УДК 517. 5

А. И. Степанец, д-р физ.-мат. наук,
А. С. Сердюк, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ *SK*-СПЛАЙНОВ

New sufficient conditions of existence and uniqueness of generalized interpolation SK-splines with uniformly distributed interpolation nodes are established. The results obtained embrace all known important statements in this field.

Встановлюються нові достатні умови існування та єдиності узагальнених інтерполяційних SK-сплайнів з рівномірним розподілом вузлів інтерполяції. Результати роботи охоплюють важливі відомі на цей час твердження в цьому напрямку

Пусть $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi\}$ — произвольное разбиение промежутка $[0, 2\pi]$ и $K(t)$ — суммируемая 2π-периодическая функция, $K \in L$. Тогда SK-сплайном по разбиению Δ_n называют функцию $SK(t)$, которая представляется равенством

$$SK(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i K(t - x_i), \tag{1}$$

в котором a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, — действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0. \tag{2}$$

Множество функций вида (1) будем обозначать через $SK(\Delta_n)$.

Каждой непрерывной 2π-периодической функции $f(\cdot)$, $f \in C$, сопоставим сплайн $SK(f; \cdot) = SK(f; y; \cdot)$ из множества $SK(\Delta_n)$, интерполирующий ее в точках $y_j = x_j + y$, т. е. такой, что

$$SK(f, y; y_j) = f(y_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad y \in R. \tag{3}$$

Такие сплайны будем называть интерполяционными для данной функции f.

В дальнейшем рассматриваются SK-сплайны в случае, когда в качестве ядер $K(\cdot)$ берутся функции $\Psi_\beta \in C$, ряды Фурье которых имеют вид

$$S[\Psi_\beta] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2),$$

где $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — некоторые функции натурального аргумента и β — фиксированные числа. В этом случае положим $SK(\cdot) = S\Psi_\beta(\cdot)$.

Если $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$, $r = 2, 3, \ldots,$ то

$$\Psi_\beta(t) = D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - r\pi/2),$$

т. е. $\Psi_\beta(t)$ совпадают с ядрами Бернулли, функции $S\Psi_\beta(\cdot)$ и $S\Psi_\beta(f; y; \cdot)$ являются известными полиномиальными сплайнами дефекта 1 порядка $r - 1$ по разбиению Δ_n.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании и единственности интерполяционных SK-сплайнов $S\Psi_\beta(f; y; \cdot)$ для равномерного разбиения сегмента $[0, 2\pi]$, т. е. когда $x_j = 2\pi j/n$, $y_j = x_j + y$, $0 \le y \le 2\pi/n$, $1 \le j \le n$. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть ядро*

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \beta\pi/2)$$

таково, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < +\infty, \tag{4}$$

$\psi(k)$ *представима в виде* $\psi(k) = \varphi(k)/k$, *где* $\varphi(k)$ — *убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Тогда интерполяционный* SK-*сплайн* $S\Psi_\beta(f; y; \cdot)$ *существует для произвольного набора* $F = \{f(y_k)\}_{k=1}^n$, $f \in C$, *и является единственным во множестве* $S\Psi_\beta(\Delta_n)$ *в следующих случаях:*

1) $y = 0$ *и: а)* $n = 2q$, $\beta \ne 2p - 1$, $q \in N$, $p \in Z$; *или б)* $n = 2q - 1$, $\beta \in R$, $q \in N$.

2) $\varphi(k)$ *выпукла вниз, т. е.* $\Delta\varphi(k) \overset{\text{df}}{=} \varphi(k) - \varphi(k+1) \ge 0$, $\Delta^2\varphi(k) = \Delta(\Delta\varphi(k)) \ge 0$, $y = \pi/n$ *и: а)* $n = 2q$, $\beta \ne 2p$, $q \in N, p \in Z$; *или б)* $n = 2q - 1$, $\beta \in R$.

