УДК 517.518: 519.652

М. М. Пагіря (Ужгород. нац. ун-т)

ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО ЧЛЕНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ ТІЛЕ

An estimate of a remainder term of the Thiele interpolational continued fraction is obtained.

Получена оценка остаточного члена для интерполяционной цепной дроби Тиле.

Вступ. Задача інтерполяції функцій однієї дійсної змінної на проміжку $[\alpha, \beta]$ добре досліджена у випадку лінійної інтерполяції, тобто коли інтерполяційна функція вибирається у вигляді узагальненого многочлена [1, 2] $g(x; f; c_0, c_1, \ldots, c_n) = c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$, де $\{\varphi_i(x)\}$ — система функцій Чебишова. У випадку нелінійної інтерполяції функцію $g(x; f; c_0, c_1, \ldots, c_n)$ часто вибирають у вигляді апроксимації Паде [3] або ланцюгових дробів [4]. Вперше інтерполяційний ланцюговий дріб був розглянутий в 1909 році Т. Н. Тіле [5]. Формула залишкового члена для такого дробу була встановлена Ш. Є. Мікеладзе [6]. Узагальнення результату Мікеладзе для інтерполяційного ланцюгового дробу, коли частинні чисельники і знаменники многочлени, було отримано в роботі [7]. В даній роботі обґрунтовуються нові оцінки залишкового члена для інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле (теорема 2 та теорема 3).

Інтерполяція функцій ланцюговим дробом. Формула залишкового члена. Нехай функція $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$ і задана своїми значеннями в точках множини $\Lambda = \{x_i : x_i \in [\alpha, \beta], i = 0, 1, \ldots, n, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}$. Нехай $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Наближення функції шукаємо у вигляді функціонального ланцюгового дробу

$$b_0(x) + \cfrac{a_1(x)}{b_1(x) + \cfrac{a_2(x)}{b_2(x) + \ldots + \cfrac{a_n(x)}{b_n(x)}}} = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)},$$

де $a_n(x), b_n(x) \in C[\alpha, \beta]$, $a_k(x) \not\equiv 0$. Скінченному функціональному ланцюговому дробу поставимо у відповідність відношення двох узагальнених многочленів

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}. \tag{1}$$

Із класу функціональних ланцюгових дробів (1) виділимо підклас інтерполяційних ланцюгових дробів (ІЛД), тобто таких, що задовольняють співвідношення

$$\frac{P_n(x_i)}{Q_n(x_i)} = b_0(x_i) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x_i)}{b_k(x_i)} = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Якщо функція $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$, канонічні чисельник $P_n(x)$ та знаменник $Q_n(x)$ ланцюгового дробу (1) є многочленами, $\deg P_n(x) \leq n$, то залишковий член інтерполяційного ланцюгового дробу задається формулою [7]

$$r_n(x) = f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}{(n+1)!\,Q_n(x)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x)Q_n(x)]\big|_{x=\zeta}, \tag{3}$$

де $\xi \in (\alpha, \beta)$. Проведемо подальші дослідження цієї формули.

Канонічний знаменник $Q_n(x)$ ланцюгового дробу (1) визначається через елементи цього дробу $a_i(x), b_i(x)$ за допомогою формули Ойлера – Міндінга [8, 9]

$$Q_n(x) = B_1^{[n]}(x)\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x) + \sum_{i=1}^{n-3} X_i(x) \sum_{j=i+2}^{n-1} X_j(x) + \sum_{i_1=1}^{n-5} X_{i_1}(x) \sum_{i_2=i_1+2}^{n-3} X_{i_2}(x) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i_3=i_2+2}^{n-1} X_{i_3}(x) + \ldots + \sum_{i_1=1}^{n+1-2l} X_{i_1}(x) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2l} X_{i_2}(x) \ldots \sum_{i_l=i_{l-1}+2}^{n-1} X_{i_l}(x)\right), \qquad (4)$$

де $l = [n/2]$, $[\cdot]$ — ціла частина числа, $X_i(x) = \dfrac{a_{i+1}(x)}{b_i(x) b_{i+1}(x)}$, $B_1^{[n]}(x) =$
$= \prod_{i=1}^{n} b_i(x)$.

