,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \exp\{-q\beta(\sigma)(\lambda_n - \lambda_p)\} \le q\beta(\sigma) e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \int_{\lambda_p}^{\infty} n(t) e^{-q\beta(\sigma)t} dt \le$$

$$\le K q\beta(\sigma) e^{q\beta(\sigma)\lambda_p} \int_{\lambda_p}^{\infty} t e^{-q\beta(\sigma)t} dt = \frac{K e^{q\beta(\sigma)\lambda_p}}{q\beta(\sigma)} \int_{q\beta(\sigma)\lambda_p}^{\infty} t e^{-t} dt. \tag{7}$$

Якщо виберемо $\beta(\sigma) = \frac{1}{\Lambda(\sigma + 1/\Lambda(\sigma))}$, то $\beta(\sigma) \le \frac{1}{\Lambda(\sigma)}$, $\sigma + \beta(\sigma) < A$, $\lambda_p = \Lambda(\sigma + \beta(\sigma)) \le \Lambda\left(\sigma + \frac{1}{\Lambda(\sigma)}\right)$ і $\beta(\sigma)\lambda_p \le 1$. Тому з (7) дістаємо

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \exp\{-q\beta(\sigma)(\lambda_n - \lambda_p)\} \le \frac{Ke^q}{q\beta(\sigma)} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \frac{Ke^q}{q\beta(\sigma)} = \frac{Ke^q}{q} \Lambda\left(\sigma + \frac{1}{\Lambda(\sigma)}\right)$$

і, як і вище, отримуємо

$$M_q^q(\sigma, F) \le \mu^q(\sigma, F)\left\{K\Lambda(\sigma + \beta(\sigma)) + 1 + \frac{Ke^q}{q} \lambda\left(\sigma + \frac{1}{\Lambda(\sigma)}\right)\right\} \le$$

$$\le \mu^q(\sigma, F)\left(1 + K\left(1 + \frac{e^q}{q}\right)\Lambda\left(\sigma + \frac{1}{\Lambda(\sigma)}\right)\right).$$

Отже, доведено наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай ряд Діріхле* (1) *має абсцису абсолютної збіжності* $A \in (-\infty, +\infty]$ *і* $n(t) \le Kt$, $t \ge t_0$. *Тоді якщо* $\Lambda(\sigma, F) > \frac{1}{A-\sigma}$, $\sigma \in [\sigma_0, A)$, *то для всіх досить близьких до* A *значень* $\sigma < A$

$$M_q(\sigma, F) \le \mu(\sigma, F)\left(1 + K\left(1 + \frac{e^q}{q}\right)\Lambda\left(\sigma + \frac{1}{\Lambda(\sigma)}\right)\right)^{1/q}.$$

Нарешті, припустимо, що $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0$, $n \ge n_0$, і $\nu(\sigma) > \frac{1}{A-\sigma}$. Тоді

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \exp\{-q\beta(\sigma)(\lambda_n - \lambda_p)\} \le \sum_{n=p+1}^{\infty} \exp\{-qh\beta(\sigma)(n-p)\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-qh\beta(\sigma)n\} = \frac{1}{1 - \exp\{-qh\beta(\sigma)\}} - 1$$

і, отже,

$$M_q^q(\sigma, F) \le \mu^q(\sigma, F)\left(\nu(\sigma + \beta(\sigma)) + \frac{1}{1 - \exp\{-qh\beta(\sigma)\}}\right).$$

Якщо виберемо $\beta(\sigma) = \frac{1}{\nu(\sigma)}$, то $\sigma + \beta(\sigma) < A$ і

$$M_q^q(\sigma, F) \le \mu^q(\sigma, F)\nu\left(\sigma + \frac{1}{\nu(\sigma)}\right)\left(1 + \frac{1 + o(1)}{qh}\right), \quad \sigma \to +\infty.$$

