УДК 512.538

Р. А. Заторський (Прикарпат. нац. ун-т, Івано-Франківськ)

ПАРАДЕТЕРМІНАНТИ І МНОГОЧЛЕНИ РОЗБИТТІВ

We study Bell polynomials by using functions of triangular matrices (parapermanents and paradeterminants). Some combinatorial identities and the relationships between these functions and the Stirling numbers of the first and second kind are established.

Изучаются многочлены Бэлла с помощью функций треугольных матриц (параперманентов и парадетерминантов). Установлены некоторые комбинаторные тождества и связи этих функций с числами Стирлинга первого и второго рода.

1. Вступ. Введене Беллом поняття многочленів розбиттів [1] має широкі застосування в дискретній математиці, а саме при диференціюванні складених функцій [2], в теорії чисел [3], алгебрі тощо. У цій статті матричний метод (див. [4, 5]) застосовано до дослідження многочленів Белла. При цьому встановлено тотожності між деякими важливими многочленами розбиттів та парадетермінантами трикутних матриць [6]. Оскільки властивості парадетермінантів і параперманентів трикутних матриць достатньо вивчені, вони стають зручним інструментом дослідження многочленів розбиттів. Метод дозволяє отримати деякі відомі та невідомі тотожності.

Наведемо короткі відомості про парадетермінанти (детальніше див. в [6]).

Нехай K — деяке числове поле.

Означення 1.1. *Трикутну таблицю чисел, які належать числовому полю* K,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1.1}$$

назвемо трикутною матрицею, а число n — *її порядком.*

Зауважимо, що трикутна матриця в нашому розумінні не є трикутною матрицею в звичайному розумінні цього терміна, оскільки вона є трикутною, але не прямокутною таблицею чисел.

Кожному елементу a_{ij} матриці (1.1) поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів a_{ik}, $k=j,\ldots,i$, які назвемо *похідними елементами* матриці, породженими *ключовим елементом* a_{ij}.

Добуток усіх похідних елементів, що породжені елементом a_{ij}, позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо *факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Означення 1.2. *Набір ключових елементів матриці* (1.1) *назвемо нормальним набором цієї матриці, якщо вони породжують монотрансверсаль, тобто множину похідних елементів потужності* n, *кожні два з яких не належать одному стовпчику цієї матриці.*

Нехай $\mathbb{P}(n)$ — множина всіх упорядкованих розбиттів (композицій) натурального числа n на натуральні доданки (див. [7, с. 67]). Відомо, що

$$\left|\mathbb{P}(n)\right| = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}. \tag{1.2}$$

Легко бачити, що між нормальними наборами ключових елементів матриці (1.1) і впорядкованими розбиттями натурального числа n існує взаємно однозначна відповідність.

Кожному нормальному наборові a ключових елементів поставимо у відповідність знак числа $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ — сума всіх індексів ключових елементів цього набору.

Означення 1.3. *Парадетермінантом трикутної матриці* (1.1) *назвемо число*

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{i(s),j(s)}\right\},$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент, що відповідає s-й компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, а символ $\varepsilon(a)$ — знак нормального набору a ключових елементів.

За аналогією із поняттям парадетермінанта матриці (1.1) введемо поняття параперманента цієї матриці.

Означення 1.4. *Параперманентом трикутної матриці* (1.1) *назвемо число*

$$\operatorname{pper}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\},$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент, що відповідає s-й компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$.

***Зауваження* 1.1.** Внаслідок (1.2) парадетермінант і параперманент n-го порядку складаються із 2^{n-1} доданків.

Теорема 1.1 (А. Г. Ганюшкін)**.** *Якщо A — трикутна матриця* (1.1), *то виконуються рівності*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\right\}, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\right\}, \tag{1.4}$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$.