3) $\varphi(k)$ *трижды монотонна, т. е.* $\Delta\varphi(k) \ge 0$, $\Delta^2\varphi(k) \ge 0$, $\Delta^3\varphi(k) = \Delta(\Delta\varphi^2(k)) \ge 0$ *и: а) при* $y \in (0, \pi/n)$ *и* $4p \le \beta \le 4p + 1$ *либо* $2 + 4p \le \beta \le 3 + 4p$; *или б) при* $y \in (\pi/n, 2\pi/n)$ *и* $1 + 4p \le \beta \le 2 + 4p$ *либо* $3 + 4p \le \beta \le 4 + 4p$, $p \in Z$.

4) $\varphi(k)$ *трижды монотонна,* $\beta \in Z$ *и:*

$$\text{а)} \qquad n = 2q, \quad q \in N, \quad y \ne \begin{cases} 0 & \text{при } \beta = 2p - 1,\ p \in Z; \\ \pi/n & \text{при } \beta = 2p, \quad p \in Z; \end{cases}$$

или б) $n = 2q - 1$, $y \in R$, $q \in N$.

При этом функции $S\Psi_\beta(f; y, \cdot)$ *представимы в виде*

$$S\Psi_\beta(f; y, \cdot) = \sum_{k=1}^{n} f(y_k)\,\overline{S\Psi}_\beta(y, \cdot - x_k), \tag{5}$$

где $\overline{S\Psi}_\beta$ — *фундаментальные сплайны:*

$$\overline{S\Psi}_\beta(y; x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\rho_j(x)\rho_j(y) + \sigma_j(x)\sigma_j(y)\right)/|\lambda_j(y)|^2, \tag{6}$$

$$\lambda_j(\cdot) = \lambda_j(\psi, \beta, y) = \sum_{\nu=1}^{n} \Psi_\beta(\cdot - x_\nu)\exp(ix_\nu j), \tag{7}$$

$$\rho_j(\cdot) = \mathrm{Re}\,(\lambda_j(\cdot)), \quad \sigma_j(\cdot) = \mathrm{Im}\,(\lambda_j(\cdot)). \tag{8}$$

Если $\psi(k) = k^r$, $r > 1$, то практически все утверждения теоремы за исключением случая, когда r дробное и $n = 2p - 1$, $p \in N$, являются известными.

При $r = 2, 3, \ldots$ и $\beta = r$ существование и единственность сплайнов $S\Psi_\beta(f; y, \cdot)$ доказаны Дж. Албергом, Э. Нильсоном, Дж. Уолшем [1] для четных r и $y = 0$; Ю. Н. Субботиным [2] для нечетных r и $y = \pi/n$; Ю. Н. Субботиным [3] и независимо от него А. А. Женсыкбаевым [4] для $y \ne \pi(1 - (-1)^{r+1})/2n$.

Кроме того, в этом случае П. В. Галкин [5] доказал, что необходимым и достаточным условиями существования и единственности сплайна $S\Psi_\beta(f; y, \cdot)$ при $r = 2, 3, \ldots$ для всех $f \in C$ и $y = 0$ является нечетность числа n точек разбиения промежутка $[0, 2\pi]$. А. А. Женсыкбаев [4] распространил это утверждение на случай, когда $y = \pi(1-(-1)^{r+1})/2$.

При дробных r и четных n, а также в случае, когда $\psi(k) = \rho^k / k$ и $0 < \rho < 1$, утверждения пп. 3 и 4 теоремы доказаны В. Т. Шевалдиным [6, 7].

Представления для полиномиальных фундаментальных сплайнов $\overline{S\Psi}_\beta$ при $\psi(k) = k^{-r}$, $r = 2, 3, \ldots$, получены М. Голомбом [8] и А. А. Женсыкбаевым [4].