Можна показати, що кількість доданків в одинарній сумі формули (4) дорівнює $n-1$, в подвійній сумі — $(n-3)(n-2)/2!$, в потрійній сумі — $(n-5)(n-$
$-4)(n-3)/3!, \ldots$, в k-й сумі — $\prod_{i=1}^{k} \dfrac{n-2k+i}{k!}$.

Канонічний знаменник $Q_n(x)$ може бути поданий у вигляді [9]

$$Q_n(x) = B_1^{[n]}(x) \sum_{k=0}^{l} R_{k,1}^{[n]}(x), \qquad (5)$$

де

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i_1=s}^{n+1-2k} X_{i_1}(x) \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} X_{i_2}(x) \ldots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} X_{i_k}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, l, \qquad (6)$$

$$R_{0,t}^{[n]}(x) = 1.$$

В свою чергу, $R_{k,s}^{[n]}(x)$ задовольняє рекурентне співвідношення

$$R_{k,s}^{[n]}(x) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} X_i(x) R_{k-1,i+2}^{[n]}(x). \qquad (7)$$

Згідно із формулою Лейбніца похідної m-го порядку добутку двох функцій, з (5) маємо, що

$$(Q_n(x))^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j (B_1^{[n]}(x))^{(m-j)} \sum_{k=0}^{l} (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(j)},$$

а тоді

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[f(x)Q_n(x)] = f^{(n+1)}(x)Q_n(x) + \sum_{m=1}^{n+1} C_{n+1}^m f^{(n+1-m)}(x) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m} C_m^j (B_1^{[n]}(x))^{(m-j)} \sum_{k=0}^{l} (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(j)}. \qquad (8)$$

Крім того, із (7) випливає наступна рекурентна формула:

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \sum_{i=0}^{m} C_m^i X_j^{(i)}(x) (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m-i)}. \qquad (9)$$

Оцінка залишкового члена для ІЛД Тіле. Розглянемо ІЛД Тіле [5, 7, 10]

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k}. \qquad (10)$$

Коефіцієнти b_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, ІЛД (10) визначаються з умови (2) наступним чином: або обчислюється послідовність обернених поділених різниць $\Phi_k[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, за формулою [4, 11]

$$\Phi_k[x_0, \ldots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \quad \Phi_k[x] = f(x),$$

а тоді $b_k = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n$; або за допомогою рекурентного співвідношення [9, 12]

$$b_0 = y_0, \quad b_k = \cfrac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1} + \ldots + \cfrac{x_k - x_1}{-b_1 + \cfrac{x_k - x_0}{y_k - b_0}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 1 ([4]). *ІЛД Тіле* (10) *є дробово-раціональною функцією. Степені многочленів канонічного чисельника* $P_n(x)$ *та канонічного знаменника* $Q_n(x)$ *задовольняють нерівності* $\deg P_n(x) \le [(n+1)/2]$, $\deg Q_n(x) \le [n/2]$.

Теорема 2. *Нехай функція* $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$. *За значеннями функції* $f(x)$ *в точках множини* Λ *побудований ІЛД Тіле* (10). *Тоді для залишкового члена ІЛД Тіле має місце нерівність*

$$\left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \le \frac{\prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)! \, |Q_n(x)|} f^*(b^*)^n \left(\frac{(1 + \sqrt{1+4\rho})^{n+1} - (1 - \sqrt{1+4\rho})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{1+4\rho}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{l} C_{n+1}^{m} \frac{1}{b_*^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \right), \tag{11}$$

де

$$d = \beta - \alpha, \quad b_* = \min_{1 \le i \le n} |b_i|, \quad \rho = \frac{d}{b_*^2},$$

$$b^* = \max_{1 \le i \le n} |b_i|, \quad f^* = \max_{0 \le i \le l} \max_{\alpha \le x \le \beta} \left| f^{(n+1-i)}(x) \right|.$$

Доведення. У випадку ІЛД Тіле $X_j(x) = (x - x_j)/(b_j b_{j+1})$. Оскільки $Y_j = X_j'(x) = 1/(b_j b_{j+1})$ для $j = 1, 2, \ldots, n-1$, і $X_j^{(k)}(x) \equiv 0$, коли $k = 2, 3, \ldots, n-1$, то формула (9) набуває вигляду