Отже, доведено наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай ряд Діріхле* (1) *має абсцису абсолютної збіжності* $A \in (-\infty, +\infty]$ *і* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$, $n \geq n_0$. *Тоді якщо* $\nu(\sigma, F) > \dfrac{1}{A-\sigma}$, $\sigma \in [\sigma_0, A)$, *то для будь-якого* $\delta > 0$ *і всіх досить близьких до* A *значень* $\sigma < A$

$$M_q(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F)\left(1 + \frac{1+\delta}{qh}\right)^{1/q} \nu^{1/q}\left(\sigma + \frac{1}{\nu(\sigma)}\right).$$

***Зауваження* 1.** Зрозуміло, що функцію β можна вибирати будь-яким чином, не порушуючи умову $\sigma + \beta(\sigma) < A$, а відтак отримувати відповідні оцінки для $M_q(\sigma, F)/\mu(\sigma, F)$. Наприклад, якщо $A = 0$ і $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$, $n \geq n_0$, то, вибираючи $\beta(\sigma) = |\sigma|/\nu(\sigma)$, за умови $\nu(\sigma) > 1$ отримуємо

$$M_q^q(\sigma, F) \leq \mu^q(\sigma, F)\nu\left(\sigma + \frac{|\sigma|}{\nu(\sigma)}\right)\left(1 + \frac{(1+o(1))\nu(\sigma)}{qh|\sigma|}\right), \quad \sigma \uparrow 0,$$

тобто

$$M_q(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F)\left(\frac{2\nu(\sigma)}{h|\sigma|}\nu\left(\sigma + \frac{|\sigma|}{\nu(\sigma)}\right)\right)^{1/q}$$

для всіх досить близьких до 0 значень $\sigma < 0$.

***Зауваження* 2.** Використовуючи один із варіантів леми Бореля – Неванлінни, кожну з отриманих вище оцінок можна продовжити. Наприклад, відомим є таке твердження [4, с. 12]: *якщо* $u(\sigma) \nearrow +\infty$, $\sigma_0 \leq \sigma \to +\infty$, *то* $\ln u\left(\sigma + \dfrac{1}{\ln u(\sigma)}\right) < \dfrac{3}{2}\ln u(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \geq \sigma_0$, *за винятком, можливо, множини скінченної міри*. Застосовуючи це твердження, наприклад, до функції $u(\sigma) = \exp\{\Lambda(\sigma)\}$, з твердження 1 отримуємо, що *якщо* $A = +\infty$ *і* $n(t) \leq Kt$ $(t \geq t_0)$, *то* $M_q(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F)\left(2K\left(1 + \dfrac{e^q}{q}\right)\Lambda(\sigma)\right)^{1/q}$ *для всіх* $\sigma \geq 0$ *зовні деякої множини скінченної міри*.

3. *Доведення теореми* 2. Нехай $a = b = 0$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq D\left(\lambda_n - \lambda_{n-1}\right)$, $n \geq n_0$, і $\sigma < A$, а $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\kappa_{m-1} \leq \sigma \leq \kappa_m$. Тоді для фіксованого $p \in \mathbb{N}$ з (4) маємо

$$\frac{M_q^q(\sigma, F)}{\mu^q(\sigma, F)} \geq \sum_{n=m+1}^{m+p} \exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}(\kappa_j - \sigma)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} \geq$$

$$\geq \sum_{n=m+1}^{m+p} \exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}(\kappa_j - \kappa_{m-1})\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=m+1}^{m+p} \exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\sum_{k=m}^{j}\frac{(\kappa_k - \kappa_{k-1})(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right\} \geq$$

$$\geq \sum_{n=m+1}^{m+p} \exp\left\{-q\max_{m \leq k \leq m+p}(\kappa_k - \kappa_{k-1})(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\sum_{j=m}^{n-1}\sum_{k=m}^{j}\frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right\}.$$

Але $\max\limits_{m \leq k \leq m+p}(\kappa_k - \kappa_{k-1})(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \varepsilon_m \to 0$, $m \to \infty$, а для всіх $m \geq m_0$ і $n \leq m + p$

$$\sum_{j=m}^{n-1}\sum_{k=m}^{j}\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \le \sum_{j=m}^{n-1}\sum_{k=m}^{j} D^{j-k} \le \sum_{j=m}^{n-1} D^{j-m}(j-m+1) \le$$

$$\le D^{n-m-1}\sum_{j=m}^{n-1}(j-m+1) \le D^{p-1}\sum_{j=m}^{m+p-1}(j-m+1) =$$

$$= D^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1}(j+1) = Q < +\infty.$$