В общем случае вопрос о существовании и единственности интерполяционных сплайнов $S\Psi_\beta(f; y, \cdot)$ исследован А. К. Кушпелем [9, 10], где, в частности, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Если все числа* $\lambda_j(\cdot)$, *определяемые соотношением* (7), *удовлетворяют условию*

$$|\lambda_j(\psi; \beta, y)| > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{9}$$

то интерполяционный сплайн $S\Psi_\beta(f; y, \cdot)$ *существует для произвольного набора* $F = \{f(y_k)\}_{k=1}^n$, $f \in C$, *и представим в виде* (5). *Если, кроме того,* $\psi(k) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *то это представление единственно.*

А. К. Кушпель [9] показал, что при выполнении условий п. 1, а также при выполнении условий п. 2 в случае, когда $y = \pi/n$, $\beta = 2p-1$ и $n = 2q$, $p \in Z$, $q \in N$, неравенства (9) выполняются и, тем самым, в этих случаях доказал утверждение теоремы. Поэтому для полного ее доказательства нам достаточно установить справедливость неравенств (9) в оставшихся случаях. Для этого сначала представим выражения для $|\lambda_j(\cdot)|^2$ в удобном для исследования виде.

Согласно формулам (7) и (8)

$$|\lambda_j(y)|^2 = \rho_j^2(y) + \sigma_j^2(y), \tag{10}$$

где

$$\rho_j(y) = \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \Psi_\beta(y - x_\nu) \cos jx_\nu, \tag{11}$$

$$\sigma_j(y) = \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \Psi_\beta(y - x_\nu) \sin jx_\nu. \tag{12}$$

Подставляя в формулы (11) и (12) представление $\Psi_\beta(t)$ через ее ряд Фурье и принимая во внимание условие (4), после выполнения элементарных преобразований получаем

$$\rho_j(y) = (A_j(y)\cos jy + C_j(y)\sin jy)\cos\beta\pi/2 + \\ + (B_j(y)\sin jy + D_j(y)\cos jy)\sin\beta\pi/2, \tag{13}$$

$$\sigma_j(y) = (A_j(y)\sin jy - C_j(y)\cos jy)\cos\beta\pi/2 + \\ + (D_j(y)\sin jy - B_j(y)\cos jy)\sin\beta\pi/2, \tag{14}$$

где

$$A_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi(mn+j) + \psi(mn-j))\cos mny + \psi(j). \tag{15}$$

$$B_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi(mn+j) - \psi(mn-j)) \cos mny + \psi(j), \tag{16}$$

$$C_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-\psi(mn+j) + \psi(mn-j)) \sin mny, \tag{17}$$

$$D_j(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\psi(mn+j) + \psi(mn-j)) \sin mny. \tag{18}$$

Объединяя формулы (10)–(18), находим

$$|\lambda_j(y)|^2 = (A_j^2(y) + C_j^2(y)) \cos^2 \beta\pi/2 + (B_j^2(y) + D_j^2(y)) \sin^2 \beta\pi/2 + \\ + (A_j(y)D_j(y) + C_j(y)B_j(y)) \sin \beta\pi. \tag{19}$$

Согласно соотношениям (10) и (11) справедливы равенства

$$\rho_j(y) = \rho_{n-j}(y), \quad \sigma_j(y) = -\rho_{n-j}(y), \tag{20}$$

поэтому неравенства (9) достаточно доказать для $1 \le j \le [n/2]$.

Доказательство п. 2. Пусть $\varphi(k)$ выпукла вниз и $y = \pi/n$. Воспользовавшись соотношениями (15)–(19), будем иметь

$$|\lambda_j m(\pi/n)|^2 = A_j^2(\pi/n) \cos^2 \beta\pi/2 + B_j^2(\pi/n) \sin^2 \beta\pi/2, \tag{21}$$