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{j=1}^{n+1-2k} \left(X_j(x) (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m)} + m Y_j (R_{k-1,j+2}^{[n]}(x))^{(m-1)} \right). \tag{12}$$

З (6) у випадку ІЛД Тіле маємо, що

$$(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)} = 0 \quad \text{при } k < m. \tag{13}$$

Крім того, згідно із теоремою 1 у цьому випадку $\deg Q_n(x) \le l$ і $B_1^{[n]}$ не залежить від x, тому формула (8) перепишеться так:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [f(x) Q_n(x)] = f^{(n+1)}(x) Q_n(x) + B_1^{[n]} \sum_{m=1}^{l} C_{n+1}^{m} f^{(n+1-m)}(x) \sum_{k=0}^{l} (R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)}. \tag{14}$$

Знайдемо похідні $(R_{k,1}^{[n]}(x))^{(m)}$ при $k = m, m+1, \ldots, l$. Коли $k = m$, з (12) з урахуванням (13) отримуємо, що

$$(R_{m,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{i=1}^{n+1-2m} mY_i(R_{m-1,i_1+2}^{[n]}(x))^{(m-1)} = \sum_{i_1=1}^{n+1-2m} mY_{i_1}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m}(m-1)Y_{i_2}\times$$
$$\times(R_{m-2,i_2+2}^{[n]}(x))^{(m-2)} = \ldots = m!\sum_{i_1=1}^{n+1-2m}Y_{i_1}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m}Y_{i_2}\ldots\sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-1}Y_{i_m}.$$

Позначимо через

$$^{[0]}M_{m,t}^{[n]} = \sum_{j_1=1}^{n+1-2m}Y_{j_1}\sum_{j_2=j_1+2}^{n+3-2m}Y_{j_2}\ldots\sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-1}Y_{j_m}, \quad m = 1, 2, \ldots, l, \tag{15}$$
$$^{[0]}M_{0,t}^{[n]} = R_{0,t}^{[n]} = 1.$$

Легко бачити, що має місце співвідношення $^{[0]}M_{m,t}^{[n]} = \sum_{j=t}^{n+1-2m}Y_j\,{}^{[0]}M_{m-1,j+2}^{[n]}$, а тоді $(R_{m,1}^{[n]}(x))^{(m)} = m!\,{}^{[0]}M_{m,1}^{[n]}$. При $k=m+1$ з (12) маємо

$$(R_{m+1,1}^{[n]}(x))^{(m)} = \sum_{i=1}^{n-1-2m}\left(X_i(x)(R_{m,i+2}^{[n]}(x))^{(m)} + mY_i(R_{m,i+2}^{[n]}(x))^{(m-1)}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1-2m}\left(X_i(x)m!\,{}^{[0]}M_{m,i+2}^{[n]} + mY_i(R_{m,i+2}^{[n]}(x))^{(m-1)}\right) = \ldots$$
$$\ldots = \sum_{i_1=1}^{n-1-2m}\left(X_{i_1}(x)m!\,{}^{[0]}M_{m,i_1+2}^{[n]} + mY_{i_1}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+1-2m}\left(X_{i_2}(x)(m-1)!\,{}^{[0]}M_{m-1,i_2+2}^{[n]} + \right.\right.$$
$$+ (m-1)Y_{i_2}\sum_{i_3=i_2+2}^{n+3-2m}\left(X_{i_3}(x)(m-2)!\,{}^{[0]}M_{m-2,i_3+2}^{[n]} + (m-2)!Y_{i_3}\sum_{i_4=i_3+2}^{n+5-2m}\left(\ldots +\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. + 2Y_{i_{m-1}}\sum_{i_m=i_{m-1}+2}^{n-3}\left(X_{i_m}(x)\,{}^{[0]}M_{1,i_m+2}^{[n]} + Y_{i_m}R_{1,i_m+2}^{[n]}(x)\right)\ldots\right)\right)\right)\right). \tag{16}$$

