УДК 517. 948

С. В. Переверзев, д-р физ.-мат. наук,
К. Ш. Махкамов, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНФОРМАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЪ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Exact order of information complexity is determined for integral equations whose kernels have the power singularity and free terms belong to the corresponding Hölder space.

Знайдено точний степеневий порядок інформаційної складності інтегральних рівнянь, ядра яких мають степеневу особливість, а вільні члени належать до відповідного простору Гельдера.

1. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1], где приведена общая постановка задачи об информационной сложности операторных уравнений II рода. Поэтому по ходу изложения мы будем без дополнительных разъяснений использовать терминологию и обозначения из [1]. Напомним, что под информационной сложностью операторных уравнений из некоторого фиксированного класса мы, следуя Дж. Траубу и Х. Вожьняковскому [2], понимаем минимальное число элементарных операций (э. о.), которые необходимо выполнить для построения приближенного решения любого уравнения из этого класса с заданной точностью.

Нас будет интересовать информационная сложность слабо сингулярных интегральных уравнений

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^1 \frac{H(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} z(\tau)d\tau + f(t), \quad 0<\alpha<1, \tag{1}$$

рассматриваемых в пространстве C непрерывных на $[0,1]$ функций $\varphi(t)$ с обычной нормой $\|\varphi\|_C = \sup\{|\varphi(t)|\}$, $t\in[0,1]$. Из результатов [3] следует, что если ядра $H(t,\tau)$ принадлежат шару $W^1_{C,\beta}$ некоторого радиуса β в соболевском пространстве непрерывно дифференцируемых функций двух переменных W^1_C, т. е.

$$\|H\|_{W^1_C} := \sup\left\{|H(t,\tau)| + \left|\frac{\partial}{\partial t}H(t,\tau)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \tau}H(t,\tau)\right|,\ t,\tau\in[0,1]\right\} \le \beta, \tag{2}$$

то при фиксированном $\alpha\in(0,1)$ слабо сингулярные интегральные операторы из (1) действуют из C в пространство Гельдера $C^{1-\alpha}$ функций $\varphi\in C$ таких, что

$$\|H\|_{C^{1-\alpha}} := \|\varphi\|_C + \sup_{\substack{0\le t\le 1-h\\ 0<h<1}} \frac{|\varphi(t+h)-\varphi(t)|}{h^{1-\alpha}} < \infty.$$

При этом

$$\|H\|_{C\to C} \le \frac{2^\alpha\beta}{1-\alpha}, \quad \|H\|_{C\to C^{1-\alpha}} \le \frac{3\cdot 2^\alpha\beta}{1-\alpha}. \tag{3}$$

Так как дальнейшее повышение гладкости ядер $H(t,\tau)$ слабо сингулярных интегральных операторов из (1) не приводит, вообще говоря, к повышению гладкости образов функций из C при действии этих операторов, то в дальнейшем мы будем рассматривать уравнения (1) с ядрами $H(t,\tau)\in W^1_{C,\beta}$ и свободными членами $f(t)$ из единичного шара $C_1^{1-\alpha}$ в пространстве $C^{1-\alpha}$, т. е. $\|f\|_{C^{1-\alpha}} \le 1$. Кроме того, как обычно, будем считать, что уравнения (1) однозначно разрешимы и

$$\|(I-H)^{-1}\|_{C\to C} \le \beta_1, \tag{4}$$

где I — тождественный оператор, а $\beta_1 > 1$. Класс таких слабо сингулярных уравнений (1), определяемых условиями (2), (4), обозначим через $\psi^\alpha = \psi^\alpha(\beta, \beta_1)$.

Как отмечалось в [4], вопрос о точном порядке информационной сложности слабо сингулярных интегральных уравнений был поставлен Г. М. Вайникко на симпозиуме по методам решения сингулярных уравнений (Тарту, 1989 г.). Для случая уравнений с логарифмической особенностью (уравнений Пайерлса) ответ на этот вопрос получен в [4]. В настоящей статье мы найдем точный в степенной шкале порядок информационной сложности уравнений из класса ψ^α, т. е. получим ответ на вопрос Г. М. Вайникко для слабо сингулярных интегральных уравнений со степенной особенностью и свободными членами малой гладкости.