где

$$A_j(\pi/n) = \psi(j) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\psi(mn+j) + \psi(mn-j)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(j), \tag{22}$$

$$a_k(j) = \psi(2kn+j) - \psi((2k+1)n-j) - \psi((2k+1)n+j) + \psi((2k+2)n-j),$$

и

$$B_j(\pi/n) = \psi(j) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\psi(mn+j) - \psi(mn-j)) = \psi(j) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(j), \tag{23}$$

$$b_k(j) = \psi((2k+1)n-j) - \psi((2k+1)n+j) - \\ - \psi((2k+2)n-j) + \psi((2k+2)n+j).$$

В силу выпуклости функции $\psi(\cdot)$

$$a_k(j) > 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,(n)}, \tag{24}$$

где

$$(n) = \begin{cases} [n/2], & n = 2p-1, \quad p \in N, \\ n/2 - 1, & n = 2p, \quad p \in N, \end{cases} \tag{25}$$

и $b_k(j) > 0$ при $j = 1, 2, \ldots, [n/2]$.

Кроме того, при $j = n/2$, $n = 2p$, $p \in N$, выполняется равенство $A_j(\pi/n) = 0$. Поэтому в рассматриваемом случае вследствие (21) $\lambda_j(\pi/n) > 0$ при всех β, если n нечетно и при всех $\beta \ne 2p$, $p \in Z$, если n четно, т. е. неравенство (9) выполняется.

В дальнейшем требуется более полная информация о функциях, определенных соотношениями (15)–(18). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если функция $\psi(k)$ удовлетворяет условиям п. 3 теоремы 1, то при любых значениях $j = \overline{1,(n)}$ справедливы оценки*

$$A_j(y) \geq A_j(\pi/n) > 0, \quad B_j(y) > 0, \quad y \in R, \tag{26}$$

$$C_j(y) > 0, \quad D_j(y) > 0, \quad y \in (0, \pi/n), \tag{27}$$

$$C_j(y) < 0, \quad D_j(y) < 0, \quad y \in (\pi/n, 2\pi/n), \tag{28}$$

$$C_j(l\pi/n) = 0, \quad D_j(l\pi/n) = 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Доказательство. Докажем сначала первое неравенство соотношения (26).

Покажем, что $\forall\, \varepsilon > 0$ на промежутке $(\varepsilon/n, 2\pi/n - \varepsilon/n)$ функция $A_j(y)$ дифференцируема, убывает на $(\varepsilon/n, \pi/n)$ и возрастает на $(\pi/n, 2\pi/n - \varepsilon/n)$, а в точке π/n, являющейся ее точкой минимума, принимает положительное значение. Формально дифференцируя ряд (15), получаем

$$\frac{d}{dy} A_j(y) = -\sum_{m=1}^{\infty} (\psi(mn+j) + \psi(mn-j))\, mn \sin mny =$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi(mn+j)}{mn+j} + \frac{\varphi(mn-j)}{mn-j} \right) mn \sin mny. \tag{30}$$

Поскольку

$$\left\{ \left(\frac{\varphi(mn+j)}{mn+j} + \frac{\varphi(mn-j)}{mn-j} \right) mn \right\}_{n=1}^{\infty}$$

монотонно стремится к нулю при $m \to \infty$, то (см., например, [11, с. 16], ряд (30) равномерно сходится на $(\varepsilon/n, 2\pi/n - \varepsilon/n)$, что обосновывает правомерность дифференцирования.

Убедимся, что $A_j'(y) < 0$, если $y \in (\varepsilon/n, \pi/n)$ и $A_j'(y) > 0$, если $y \in (\pi/n, 2\pi/n - \varepsilon/n)$. Для этого воспользуемся следующим утверждением (см., например, [11, с. 297–298].

Лемма 3. *Пусть $a_1 \geq a_2 \ldots \to 0$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1} a_\nu < \infty$ и последовательность $\{a_n\}$ выпукла. Тогда сумма ряда $g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x$ положительна на $(0, \pi)$ за исключением случая $a_1 = a_2 = \ldots = 0$.*

Вследствие (4) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \varphi(k) < \infty$, поэтому, чтобы воспользоваться леммой, достаточно убедиться в том, что последовательность

$$\left\{ \left(\frac{\varphi(mn+j)}{mn+j} + \frac{\varphi(mn-j)}{mn-j} \right) mn \right\}_{n=1}^{\infty}$$

выпукла.