Тому

$$\sum_{n=m+1}^{m+p}\exp\left\{-q\max_{m\le k\le m+p}(\kappa_k-\kappa_{k-1})(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\sum_{j=m}^{n-1}\sum_{k=m}^{j}\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=m+1}^{m+p}\exp\{-qQ\varepsilon_m\} \to p, \quad m\to\infty,$$

і

$$\varliminf_{\sigma\uparrow A}\frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \ge p^{1/q}.$$

З огляду на довільність p твердження 1 теореми 2 доведено.

Якщо $a<+\infty$, то для будь-якого $\eta>a$ існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\left(\kappa_{n_k}-\kappa_{n_k-1}\right)\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)\le\eta$. Тому з (4) маємо

$$\frac{M_q^q\left(\kappa_{n_k-1}, F\right)}{\mu^q\left(\kappa_{n_k-1}, F\right)} \ge \exp\left\{-q\left(\kappa_{n_k-1}-\kappa_{n_k-1}\right)\left(\lambda_{n_k}-\lambda_{n_k-1}\right)\right\} +$$

$$+ 1 + \exp\left\{-q\left(\kappa_{n_k}-\kappa_{n_k-1}\right)\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)\right\} \ge$$

$$\ge 2 + \exp\{-q\eta\},$$

тобто завдяки довільності η твердження 2 теореми 2 доведено.

Нехай $a>0$ і $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le D\left(\lambda_n-\lambda_{n-1}\right)$, $n\ge n_0$. Припустимо, що $\kappa_{m-1}\le$ $\le\sigma\le\kappa_m$, і, використовуючи (4), записуємо

$$\frac{M_q^q(\sigma, F)}{\mu^q(\sigma, F)} = \sum_{n=0}^{m-2}\exp\left\{-q\sum_{j=n}^{m-1}(\sigma-\kappa_j)\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-q\left(\sigma-\kappa_{m-1}\right)\left(\lambda_m-\lambda_{m+1}\right)\right\} + 1 + \exp\left\{-q(\kappa_m-\sigma)\left(\lambda_{m+1}-\lambda_m\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{n=m+2}^{\infty}\exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}(\kappa_j-\sigma)\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}. \tag{8}$$

З умови $a>0$ випливає, що $(\kappa_n-\kappa_{n-1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ge\eta$ для будь-якого $\eta\in(0,a)$ і всіх $n\ge n_0=n_0(\eta)$, а оскільки $\sum_{n=0}^{n_0}|a_n|^q\exp\{q\sigma\lambda_n\}$ $=$ $= O\left(\exp\left\{q\sigma\lambda_{n_0}\right\}\right) = o\left(\mu^q(\sigma, F)\right)$ при $\sigma\to+\infty$, тобто зміна скінченної кількості перших членів ряду (1) на асимптотику відношення $\dfrac{M_q^q(\sigma, F)}{\mu^q(\sigma, F)}$ не впливає, то ми можемо без втрати загальності вважати, що нерівності $(\kappa_n-\kappa_{n-1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ge$ $\ge\eta$ і $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le D\left(\lambda_n-\lambda_{n-1}\right)$ виконуються для всіх $n\ge0$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{m-2} \exp\left\{-q \sum_{j=n}^{m-1} (\sigma - \kappa_j)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{m-2} \exp\left\{-q \sum_{j=n}^{m-1} (\kappa_{m-1} - \kappa_j)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-2} \exp\left\{-q \sum_{j=n}^{m-2} (\kappa_{m-1} - \kappa_j)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{m-2} \exp\left\{-q \sum_{j=n}^{m-2} (\kappa_{j+1} - \kappa_j)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-2} \exp\left\{-q \sum_{j=n}^{m-2} (\kappa_{j+1} - \kappa_j)\left(\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}\right) \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}}\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{m-2} \exp\left\{-q \sum_{j=n}^{m-2} \frac{\eta}{D}\right\} = \sum_{n=0}^{m-2} \exp\left\{\frac{-q\eta(m-n-1)}{D}\right\} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{\frac{-q\eta j}{D}\right\} = \frac{1}{\exp\{q\eta / D\} - 1}$$