Означимо скалярний добуток вектора $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ на парадетермінант матриці (1.1), використавши рівність (1.3), з допомогою рівностей

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot \mathrm{ddet}(A) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{r=1}^{n} b_r \cdot \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s, \alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\right\}. \tag{1.5}$$

Аналогічно означимо скалярний добуток вектора $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ на параперманент цієї матриці, використавши рівність (1.4):

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot \mathrm{pper}(A) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{r=1}^{n} b_r \cdot \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=n} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s, \alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\right\}. \tag{1.6}$$

Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці (1.1) поставимо у відповідність трикутну таблицю елементів цієї матриці з цим елементом в лівому нижньому куті, яку назвемо *рогом цієї матриці* і позначимо через R_{ij}. Очевидно, що ріг R_{ij} є трикутною матрицею $(i-j+1)$-го порядку, причому йому належать лише ті елементи a_{rs} матриці (1.1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \leq s \leq r \leq i$.

Далі будемо вважати, що

$$\mathrm{ddet}(R_{01}) = \mathrm{pper}(R_{01}) = \mathrm{ddet}(R_{n,n+1}) = \mathrm{pper}(R_{n,n+1}) = 1.$$

Означення 1.5. *Прямокутну таблицю елементів трикутної матриці* (1.1) *назвемо вписаною в цю матрицю, якщо одна її вершина збігається з елементом* a_{n1}, *а протилежна до неї — з елементом* $a_{ii}, i = 1, 2, \ldots, n$. *Позначимо цю таблицю через* $T(i)$.

***Зауваження* 1.2.** Якщо в означенні 1.5 значення індексу i дорівнює 1 або n, то прямокутна таблиця вироджується відповідно у перший стовпчик або останній рядок.

При обчисленні парадетермінанта і параперманента зручно користуватися *алгебраїчними доповненнями до факторіального добутку ключових елементів трикутної матриці*.

Означення 1.6. *Алгебраїчними доповненнями* D_{ij}, P_{ij} *до факторіального добутку* $\{a_{ij}\}$ *ключового елемента* a_{ij} *трикутної матриці* (1.1), *назвемо відповідно числа*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \mathrm{ddet}(R_{j-1,1}) \mathrm{ddet}(R_{n,i+1}),$$

$$P_{ij} = \mathrm{pper}(R_{j-1,1}) \mathrm{pper}(R_{n,i+1}),$$

де $R_{j-1,1}$ *і* $R_{n,i+1}$ *— роги цієї матриці.*

Корисною є наступна теорема.

Теорема 1.2 (Розклад парадетермінанта і параперманента за елементами вписаної прямокутної таблиці)**.** *Нехай* A *— трикутна матриця* (1.1) *і* $T(i)$ *— деяка вписана прямокутна таблиця елементів цієї матриці. Тоді справджуються рівності*

$$\mathrm{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} D_{rs}, \tag{1.7}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} P_{rs}, \tag{1.8}$$

де D_{rs} і P_{rs} — відповідно алгебраїчні доповнення до факторіального добутку ключового елемента a_{rs}, який належить вписаній прямокутній таблиці $T(i)$.

***Наслідок* 1.1.** *При $i = 1$ за формулами* (1.7), (1.8) *і зауваженням* 1.2 *отримаємо розклад парадетермінанта та параперманента за елементами їх першого стовпчика*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \{a_{r1}\} \operatorname{ddet}(R_{n,r+1}),$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\} \operatorname{pper}(R_{n,r+1}).$$

Якщо $i = n$, то отримаємо відповідні розклади за елементами останнього рядка

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \operatorname{ddet}(R_{s-1,1}),$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} \operatorname{pper}(R_{s-1,1}).$$

Наступна теорема дає зручний алгоритм обчислення парадетермінантів і параперманентів.