Не умаляя общности, будем считать числа $\varphi(k)$ значениями некоторой выпуклой дважды дифференцируемой при всех $v \geq 1$ функции $\varphi(v)$. Нам следует показать, что функция

$$(\psi(v+j) + \psi(v-j))v = \left(\frac{\varphi(v+j)}{v+j} + \frac{\varphi(v-j)}{v-j} \right) v$$

является убывающей и выпуклой на $[1+j, \infty)$. Имеем

$$\frac{d}{dv}\left[\left(\frac{\varphi(v+j)}{v+j}+\frac{\varphi(v-j)}{v-j}\right)v\right] = \frac{v\varphi'(v+j)}{v+j} + $$
$$+ \frac{v\varphi'(v-j)}{v-j} + \frac{j\varphi(v+j)}{(v+j)^2} - \frac{j\varphi(v-j)}{(v-j)^2}. \tag{31}$$

$$\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{\varphi(v+j)}{v+j}+\frac{\varphi(v-j)}{v-j}\right)v\right] = \frac{v\varphi''(v+j)}{v+j} + \frac{v\varphi''(v-j)}{v-j} +$$
$$+ \frac{2j\varphi'(v+j)}{(v+j)^2} - \frac{2j\varphi'(v-j)}{(v-j)^2} - \frac{2j\varphi(v+j)}{(v+j)^3} + \frac{2j\varphi(v-j)}{(v-j)^3}. \tag{32}$$

Анализируя соотношения (31), (32) и учитывая при этом, что в рассматриваемом случае $\varphi(v)$ выпукла и строго убывает, приходим к нужному заключению.

Итак, для ряда (30) условия леммы 3 выполняются. Поэтому $\forall\,\varepsilon>0$ $A_j'(y)<0$ при $y\in(\varepsilon/n,\pi/n)$ и $A_j'(y)>0$ при $y\in(\pi/n,2\pi/n-\varepsilon/n)$. Значит, на промежутке $(0,\pi/n)$ функция убывает, а на промежутке $(\pi/n,2\pi/n)$ — возрастает, а так как она непрерывна при $y\in(0,2\pi/n)$, то отсюда заключаем, что в точке $y=\pi/n$ она принимает наименьшее значение, т. е. $\forall\,y\in(0,$ $2\pi/n)$ $A_j(y)\geq A_j(\pi/n)$. Вследствие (22) и (24) в рассматриваемом случае $A_j(\pi/n)>0$, и так как всегда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\psi(mn-j)-\psi(mn+j))\cos mny \leq \sum_{m=1}^{\infty}(\psi(mn-j)-\psi(mn+j)) < \psi(j),$$

то и $B_j(y)>0$. Соотношение (26) доказано.

Неравенства (27) в условиях теоремы являются простыми следствиями леммы 3, а поскольку $C_j(2\pi/n-y)=-C_j(y)$ и $D_j(2\pi/n-y)=-D_j(y)$, то из (27) получаем и неравенства (28). Равенства (29) очевидны. Лемма 2 доказана.

Лемма 2 позволяет доказать неравенства (9), если $\psi(k)$, β и y удовлетворяют условиям п. 3 и п. 4 теоремы 1 $\forall\,j=\overline{1,(n)}$, где (n) определено соотношением (25). Когда $\beta\in(4p,\ 1+4p)\cup(2+4p,3+4p)$, тогда $\sin\beta\pi/2$ и $\cos\beta\pi/2$ имеют одинаковые знаки и не равны нулю. Поэтому на основании представления (19) и неравенств (26) и (27) убеждаемся в справедливости неравенств (9), если $y\in(0,\pi/n)$. Если же $\beta\in Z$, то представление (19) имеет вид

$$|\lambda_j(y)|^2 = (A_j^2(y)+C_j^2(y))\cos^2\beta\pi/2 + (B_j^2(y)+D_j^2(y))\sin^2\beta\pi/2, \tag{33}$$

а значит, вследствие (25)–(28) неравенства (9) выполняются и в этом случае.