і

$$\sum_{n=m+2}^{\infty} \exp\left\{-q \sum_{j=m}^{n-1} (\kappa_j - \sigma)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=m+2}^{\infty} \exp\left\{-q \sum_{j=m}^{n-1} (\kappa_j - \kappa_m)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=m+2}^{\infty} \exp\left\{-q \sum_{j=m+1}^{n-1} (\kappa_j - \kappa_m)\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=m+2}^{\infty} \exp\left\{-q \sum_{j=m+1}^{n-1} (\kappa_j - \kappa_{j-1})\left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right)\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=m+2}^{\infty} \exp\{-q\eta(n-m-1)\} = \frac{1}{\exp\{-q\eta\} - 1} \le \frac{1}{\exp\{-q\eta / D\} - 1}.$$

Далі, функція

$$\varphi(\sigma) = \exp\left\{-q\left(\sigma - \kappa_{m-1}\right)\left(\lambda_m - \lambda_{m-1}\right)\right\} + \exp\left\{-q\left(\kappa_m - \sigma\right)\left(\lambda_{m+2} - \lambda_{m+1}\right)\right\}$$

опукла на $\left[\kappa_{m-1}, \kappa_m\right]$. Тому

$$\max\left\{\varphi(\sigma)\colon \kappa_{m-1} \le \sigma \le \kappa_m\right\} = \max\left\{\varphi(\kappa_{m-1}), \varphi(\kappa_m)\right\} =$$

$$= \max\Big\{1 + \exp\left\{-q\left(\kappa_m - \kappa_{m-1}\right)\left(\lambda_m - \lambda_{m-1}\right)\right\},$$

$$1 + \exp\left\{-q\left(\kappa_m - \kappa_{m-1}\right)\left(\lambda_{m+2} - \lambda_{m+1}\right)\right\}\Big\} \le$$

$$\le \max\left\{1 + \exp\left\{-\frac{q\eta}{D}\right\}, 1 + \exp\{-q\eta\}\right\} \le 1 + \exp\left\{-\frac{q\eta}{D}\right\}.$$

Отже, з (8) отримуємо

$$\frac{M_q^q(\sigma_k, F)}{\mu^q(\sigma_k, F)} \le 2 + \exp\left\{-\frac{q\eta}{D}\right\} + \frac{2}{\exp\{q\eta/D\}-1} =$$

$$= 2 + \frac{3-\exp\{-q\eta/D\}}{\exp\{q\eta/D\}-1},$$

тобто завдяки довільності η твердження 3 теореми 2 доведено.

З наведеного доведення видно, що якщо $a=+\infty$, то $\overline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}}\frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \le 2^{1/q}$, і, оскільки $M_q^q(\kappa_n, F) \ge 2\mu^q(\kappa_n, F)$, то $\overline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}}\frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} = 2^{1/q}$. Твердження 4 теореми 2 доведено.

Якщо $b<+\infty$, то $(\kappa_n-\kappa_{n-1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \le \eta$ для кожного $\eta > b$ і всіх $n \ge n_0(\eta)$. Як і вище, можемо вважати, що нерівності $(\kappa_n-\kappa_{n-1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \le \eta$ і $0<h\le\lambda_{n+1}-\lambda_n \le H<+\infty$ виконуються для всіх n. Тоді якщо $\kappa_{m-1} \le \sigma \le \kappa_m$, то

$$\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-q\sum_{j=n}^{m-1}(\sigma-\kappa_j)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-q\sum_{j=n}^{m-1}(\kappa_m-\kappa_j)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-q\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}(\kappa_k-\kappa_{k-1})(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-q\eta\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right\} \ge \sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-\frac{q\eta H}{h}\sum_{j=n}^{m-1}(m-j)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-\frac{q\eta H}{2h}j(j+1)\right\}$$