Теорема 1.2 (І. І. Ліщинський)**.** *Справджуються рівності*

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n = (-1) \cdot \left\langle \begin{matrix} (a_{21} - a_{11}) a_{22} & & & \\ (a_{31} - a_{11}) a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (a_{n1} - a_{11}) a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_{n-1},$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right]_n = \left[\begin{matrix} (a_{21} - a_{11}) a_{22} & & & \\ (a_{31} - a_{11}) a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (a_{n1} - a_{11}) a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right]_{n-1}.$$

***Зауваження* 1.3.** Для знаходження значення парадетермінанта (параперманента) достатньо виконати $\dfrac{n(n-1)}{2}$ операцій множення і стільки ж операцій додавання. Оскільки парадетермінант містить $\dfrac{n(n+1)}{2}$ елементів і всі вони впливають на значення парадетермінанта, запропонований алгоритм істотно покращити не можна.

2. Означення многочленів розбиття та деякі твердження. Розглянемо трикутну матрицю вигляду

$$A = \begin{pmatrix} k_{11}x_1 & & & \\ k_{21}\dfrac{x_2}{x_1} & k_{22}x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ k_{n1}\dfrac{x_n}{x_{n-1}} & k_{n2}\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & k_{nn}x_1 \end{pmatrix}_n = \left(k_{ij}\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n}, \qquad (2.1)$$

де $x_0 = 1$, а k_{ij} — деяка дробово-раціональна функція аргументів i, j.

Парадетермінанти і параперманенти трикутних матриць (2.1) зустрічаються досить часто (див. [6–9]), тому вивчимо їх детальніше.

Нехай задано деяку мультимножину M із первинною специфікацією Сачкова [10] вигляду

$$\left[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}\right].$$

Якщо показники первинної специфікації мультимножини M задовольняють рівняння $\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n = n$, то таку мультимножину називають невпорядкованим розбиттям натурального числа n і позначають через $\pi(n)$.

Суму всіх показників первинної специфікації розбиття $\pi(n)$ позначимо через $\lambda(\pi)$, тобто

$$\lambda(\pi) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Зауважимо, що $\lambda(\pi)$ має певний комбінаторний сенс, а саме є числом компонент розбиття $\pi(n)$.

Нехай $\Pi(n)$ є множиною всіх мультимножин $\pi(n)$, а $\Pi_k(n)$ — множиною всіх мультимножин $\pi(n)$, показники первинних специфікацій яких задовольняють рівність $\lambda(\pi) = k$. Сім'я множин $\Pi_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, утворює розбиття множини $\Pi(n)$.

Означення 2.1. *Многочленами розбиттів назвемо многочлени вигляду*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} y\,(k) \sum_{\pi(n)\in\Pi_k(n)} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}, \qquad (2.2)$$

де $y\,(k)$, $k = 1, \ldots, n$, — компоненти деякого вектора, а $c(n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — деякі раціональні числа.

***Зауваження* 2.1.** Якщо в рівності (2.2) $y\,(k) \equiv 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то вона набирає вигляду

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi(n)\in\Pi_k(n)} c(n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{\pi(n)\in\Pi(n)} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}. \qquad (2.3)$$

Многочлени вигляду (2.1) назвемо *примітивними многочленами розбиттів.*

Теорема 2.1. *Парадетермінанти і параперманенти матриць вигляду* (2.1) *є примітивними многочленами розбиттів, тобто виконуються рівності*

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{\pi(n)\in\Pi(n)} c(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{\pi(n)\in\Pi(n)} (-1)^{n-\lambda(\pi)}c(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}. \tag{2.5}$$