Таким образом, для окончательного доказательства теоремы осталось рассмотреть случай, когда $j=n/2$ при четном n. Используя (10)–(12), получаем

$$\rho_{n/2}(y) = \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\psi_\beta(y-x_\nu)\cos x_\nu n/2 = \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\Psi_\beta(y-x_\nu),$$

$$\sigma_{n/2}(y) = \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\Psi_\beta(y-x_\nu)\sin x_\nu n/2 \equiv 0,$$

$$|\lambda_{n/2}(y)| = |\rho_{n/2}(y)| = 2\left|\sum_{m=0}^{\infty}\psi\left((2m+1)\frac{n}{2}\right)\cos\left((2m+1)\frac{n}{2}y-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right| =$$
$$= 2\,|C(y)\cos\beta\pi/2+S(y)\sin\beta\pi/2|. \tag{34}$$

где

$$C(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi\left((2m+1)\frac{n}{2}\right)\cos\left((2m+1)\frac{n}{2}y\right), \tag{3}$$

$$S(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi\left((2m+1)\frac{n}{2}\right)\sin\left((2m+1)\frac{n}{2}y\right). \tag{3}$$

Нужное нам заключение будет вытекать из этих соотношений и следующ леммы Л. Фейера [12].

Лемма 4. *Если коэффициенты ряда* $g(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos(2\nu+1)t$ *пол жительны и трижды монотонно стремятся к нулю, то* $g(t)>0$ *при* $0<t<\pi/2$, $g(t)<0$ *при* $\pi/2<t<\pi$ *и* $g(t)$ *монотонно убывает при* $0<t<\pi$.

Если же коэффициенты ряда $h(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \sin(2\nu+1)t$ *положительн и дважды монотонно стремятся к нулю, то* $h(t)>0$ *при* $0<t<\pi$.

В рассматриваемом случае коэффициенты рядов (35) и (36) удовлетворя соответствующим условиям леммы 3, поэтому, применяя ее, на основании соо ношения (33) заключаем, что неравенство $|\lambda_{n/2}(\psi;\beta,y)| = 0$ выполняется таких случаях:

а) $y\in(0,\pi/n)$, $\beta\in(4p,\ 1+4p)\cup(2+4p,3+4p)$;

б) $y\in(\pi/n,2\pi/n)$, $\beta\in(1+4p,\ 2+4p)\cup(3+4p,4+4p)$;

в) $y\in[0,\pi/n)\cup(\pi/n,2\pi/n]$, $\beta=2p$;

г) $y\in(0,2\pi/n)$, $\beta=2p-1$;

где $p\in Z$. Теорема доказана.

В работах [4, 5] отмечалось, что при $\psi(k)=k^{-r}$, $r=2,3,\ldots,\beta=r$ условия

$$y \neq \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \beta = 2p-1, \quad p\in Z; \\ \pi/n & \text{при} \quad \beta = 2p, \quad p\in Z; \end{cases} \tag{3}$$

являются не только достаточными для существования и единственности инте поляционного сплайна, но и необходимыми для этого. Оказывается, что эт факт справедлив и в общем случае. Точнее, справедливо следующее утвер дение.

Теорема 2. *Если ядро* $\Psi_\beta(t)$ *удовлетворяет всем условиям п. 4 теорем 1, то при любом четном* n *условия* (37) *являются необходимыми для сущес вования и единственности интерполяционного SK-сплайна* $S\Psi_\beta(f;y,\cdot)$.