і

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}(\kappa_j-\sigma)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=m+1}^{\infty}\exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}(\kappa_j-\kappa_{m-1})(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\right\} =$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty}\exp\left\{-q\sum_{j=m}^{n-1}\sum_{k=m}^{j}(\kappa_k-\kappa_{k-1})(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=m+1}^{\infty}\exp\left\{-q\eta\sum_{j=m}^{n-1}\sum_{k=m}^{j}\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=m+1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q\eta H}{h}\sum_{j=m}^{n-1}(j-m+1)\right\} = \sum_{j=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q\eta H}{2h}j(j+1)\right\}.$$

Тому з (4) отримуємо

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{M_q^q(\sigma,F)}{\mu^q(\sigma,F)}\geq 1+2\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q\eta H}{2h}j(j+1)\right\},$$

і з огляду на довільність η твердження 5 теореми 2 доведено.

Нарешті, якщо $b>0$, то для кожного $\eta\in(0,b)$ існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\left(\varkappa_{n_k}-\varkappa_{n_k-1}\right)\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)\geq\eta$ $(k\geq 1)$, тобто

$$\varkappa_{n_k}-\varkappa_{n_k-1}\geq\frac{\eta}{\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}},\quad k\geq 1.$$

Виберемо $\sigma_k=\varkappa_{n_k-1}+\dfrac{\eta}{2\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)}$. Тоді

$$\sigma_k-\varkappa_{n_k-1}=\frac{\eta}{2\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)},\qquad \varkappa_{n_k}-\sigma_k\geq\frac{\eta}{2\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)},$$

і з (4) отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{M_q^q(\sigma_k,F)}{\mu^q(\sigma_k,F)} &= \sum_{n=0}^{n_k-1}\exp\left\{-q\sum_{j=n}^{n_k-1}\left(\sigma_k-\varkappa_j\right)\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}+1+\\
&\quad+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\exp\left\{-q\sum_{j=n_k}^{n-1}\left(\varkappa_j-\sigma_k\right)\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}\leq\\
&\leq\sum_{n=0}^{n_k-1}\exp\left\{-q\sum_{j=n}^{n_k-1}\left(\sigma_k-\varkappa_{n_k-1}\right)\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}+1+\\
&\quad+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\exp\left\{-q\sum_{j=n_k}^{n-1}\left(\varkappa_{n_k}-\sigma_k\right)\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}\leq\\
&\leq\sum_{n=0}^{n_k-1}\exp\left\{-\frac{q\eta}{2\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)}\sum_{j=n}^{n_k-1}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}+1+\\
&\quad+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q\eta}{2\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)}\sum_{j=n_k}^{n-1}\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}=\\
&=\sum_{n=0}^{n_k-1}\exp\left\{-\frac{q\eta\left(\lambda_{n_k}-\lambda_n\right)}{2\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)}\right\}+1+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q\eta\left(\lambda_n-\lambda_{n_k}\right)}{2\left(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}\right)}\right\}\leq\\
&\leq\sum_{n=0}^{n_k-1}\exp\left\{-\frac{q\eta(n_k-n)h}{2H}\right\}+1+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q\eta(n-n_k)h}{2H}\right\}\leq\\
&\leq 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q\eta h}{2H}j\right\}=1+\frac{2}{\exp\{-q\eta h/2H\}-1},
\end{aligned}$$

тобто завдяки довільності η твердження 6 теореми 2 доведено.

З наведеного доведення видно, що якщо $b=+\infty$, то $\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{M_q(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)}\leq 1$, і, оскільки $\mu(\sigma,F)\leq M_q(\sigma,F)$, то $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{M_q(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)}=1$.

Теорему 2 повністю доведено.

***Зауваження* 3.** Для отримання оцінки $\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{M_q^q(\sigma, F)}{\mu^q(\sigma, F)}$ знизу необов'язково оцінювати весь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^q\exp\{q\sigma\lambda_n\}$. Можна обмежитись оцінкою знизу тільки деякої його часткової суми $\sum\limits_{n=n_1(\sigma)}^{n_1(\sigma)}|a_n|^q\exp\{q\sigma\lambda_n\}$. Тому у випадку $b<+\infty$ умови $0<h\le\lambda_{n+1}-\lambda_n\le H<+\infty$, $n\ge n_0$, і $A=+\infty$ у твердженні 5 теореми 2 не є обов'язковими. Правильним є, наприклад, наступне твердження.