Позначимо через

$$^{[1]}M_{m+1,t}^{[n]} = \sum_{j_1=t}^{n-1-2m}\left(X_{j_1}(x)\,{}^{[0]}M_{m,j_1+2}^{[n]} + Y_{j_1}\sum_{j_2=j_1+2}^{n+1-2m}\left(X_{j_2}(x)\,{}^{[0]}M_{m-1,j_2+2}^{[n]} + \right.\right.$$
$$\left.\left.+ Y_{j_2}\sum_{j_3=j_2+2}^{n+3-2m}\left(\ldots + Y_{j_{m-1}}\sum_{j_m=j_{m-1}+2}^{n-3}\left(X_{j_m}(x)\,{}^{[0]}M_{1,j_m+2}^{[n]} + Y_{j_m}R_{1,j_m+2}^{[n]}(x)\right)\ldots\right)\right)\right).$$

Легко бачити, що

$$^{[1]}M_{m+1,t}^{[n]}(x) = \sum_{j=t}^{n-1-2m}\left(X_j\,{}^{[0]}M_{m,j+2}^{[n]} + Y_j\,{}^{[0]}M_{m,j+2}^{[n]}(x)\right), \quad {}^{[1]}M_{1,t}^{[n]}(x) = R_{1,t}^{[n]}(x), \tag{17}$$

а тоді $(R_{m+1,1}^{[n]}(x))^{(m)} = m!\,{}^{[1]}M_{m+1,1}^{[n]}(x)$.

Скориставшись методом повної математичної індукції, з формули (12) можна показати, що

$$(R_{m+s,1}^{[n]}(x))^{(m)} = m!\,{}^{[s]}M_{m+s,1}^{[n]}(x), \quad s = 1, 2, \ldots, l-m,$$

де

$$^{[s]}M_{m+s,t}^{[n]}(x) = \sum_{j=t}^{n+1-2(m+s)}\left(X_j\,{}^{[s-1]}M_{m+s-1,j+2}^{[n]}(x) + Y_j\,{}^{[s]}M_{m+s-1,j+2}^{[n]}(x)\right), \tag{18}$$

$$ {}^{[s]}M^{[n]}_{s,t}(x) \;=\; R^{[n]}_{s,t}(x). $$

Формула (14) набуває вигляду

$$ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[f(x)Q_n(x)\right] \;=\; f^{(n+1)}(x)Q_n(x) + $$

$$ + \; B^{[n]}_1 \sum_{m=1}^{l} C^m_{n+1} f^{(n+1-m)}(x) m! \sum_{k=m}^{l} {}^{[k-m]}M^{[n]}_{k,1}(x). \tag{19} $$

Тоді

$$ \left|\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[f(x)Q_n(x)\right]\right| \;\le\; f^{*}\left(\left|Q_n(x)\right| + (b^{*})^n \sum_{m=1}^{l} C^m_{n+1} m! \sum_{k=m}^{l} \left|{}^{[k-m]}M^{[n]}_{k,1}(x)\right|\right). \tag{20} $$

Згідно з теоремою 1 [10]

$$ \left|Q_n(x)\right| \;\le\; (b^{*})^n \,\frac{(1+\sqrt{1+4\rho})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4\rho})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{1+4\rho}}. \tag{21} $$

Знайдемо оцінки $\left|{}^{[k-m]}M^{[n]}_{k,1}(x)\right|$ при $k = m, m+1, \ldots, l.$ При $k = m$ з (15) маємо

$$ \left|{}^{[0]}M^{[n]}_{m,i+2}(x)\right| \;\le\; \frac{1}{m!\,b_*^{2m}} \prod_{j=1}^{m}(n-1-i-2m+j). $$

При $k = m+1$ із формули (17) отримуємо

$$ \left|{}^{[1]}M^{[n]}_{m+1,i+2}(x)\right| \;\le\; \sum_{j=i+2}^{n-1-2m}\left(\left|X_j(x)\right|\left|{}^{[0]}M^{[n]}_{m,j+2}(x)\right| + \left|Y_j\right|\left|{}^{[1]}M^{[n]}_{m,j+2}(x)\right|\right). \tag{22} $$

Коли $m = 0,$ то з (22) маємо

$$ \left|{}^{[1]}M^{[n]}_{1,i+2}(x)\right| \;=\; \left|R^{[n]}_{1,i+2}(x)\right| \;\le\; \frac{d}{b_*^2}\,(n-i-2). $$