Доказательство. Следуя работе [9], записываем интерполяционные усл вия (3) в виде системы

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\Psi_\beta(y_j-x_i) + C_{n+1} = f(y_j), \quad 1\le j\le n, \qquad \sum_{i=1}^{n} C_i = 0 \tag{3}$$

или $MC=F$, где

$$M = \begin{pmatrix} \psi_\beta(y_1-x_1) & \ldots & \psi_\beta(y_1-x_i) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_\beta(y_n-x_1) & \ldots & \psi_\beta(y_n-x_n) & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{n+1} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(y_1) \\ \vdots \\ f(y_n) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $\lambda_i=\lambda_j(y)$ матрицы M в случае, когда $1\le j\le n-$

как показано в [9], совпадают со значениями $\lambda_j(\psi; \beta, y)$, определяющимися равенством (7), и

$$\lambda_n(y) = \frac{\left(\psi_\beta^* + \sqrt{\left(\psi_\beta^*\right)^2 + 4n}\right)}{2}, \quad \lambda_{n+1}(y) = \frac{\left(\psi_\beta^* - \sqrt{\left(\psi_\beta^*\right)^2 + 4n}\right)}{2},$$

где

$$\psi_\beta^* = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\beta(y - x_\nu).$$

Как известно, $\det M = 0$ в том и только в том случае, когда M имеет нулевое собственное значение.

Поскольку для $j = n/2$ при четных n справедливы соотношения (34)–(36), то при

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta = 2p - 1, \quad p \in Z; \\ \pi/n, & \text{при } \beta = 2p, \qquad p \in Z; \end{cases}$$

$\lambda_{n/2}(y) = 0$ и, следовательно, $\det M = 0$. Теорема доказана.

Объединяя утверждения теорем 1 и 2, приходим к такому заключению.

Следствие. *Пусть выполняются условия п.* 4 *теоремы* 1, *тогда для того чтобы существовал единственный интерполяционный SK-сплайн* $S\Psi_\beta(f; y, \cdot)$ *для произвольного набора* $F = \{f(y_k)\}_{k=1}^n$, $f \in C$, *в точках* $y_i = 2\pi i/n + y$, *где* $y = \pi/n$ *для* $\beta = 2p$ *и* $y = 0$ *для* $\beta = 2p - 1$, $p \in Z$, *необходимо и достаточно, чтобы число* n *разбиений промежутка* $[0, 2\pi]$ *было нечетным.*

1. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsch F. L.* Best approximation and convergence properties of higher order spline approximations // J. Math. Mech. – 1965. – **14**. – P. 231–244.
2. *Субботин Ю. Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 24–42.
3. *Subbotin Yu. N.* Interpolating splines // Approximation theory. Proceed. Conf. Poznan, 22–26 Aug. 1972 y. – Warszawa: PWN, 1975. – P. 221–234.
4. *Женсыкбаев А. А.* Некоторые вопросы приближения сплайнами в функциональных пространствах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1973. – 11 с.
5. *Гальтин П. В.* О разрешимости задачи периодической сплайнинтерполяции // Мат. заметки. – 1970. – **8**, № 5. – С. 563–573.
6. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Там же. – 1992. – **51**, вып. 6. – С. 126–136.
7. *Шевалдин В. Т.* Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной // Там же. – 1993. – **53**, вып. 2. – С. 145–151.
8. *Golomb M.* Approximation by periodic spline interpolations on uniform meshens // J. Approx. Theory. – 1968. – **1**. – P. 26–65.
9. *Кушпель А. К.* Экстремальные свойства сплайнов и поперечники классов периодических функций в пространстве $C_{2\pi}$. – Киев, 1984. – 41 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.25).
10. *Кушпель А. К.* SK-сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$. – Киев, 1985. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.51).
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
12. *Fejer L.* Trigonometrishe Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – **39**. – P. 18–59.

Получено 29.12.93