Твердження 3. *Нехай ряд Діріхле* (1) *має абсцису абсолютної збіжності* $A\in(-\infty,+\infty]$, $\varkappa_n\nearrow+\infty$, $n\to\infty$, *і* $\dfrac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\le d<1$, $n\ge n_0$. *Тоді якщо* $b<+\infty$, *то*

$$\varliminf_{\sigma\uparrow A}\frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)}\ge\left(1+\frac{1}{\exp\{qbd/(1-d)\}-1}\right)^{1/q}.$$

Справді, як і при доведенні твердження 5 теореми 2, для $\varkappa_{m-1}\le\sigma\le\varkappa_m$ маємо

$$\frac{M_q^q(\sigma, F)}{\mu^q(\sigma, F)}\ge 1+\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-q\sum_{j=n}^{m-1}(\sigma-\varkappa_j)\left(\lambda_{j+1}-\lambda_j\right)\right\}\ge$$

$$\ge 1+\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-q\eta\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right\}\ge$$

$$\ge 1+\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-q\eta\sum_{j=n}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}d^{k-j}\right\}=$$

$$=1+\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-\frac{q\eta d}{1-d}\sum_{j=n}^{m-1}\left(1-\sum_{j=n}^{m-1}d^{m-j}\right)\right\}\ge$$

$$\ge 1+\sum_{n=0}^{m-1}\exp\left\{-\frac{q\eta d}{1-d}(m-n)\right\}=1+\frac{1-\exp\{-mq\eta d/(1-d)\}}{\exp\{q\eta d/(1-d)\}-1},$$

звідки легко отримати потрібну нерівність.

***Зауваження* 4.** У теоремі 2 можна відмовитися від умови $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le H<+\infty$, але тоді замість умови $b>0$ $(b=+\infty)$ слід накласти умову $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\varkappa_{n+1}-\varkappa_n\right)=b_1>0$ $(b_1=+\infty)$. В результаті отримаємо наступне твердження, яке узагальнює твердження 6 і 7 теореми 2.

Твердження 4. *Нехай ряд Діріхле* (1) *має абсцису абсолютної збіжності* $A=+\infty$, $\varkappa_n\nearrow+\infty$, $n\to\infty$, *і* $\lambda_{n+1}-\lambda_n\ge h>0$, $n\ge n_0$. *Тоді якщо* $b_1>0$, *то*

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)}\le\left(1+\frac{2}{\exp\{b_1qh/2\}-1}\right)^{1/q},$$

а якщо $b_1=+\infty$, *то* $\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{M_q(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)}=1.$

Справді, для будь-якого $\eta \in (0, b_1)$ тепер маємо $\left(\varkappa_{n_k} - \varkappa_{n_k-1}\right) \geq \eta \quad (n_k \uparrow +\infty)$ і, вибираючи $\sigma_k = \varkappa_{n_k-1} + \dfrac{\eta}{2}$, як і вище, отримуємо

$$\frac{M_q^q(\sigma_k, F)}{\mu^q(\sigma_k, F)} \leq \sum_{n=0}^{n_k-1} \exp\left\{-q \sum_{j=n}^{n_k-1} \left(\sigma_k - \varkappa_{n_k-1}\right) h\right\} + 1 +$$

$$+ \sum_{n=n_k+1}^{\infty} \exp\left\{-q \sum_{j=n_k}^{n-1} \left(\varkappa_{n_k} - \sigma_k\right) h\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n_k} \exp\left\{-\frac{q\eta hj}{2}\right\} + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{q\eta hj}{2}\right\} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{2}{\exp\{q\eta h/2\} - 1}.$$

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. *Грече Ф. И., Онипчук С. В.* Об абсциссах сходимости ряда Дирихле и его мажоранты Ньютона // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 2. – С. 161 – 168.
3. *Шеремета М. М.* Цілі ряди Діріхле. – Київ: ІСДО, 1993. – 168 с.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

Одержано 24.10.2003