2. Пусть, как и в [1], $E_N(\psi^\alpha, C)$ — минимальная погрешность в метрике C, которую могут обеспечить на классе ψ^α всевозможные алгоритмы построения приближенного решения, требующего для своей реализации не более чем N элементарных операций.

Лемма 1. *При* $0<\alpha<1$ $E_N(\psi^\alpha, C) \ge cN^{-1+\alpha}$, *где постоянная* c *зависит лишь от параметров* β, β_1, *участвующих в определении класса* $\psi^\alpha(\beta, \beta_1)$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1 из [1], устанавливается, что

$$E_N(\psi^\alpha, C) \ge c\delta_N(C_1^{1-\alpha}, C), \tag{5}$$

где $\delta_N(C_1^{1-\alpha}, C)$ – предтабличный поперечник шара $C_1^{1-\alpha}$ в пространстве C. С другой стороны, из соотношения (5) [5] и утверждения б) теоремы из [6, с. 270] следует

$$\delta_N(C_1^{1-\alpha}, C) \asymp N^{-1+\alpha}. \tag{6}$$

Справедливость леммы 1 вытекает теперь из (5) и (6).

Методам решения слабо сингулярных интегральных уравнений посвящено значительное количество работ. Полученные в этом направлении результаты в наиболее завершенной форме представлены в монографии [7]. В частности, для уравнений (1) с ядрами $H(t,\tau) \in W^1_{C,\beta}$, но с непрерывно дифференцируемыми на $[0, 1]$ свободными членами $f(t)$, т. е. для более узкого, чем ψ^α, класса уравнений в [7] предложен прямой метод размерности n, точность которого $O(n^{-1})$. Так как при реализации прямого метода размерности n требуется решить систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными и, следовательно, выполнить не менее n^2 э. о., то в пересчете на число операций $N = O(n^2)$ точность метода из [7] на классе ψ^α не может быть по порядку выше, чем $N^{-1/2}$. Отметим, что для класса ψ^α эта оценка является лучшей из тех, что известны нам. Так, алгоритмы из [3] после выполнения N э. о. обеспечивают на классе ψ^α точность не выше $N^{-(1+\alpha)/2}$ по порядку. Иными словами, по крайней мере при $\alpha \in (0, 1/2)$ нам не известны алгоритмы приближенного решения уравнений (1), позволяющие в степенной шкале достигнуть на классе ψ^α нижней оценки порядка величины E_N, указанной в лемме 1. Тем не менее, такой алгоритм существует и мы его сейчас опишем.

3. Пусть $X_1(t), X_2(t), \ldots$ — ортонормированная система кусочно-постоянных функций, введенная А. Хааром. Напомним, что $X_1(t) = 1$, а для $k = 2^{m-1} + j$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$,

$$X_k(t) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2}, & t \in \left[\dfrac{j-1}{2^{m-1}}, \dfrac{j-1/2}{2^{m-1}}\right), \\ -2^{(m-1)/2}, & t \in \left[\dfrac{j-1/2}{2^{m-1}}, \dfrac{j}{2^{m-1}}\right), \\ 0, & t \notin \left[\dfrac{j-1}{2^{m-1}}, \dfrac{j}{2^{m-1}}\right). \end{cases}$$

Обозначим через S_n ортопроектор на первые n функций системы Хаара, т. е.

$$S_n\varphi(t) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n X_k(t) X_k(\tau)\right)\varphi(t)\,d\tau. \tag{7}$$