При $m = 1$ з (22) випливає, що

$$ \left|{}^{[1]}M^{[n]}_{2,i+2}(x)\right| \;\le\; \sum_{j=i+2}^{n-3}\left(\left|X_j\right|\left|{}^{[0]}M^{[n]}_{1,j+2}(x)\right| + \left|Y_j\right|\left|{}^{[1]}M^{[n]}_{1,j+2}(x)\right|\right) \;\le $$

$$ \le\; \frac{2d}{b_*^4}\sum_{j=i+2}^{n-3}(n-j-2) \;=\; \frac{d}{b_*^4}\,(n-i-4)(n-i-3). $$

За допомогою методу повної математичної індукції доведемо, що

$$ \left|{}^{[1]}M^{[n]}_{k,i+2}(x)\right| \;\le\; \frac{1}{(k-1)!\,b_*^{2k}} \prod_{j=1}^{m}(n-i-2k+j-1), \qquad k \;=\; 1, 2, \ldots, l. \tag{23} $$

У випадку $k = 1, 2$ формула (23) виконується. Зробимо припущення, що вона має місце при $k = t.$ Тоді при $k = t+1$ з (22) отримуємо

$$ \left|{}^{[1]}M^{[n]}_{t+1,i+2}(x)\right| \;\le\; \sum_{j=i+2}^{n-1-2t}\left(\left|X_j\right|\left|{}^{[0]}M^{[n]}_{t,j+2}(x)\right| + \left|Y_j\right|\left|{}^{[1]}M^{[n]}_{t,j+2}(x)\right|\right) \;\le $$

$$ \le \sum_{j=i+2}^{n-1-2t}\left(\frac{d}{b_*^2}\,\frac{1}{t!\,b_*^{2t}}\prod_{l=1}^{t}(n-j-2t+l-1) + \frac{1}{b_*^2}\,\frac{d}{(t-1)!\,b_*^{2t}}\prod_{l=1}^{t}(n-j-2t+l-1)\right) = $$

$$ =\; \frac{d}{t!\,b_*^{2(t+1)}} \prod_{j=1}^{t+1}(n-i-2(t+1)+j-1), $$

тобто формула (23) має місце і в цьому випадку.

За допомогою методу повної математичної індукції доведемо, що

$$\left|{}^{[s]}M^{[n]}_{m+s,i+2}(x)\right| \le \frac{d^s}{m!s!b_*^{2(m+s)}} \prod_{l=1}^{m+s} (n-i-2(m+s)+l-1), \quad s = 0, 1, \ldots, l-m. \tag{24}$$

Коли $s = 0, 1,$ то формула (24) виконується. Зробимо припущення, що дана формула виконується при $s = k$. Тоді при $s = k+1$ з (18) отримуємо, що

$$\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{m+k+1,i+2}(x)\right| \le \sum_{j=i+2}^{n-1-2(m+k)} \left(\left|X_j\right|\left|{}^{[k]}M^{[n]}_{m+k,j+2}(x)\right| + \left|Y_j\right|\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{m+k,j+2}(x)\right|\right). \tag{25}$$

Коли $m = 0$, то з (18) отримуємо

$$\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{k+1,i+2}(x)\right| \le \left|R^{[n]}_{k+1,i+2}(x)\right| \le \frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+1)}} \prod_{j=1}^{k+1} (n-i-2(k+1)+j-1).$$

При $m = 1$ з (25) маємо, що

$$\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{k+2,i+2}(x)\right| \le \sum_{j=i+2}^{n-3-2k} \left(\left|X_j\right|\left|{}^{[k]}M^{[n]}_{k+1,i+2}(x)\right| + \left|Y_j\right|\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{k+1,i+2}(x)\right|\right) \le$$

$$\le \sum_{j=i+2}^{n-3-2k} \left(\frac{d}{b_*^2}\frac{d^k}{k!b_*^{2(k+1)}} \prod_{l=1}^{k+1}(n-j-2(k+1)+l-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b_*^2}\frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+1)}} \prod_{l=1}^{k+1}(n-i-2(k+1)+l-1)\right) =$$

$$= \frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+2)}} \prod_{j=1}^{k+2} (n-i-2(k+2)+j-1).$$