Доведення. Встановимо рівність (2.4). Ключовому елементу $k_{ij}\dfrac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}$ параперманента матриці (2.1) відповідає факторіальний добуток $\left\{k_{ij}\dfrac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right\} = = \prod_{s=j}^{i}\left(k_{is}\dfrac{x_{i-s+1}}{x_{i-s}}\right) = \left(\prod_{s=j}^{i}k_{is}\right)x_{i-j+1}$. Тому компоненті α_i, $i=1,\ldots,n$, впорядкованого розбиття $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=n$ відповідає факторіальний добуток $\left(\prod_{s=j}^{i}k_{is}\right)x_{\alpha_i}$. Отже, згідно з означенням параперманента кожному впорядкованому розбиттю $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=n$, компоненти якого утворюють мультимножину $\pi(n)\in\Pi(n)$ із первинною специфікацією $\left[1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\right]$, відповідає доданок вигляду

$$c^*x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_i^{\lambda_i},$$

а всім розбиттям із первинною специфікацією $\left[1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\right]$ — доданок

$$c(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_i^{\lambda_i}.$$

Рівність (2.5) доводиться аналогічно. Зауважимо лише, що знак кожного з доданків, які відповідають розбиттям із первинною специфікацією $\left[1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}\right]$, визначається множником $(-1)^{n-\lambda(\pi)}$ (див. рівність (1.3)).

Згідно із рівностями (1.5) і (1.6) многочлени розбиттів

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} y_k\cdot\left(\sum_{\pi(n)\in\Pi_k(n)} c(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}\right),\\ \sum_{k=1}^{n} y_k\cdot\left(\sum_{\pi(n)\in\Pi_k(n)} (-1)^{n-k}c(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}\right)\end{gathered} \tag{2.6}$$

можна записати відповідно у вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \tau_{11}x_1 & & & \\ \tau_{21}\dfrac{x_2}{x_1} & \tau_{22}x_1 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \tau_{n1}\dfrac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2}\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nn}x_1\end{bmatrix}_n = (y_1,y_2,\ldots,y_n)\cdot\left[\tau_{sr}\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right]_{1\le r\le s\le n}, \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} \tau_{11} x_1 & & & \\ \tau_{21} \dfrac{x_2}{x_1} & \tau_{22} x_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \tau_{nn} x_1 \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot \left\langle \tau_{sr} \frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}} \right\rangle_{1 \le r \le s \le n}, \tag{2.8}$$

де $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — деякий вектор.

3. Приклади многочленів розбиттів.

Твердження 3.1. *Права частина формули Фаа ді Бруно*

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{m=1}^{n} \frac{d^m}{dg^m} f(g(x)) \times$$

$$\times \sum_{\pi(n) \in \Pi_m(n)} \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} \dots (n!)^{\lambda_n}} (g'(x))^{\lambda_1} \dots (g^{(n)}(x))^{\lambda_n}$$

є многочленом розбиттів і згідно із позначенням (2.7) *може бути подана у вигляді*

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) =$$

$$= \begin{pmatrix} f'(g) \\ f''(g) \\ f'''(g) \\ \vdots \\ f^{(n)}(g) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g'(x) & & & & \\ \frac{1}{1} \dfrac{g''(x)}{g'(x)} & g'(x) & & & \\ \frac{1}{2} \dfrac{g'''(x)}{g''(x)} & \frac{2}{1} \dfrac{g''(x)}{g'(x)} & g'(x) & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ \dfrac{1}{n-1} \dfrac{g^{(n)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} & \dfrac{2}{n-2} \dfrac{g^{(n-1)}(x)}{g^{(n-2)}(x)} & \dots & \dfrac{n-1}{1} \dfrac{g''(x)}{g'(x)} & g'(x) \end{bmatrix}_n . \tag{3.1}$$

Доведення. Розкладемо параперманент

$$B_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{1} \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{2} \dfrac{x_3}{x_2} & \frac{2}{1} \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ \dfrac{1}{n-1} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} & \dfrac{2}{n-2} \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \dots & \dfrac{n-1}{1} \dfrac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n =$$

$$= \left[\frac{j}{i-j+j\delta_{ij}} \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right]_{1 \le j \le i \le n} \tag{3.2}$$

за елементами останнього рядка:

$$B_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \binom{n-1}{0} x_1 B_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \binom{n-1}{1} x_2 B_{n-2}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n-1}{n-2} x_{n-1} B_1(x_1) + \binom{n-1}{n-1} x_n B_0, \tag{3.3}$$