Известно [8, с. 81], что

$$\| I - S_n \|_{C^{1-\alpha} \to C} \le 3n^{-1+\alpha}. \tag{8}$$

Кроме того, для любого элемента φ из пространства L суммируемых по Лебегу на $(0, 1)$ функций справедливо неравенство [8, с. 82]

$$\| \varphi - S_n\varphi \|_L \le 12\omega_L(n^{-1}, \varphi), \tag{9}$$

где $\omega_L(\delta, \varphi)$ — интегральный модуль непрерывности функции φ, определяемый равенством

$$\omega_L(\delta, \varphi) := \sup_{0 < h \le \delta} \int_0^{1-h} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|\,dt, \quad 0 < \delta < 1.$$

Положим

$$Q_m = (2^{m-1}, 2^m] \times \{1\} \bigcup_{k=1}^{m} [1, 2^{m-k}] \times (2^{k-1}, 2^k].$$

В качестве информации об уравнениях (1) из класса ψ^α мы будем рассматривать следующие наборы значений скалярных произведений:

$$T_m(H, f) = \{(X_k, HX_l), (f, X_n): (k, l) \in Q_m, n = \overline{1, 2^{2m}}\}, \tag{10}$$

где

$$(X_k, HX_l) = \int_0^1 X_k(t) \int_0^1 \frac{H(t, \tau)}{|t - \tau|^\alpha} X_l(t)\,d\tau\,dt.$$

$$(f, X_n) = \int_0^1 f(t) X_n(t)\, dt.$$

Легко видеть, что число $\operatorname{card}(T_m)$ значений скалярных произведений, входящих в наборы $T_m(H, f)$, удовлетворяет порядковому равенству

$$\operatorname{card}(T_m) \asymp m 2^{2m}. \tag{11}$$

Как и в [1], обозначим через $\mathcal{A}_N(T_m)$ множество алгоритмов приближенного решения уравнений (1), использующих в качестве информации значения скалярных произведений из наборов $T_m(H, f)$ и требующих для своей реализации не более чем N э. о. над этими значениями.

Поставим в соответствие слабо сингулярному интегральному оператору H из уравнения (1) интегральный оператор

$$H_m = H_m(H) = \sum_{k=1}^{m} S_{2^{2m-k}} H (S_{2^k} - S_{2^{2k-1}}) + S_{2^{2m}} H S_1 \tag{12}$$

и рассмотрим алгоритм $A_m \in \mathcal{A}_N(T_m)$, при котором каждому уравнению (1) из класса ψ^{α} в качестве приближенного решения сопоставляется функция

$$z(A_m) = z_n + (I - H_m S_{2^n})^{-1} (S_{2^{2m}} f + H_m z_n - z_n), \tag{13}$$

где z_n — решение уравнения с конечномерным оператором

$$z_n = H_m S_{2^n} z_n + S_{2^{2m}} f, \qquad n = [2m/3]. \tag{14}$$

В силу леммы 4 из [1] для алгоритма A_m справедливо включение

$$A_m \in \mathcal{A}_N(T_m), \qquad N \asymp m 2^{2m}. \tag{15}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *При* $\alpha \in (0, 1)$

$$c N^{-1+\alpha} \le E_N(\Psi^{\alpha}, C) \le c_1 N^{-1+\alpha} \log_2^{2-\alpha} N,$$

где постоянные c *и* c_1 *зависят лишь от параметров* β, β_1, *входящих в определение класса* $\Psi^{\alpha} = \Psi^{\alpha}(\beta, \beta_1)$. *При этом оптимальный порядок* $E_N(\Psi^{\alpha}, C)$ *в степенной шкале реализует алгоритм* A_m, $m 2^{2m} \asymp N$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Пусть* $H(t, \tau) \in W^1_{C,\beta}$. *Тогда при любом* $t \in [0, 1]$ *интегральный модуль непрерывности функции* $g_t(\tau) = H(t, \tau) / |t - \tau|^{\alpha}$ *удовлетворяет неравенству* $\omega_L(\delta, g_t) \le c \delta^{1-\alpha}$, *где постоянная* c *зависит от* α *и* β, *но не зависит от* t.