Коли $m = 2$, то

$$\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{k+3,i+2}(x)\right| \le \sum_{j=i+2}^{n-5-2k} \left(\left|X_j\right|\left|{}^{[k]}M^{[n]}_{k+2,i+2}(x)\right| + \left|Y_j\right|\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{k+2,i+2}(x)\right|\right) \le$$

$$\le \sum_{j=i+2}^{n-5-2k} \left(\frac{d}{b_*^2}\frac{d^k}{k!2!b_*^{2(k+2)}} \prod_{l=1}^{k+2}(n-j-2(k+2)+l-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b_*^2}\frac{d^{k+1}}{(k+1)!b_*^{2(k+1)}} \prod_{l=1}^{k+2}(n-i-2(k+2)+l-1)\right) =$$

$$= \frac{d^{k+1}}{(k+1)!2!b_*^{2(k+3)}} \prod_{j=1}^{k+3} (n-i-2(k+3)+j-1).$$

Зробимо припущення, що (24) виконується при $m = t$. Тоді при $m = t+1$ з (25) маємо

$$\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{k+t+2,i+2}(x)\right| \le \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \left(\left|X_j\right|\left|{}^{[k]}M^{[n]}_{k+t+1,j+2}(x)\right| + \left|Y_j\right|\left|{}^{[k+1]}M^{[n]}_{k+t+1,j+2}(x)\right|\right) \le$$

$$\le \sum_{j=i+2}^{n-3-2(k+t)} \left(\frac{d}{b_*^2}\frac{d^k}{k!(t+1)!b_*^{2(k+t+1)}} \prod_{l=1}^{k+t+1}(n-j-2(k+t+1)+l-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b_*^2}\frac{d^{k+1}}{(k+1)!t!b_*^{2(k+t+1)}} \prod_{l=1}^{k+t+1}(n-i-2(k+t+1)+l-1)\right) =$$

$$= \frac{d^{k+1}}{(k+1)!(t+1)!b_*^{2(k+t+2)}} \prod_{j=1}^{k+t+2} (n-i-2(k+t+2)+j-1).$$

Формула (24) вірна і в цьому випадку, отже вона вірна при довільних s та m. Із (24) випливає, що

$$\left| {}^{[s]}M_{m+s,1}^{[n]}(x) \right| \le \frac{d^s}{m!s!b_*^{2(m+s)}} \prod_{l=1}^{m+s} (n-2(m+s)+l). \tag{26}$$

З (3), (20), (21) та (26) отримуємо (11).

Теорема 3. *Якщо функція* $f(x) \in C^{(n+1)}([\alpha, \beta])$, *за значеннями функції в точках множини* Λ *побудований ІЛД Тіле* (10), *частинні чисельники та знаменники якого задовольняють умову Слєшинського – Прінгсгейма, тобто* $0 < \left| x - x_{i-1} \right| \le d$, $\left| b_i \right| \ge d+1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $d \ne 1$, *то має місце оцінка*

$$\left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \le \frac{d^{n+1}(d^{n+1}-1)}{(n+1)!(d-1)} f^*(b^*)^n \left(\frac{(1+\sqrt{1+4\rho})^{n+1} - (1-\sqrt{1+4\rho})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{1+4\rho}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{l} C_{n+1}^{m} \frac{1}{b_*^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n-2(m+i)+j) \right), \tag{27}$$

де d, ρ, b_*, b^*, f^* визначені в умові теореми 2.

Доведення. Згідно з теоремою 2 із [10], при виконанні вказаних умов виконується нерівність

$$\left| Q_n(x) \right| \ge \frac{d^{n+1}-1}{d-1}.$$

Тоді, із умов даної теореми та теореми 2 отримуємо нерівність (27).

1. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень: У 2 ч. – Київ: Вища шк., 1995. – Ч. 1. – 367 с.
2. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций: В 2-х кн. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 423 с.
3. *Бейкер, мл. Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. *Скоробагатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. – XII + 175 S.
6. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 527 с.
7. *Пагіря М. М.* Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 57 – 64.
8. *Perron O.* Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. – Stuttgart: Teubner, 1954. – 194 S.
9. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. I. – С. 72 – 79.
10. *Пагіря М. М.* Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10 – 11. – С. 77 – 87.
11. *Hildebrand F. B.* Introduction to numerical analysis. 2nd ed. – New York: Dover Publications, Inc, 1987. – 669 p.
12. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій лаяцюговим дробом Тіле // Збірник наук. праць з обчислювальної математики. – Ужгород, 1997. – С. 21 – 26.

Одержано 18.05.07