де $B_0 = 1$. Оскільки $B_1(x_1) = \left[x_1\right]_1 = x_1$ і параперманент (3.2) та многочлен Белла задовольняють рекурентну рівність (3.3) (див. [11, с. 174]), справджуються тотожність

$$\left[\frac{j}{i-j+j\delta_{ij}} \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right]_{1 \le j \le i \le n} = \sum_{\pi(n) \in \Pi(n)} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1} \ldots \lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \tag{3.4}$$

і, отже, рівність (3.1).

Розглянемо деякі приклади параперманентів примітивних многочленів.

Важливим прикладом трикутних матриць є матриця (2.1), в якій $k_{ij} = 1$, $1 \le \le j \le i \le n$, тобто матриця вигляду

$$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & x_1 \end{pmatrix}_n = \left(\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1 \le j \le i \le n}. \tag{3.5}$$

Твердження 3.2. *Справджуються тотожності*

$$\operatorname{pper}(Z(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{\pi(n) \in \Pi(n)} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \ldots \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{ddet}(Z(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{\pi(n) \in \Pi(n)} (-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \ldots \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}. \tag{3.7}$$

Доведення. Наведемо комбінаторне доведення тотожності (3.6). Насамперед з огляду на означення параперманента зазначимо, що кожному впорядкованому розбиттю $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n$, компоненти якого утворюють мультимножину $\pi(n)$ із первинною специфікацією $\left[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}\right]$, відповідає доданок вигляду $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$.

Підрахуємо число таких доданків, які виникають в результаті обчислення параперманента матриці (3.5). Відомо, що між множинами нормальних наборів ключових елементів трикутної матриці і всіма впорядкуваннями мультимножини $\pi(n)$

із первинною специфікацією

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$$

існує бієкція. Але за поліноміальною формулою число таких впорядкувань дорівнює

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_n!}.$$

Таким чином, тотожність (3.6) встановлено.

Справедливість тотожності (3.7) випливає із рівності (2.5).

Зазначимо, що якщо для деякого многочлена розбиттів знайдено відповідний йому параперманент або парадетермінант, то з допомогою заміни змінних можна отримати низку нових тотожностей.

***Приклад* 3.1.** Виконавши в тотожностях (3.6), (3.7) заміну змінних $x_i = \frac{y_i}{i}$, $x_i = \frac{y_i}{i!}$, $i = 1, \ldots, n$, отримаємо відповідно тотожності

$$\operatorname{pper}\left(Z\left(\frac{y_1}{1}, \frac{y_2}{2}, \ldots, \frac{y_n}{n}\right)\right) = \left[\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1} \frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right]_{1 \le j \le i \le n} =$$

$$= \sum_{\Pi(n)} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{1^{\lambda_1} \lambda_1! \ldots n^{\lambda_n} \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} \ldots y_n^{\lambda_n},$$

$$\operatorname{pper}\left(Z\left(\frac{y_1}{1!}, \frac{y_2}{2!}, \ldots, \frac{y_n}{n!}\right)\right) = \left[\frac{1}{i-j+1} \frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right]_{1 \le j \le i \le n} =$$

$$= \sum_{\Pi(n)} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{(1!)^{\lambda_1} \lambda_1! \ldots (n!)^{\lambda_n} \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} \ldots y_n^{\lambda_n},$$

$$\operatorname{ddet}\left(Z\left(\frac{y_1}{1}, \frac{y_2}{2}, \ldots, \frac{y_n}{n}\right)\right) = \left\langle\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1} \frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right\rangle_{1 \le j \le i \le n} =$$

$$= \sum_{\Pi(n)} (-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{1^{\lambda_1} \lambda_1! \ldots n^{\lambda_n} \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} \ldots y_n^{\lambda_n},$$

$$\operatorname{ddet}\left(Z\left(\frac{y_1}{1!}, \frac{y_2}{2!}, \ldots, \frac{y_n}{n!}\right)\right) = \left\langle\frac{1}{i-j+1} \frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right\rangle_{1 \le j \le i \le n} =$$

$$= \sum_{\Pi(n)} (-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{(1!)^{\lambda_1} \lambda_1! \ldots (n!)^{\lambda_n} \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} \ldots y_n^{\lambda_n}.$$

Розглянемо ще один приклад примітивного многочлена розбиттів.