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $h \in (0, 1)$ и любом $t \in [0, 1]$

$$\int_0^{1-h} \left| |t - \tau - h|^{-\alpha} - |t - \tau|^{-\alpha} \right| d\tau \le \frac{2^{1+\alpha}}{1-\alpha} h^{1-\alpha} + O(h). \tag{16}$$

В самом деле.

$$\int_0^{1-h} \Big| |t-\tau-h|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \Big| d\tau = (v = \tau - t) =$$

$$= \int_0^{1-h-t} \Big| |v+h|^{-\alpha} - |v|^{-\alpha} \Big| dv \le \int_{-1}^{1} \Big| |v+h|^{-\alpha} - |v|^{-\alpha} \Big| dv =$$

$$= \int_{-1}^{0} \Big| |v+h|^{-\alpha} - |v|^{-\alpha} \Big| dv + \int_0^1 \Big| |v+h|^{-\alpha} - |v|^{-\alpha} \Big| dv. \tag{17}$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \Big| |v+h|^{-\alpha} - |v|^{-\alpha} \Big| dv = \int_0^1 v^{-\alpha} dv - \int_0^1 (v+h)^{-\alpha} dv =$$

$$= (1-\alpha)^{-1} - (1+h)^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1} + h^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1} =$$

$$= h^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1} - h + O(h^2). \tag{18}$$

Кроме того,

$$\int_{-1}^{0} \Big| |v+h|^{-\alpha} - |v|^{-\alpha} \Big| dv = \int_0^1 \Big| |h-v|^{-\alpha} - v^{-\alpha} \Big| dv =$$

$$= \int_0^{h/2} (v^{-\alpha} - (h-v)^{-\alpha})\, dv + \int_{h/2}^{h} ((h-v)^{-\alpha} - v^{-\alpha})\, dv +$$

$$+ \int_h^1 ((h-v)^{-\alpha} - v^{-\alpha})\, dv =$$

$$= 4h^{1-\alpha}2^{\alpha-1}(1-\alpha)^{-1} - h^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1} +$$

$$+ (1-h)^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1} - (1-\alpha)^{-1} =$$

$$= 2^{1+\alpha}h^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1} - h^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1} - h + O(h^2). \tag{19}$$

Соотношение (16) следует теперь из (17)–(19). Отметим также, что в силу (3)

$$\int_0^{1-h} |t-\tau-h|^{-\alpha} d\tau \le \int_0^1 |t-\tau-h|^{-\alpha} d\tau \le 2^{\alpha}(1-\alpha)^{-1}. \tag{20}$$

Учитывая определение функции $g_t(\tau)$, для $H \in W^1_{C,\beta}$ имеем

$$\int_0^{1-h} |g_t(\tau+h) - g_t(\tau)|\, d\tau = \int_0^{1-h} \left| \frac{H(t,\tau+h)}{|t-\tau-h|^{\alpha}} - \frac{H(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}} \right| d\tau =$$

$$= \int_0^{1-h} \Big| H(t,\tau)\left[|t-\tau-h|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha}\right] +$$

$$+ |t-\tau-h|^{-\alpha} \int_{\tau}^{\tau+h} \frac{\partial H(t,u)}{\partial u} du \Big| d\tau \le$$

$$\leq \|H\|_{W_C^1} \int\limits_0^{1-h} \Big| |t-\tau-h|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \Big| d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{1-h} \int\limits_{\tau}^{\tau+h} \left| \frac{\partial H(t,u)}{\partial u} \right| \frac{d\tau}{|t-\tau-h|^{\alpha}} \leq$$

$$\leq \|H\|_{W_C^1} \left\{ \int\limits_0^{1-h} \Big| |t-\tau-h|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \Big| + h \int\limits_0^{1-h} |t-\tau-h|^{-\alpha} d\tau \right\}. \tag{21}$$

Утверждение леммы следует теперь из (16), (20), (21) и определения интегрального модуля непрерывности.

***Замечание* 1.** Из доказательства леммы 2 видно, что в качестве постоянной c, фигурирующей в оценке для $\omega_L(\delta, g_t)$, может быть выбрана величина

$$c_{\alpha,\beta} = \frac{3 \cdot 2^{\alpha} \beta}{(1-\alpha)}. \tag{22}$$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \in (0, 1)$, *а ядро* $H(t, \tau)$ *слабо сингулярного интегрального оператора*

$$H\varphi(t) = \int\limits_0^1 \frac{H(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}} \varphi(\tau) d\tau \tag{23}$$

принадлежит шару $W^1_{C,\beta}$. *Тогда*

$$\|H - HS_n\|_{C \to C} \leq 12 c_{\alpha,\beta} n^{-1+\alpha}, \tag{24}$$

$$\|H - HS_n\|_{C^{1-\alpha} \to C} \leq 36 c_{\alpha,\beta} n^{-2+2\alpha}, \tag{25}$$

где постоянная $c_{\alpha,\beta}$ *определена в замечании* 1.

Доказательство. В силу леммы 2, замечания 1 и соотношений (7), (9) для любой функции $\varphi \in C$ и любого $t \in [0, 1]$ имеем

$$|H\varphi(t) - HS_n\varphi(t)| = \left| \int\limits_0^1 \frac{H(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}} \varphi(\tau) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^1 \frac{H(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k(\tau) \int\limits_0^1 X_k(u) \varphi(u) du \right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^1 \left(\frac{H(t,u)}{|t-u|^{\alpha}} - \sum_{k=1}^{n} X_k(u) \int\limits_0^1 \frac{H(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}} X_k(\tau) d\tau \right) \varphi(u) du \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^1 (g_t(u) - S_n g_t(u)) \varphi(u) du \right| \leq \|\varphi\|_C \|g_t - S_n g_t\|_L \leq$$

$$\leq 12 \|\varphi\|_C \, \omega_L(n^{-1}, g_t) \leq 12 c_{\alpha,\beta} n^{-1+\alpha} \|\varphi\|_C.$$

Таким образом, соотношение (24) доказано.

Для доказательства (25) заметим, что для ортопроектора S_n справедливо соотношение $S_n^2 = S_n$. Но тогда из (24) и (8) находим

$$\| H - HS_n \|_{C^{1-\alpha} \to C} = \| (H - HS_n)(I - S_n) \|_{C^{1-\alpha} \to C} \le$$

$$\le \| H - HS_n \|_{C \to C} \| I - S_n \|_{C^{1-\alpha} \to C} \le 36 c_{\alpha,\beta} n^{-2+2\alpha}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Погрешность* $e(\Psi^{\alpha}, A_m, C)$ *алгоритма* A_m *на классе* Ψ^{α} *в метрике* C *удовлетворяет соотношению*

$$e(\Psi^{\alpha}, A_m, C) \le c m 2^{-2m(1-\alpha)},$$

где постоянная c *зависит лишь от параметров* α, β, β_1, *входящих в определение класса* $\Psi^{\alpha} = \Psi^{\alpha}(\beta, \beta_1)$.

Доказательство леммы 4 полностью повторяет ход рассуждений из [1], связанных с доказательством соотношения (34). В этих рассуждениях следует положить $r = 1 - \alpha$, $X^r = C^{1-\alpha}$, $X = C$, $P_n = S_n$, а вместо соотношения (15) использовать доказанную выше лемму 3.

Вернемся к доказательству теоремы. Ее утверждение следует теперь из леммы 1 (оценка снизу), леммы 4 (оценка сверху) и включения (15).

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

1. *Переверзев С. В., Махкамов К. Ш.* Галеркинская информация, гиперболический крест и сложность операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 5. – С. 639–648.
2. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
3. *Габдулхаев Б. Г., Горлов В. Е.* О сходимости полигонального метода решения слабо сингулярных интегральных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – С. 60–72.
4. *Pereverzev S. V., Scharipov C. C.* Information complexity of equations of the second kind with compact operators in Hilbert Space // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 176–202.
5. *Бабенко К. И.* О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 1. – С. 3–27.
6. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
7. *Вайникко Г., Педас А., Уба П.* Методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений. – Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1984. – 94 с.
8. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.

Получено 23.04.93