Твердження 3.3. *Нехай*

$$S(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{j}{i-j+1} \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1 \le j \le i \le n},$$

тоді справджуються тотожності

$$\operatorname{pper}(S(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{\pi(n)\in\Pi(n)} \frac{n!\,(\lambda(\pi))!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}\ldots(n!)^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}, \tag{3.8}$$

$$\operatorname{ddet}(S(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{\pi(n)\in\Pi(n)} (-1)^{n-\lambda(\pi)} \frac{n!\,(\lambda(\pi))!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}\ldots(n!)^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}. \tag{3.9}$$

Для **доведення твердження 3.3** достатньо встановити тотожність (3.8), тоді справедливість тотожності (3.9) випливатиме з рівності (2.5). Те, що доданки параперманента матриці $S(x_1,\ldots,x_n)$ мають вигляд $x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}$, вже доведено у попередньому твердженні. Знайдемо коефіцієнт доданка $x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}$. Розглянемо деяке впорядковане розбиття $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ натурального числа n, первинна специфікація якого має вигляд $[1^{\lambda_1},2^{\lambda_2},\ldots,n^{\lambda_n}]$. Очевидно, що цьому розбиттю відповідає доданок

$$\frac{n!}{1!^{\lambda_1}\ldots n!^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}$$

параперманента $\operatorname{pper}(C(x_1,\ldots,x_n))$. Оскільки таких доданків у параперманенті $\operatorname{pper}(S(x_1,\ldots,x_n))$ налічується рівно

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!},$$

тотожність (3.8) встановлено.

4. Многочлени розбиттів та деякі комбінаторні числа. Встановимо зв'язки між деякими спеціальними комбінаторними числами і параперманентами деяких трикутних матриць. При $x_1=\ldots=x_n=1$ тотожність (3.4) набирає вигляду

$$\left[\frac{j}{i-j+j\delta_{ij}}\right]_{1\le j\le i\le n} = \sum_{\pi(n)\in\Pi(n)} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}\ldots(n!)^{\lambda_n}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi(n)\in\Pi_k(n)} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}\ldots(n!)^{\lambda_n}},$$

а оскільки виконується рівність [11, с. 191]

$$S(n,k) = \sum_{\pi(n)\in\Pi_k(n)} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}\ldots(n!)^{\lambda_n}},$$

де $S(n,k)$ — числа Стірлінга другого роду, справджується також рівність

$$\left[\frac{j}{i-j+j\delta_{ij}}\right]_{1\le j\le i\le n} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

***Зауваження* 4.1.** Число з правої частини рівності (3.4) називають числом Белла, а число під знаком суми у правій частині рівності (3.4), як відомо [11], дорівнює числу всіх можливих розбиттів множини потужності $n=\lambda_1+2\lambda_2+\ldots$ $\ldots+n\lambda_n$ на λ_1 підмножин потужності 1, λ_2 підмножин потужності $2,\ldots,\lambda_n$ підмножин потужності n.

Аналогічно можна отримати рівності

$$\left\langle \frac{j}{i-j+j\delta_{ij}} \right\rangle_{1\le j\le i\le n} = \sum_{\pi(n)\in\Pi(n)} (-1)^{n-\lambda(\pi)} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}\ldots(n!)^{\lambda_n}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\pi(n)\in\Pi_k(n)} (-1)^{n-k} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}\ldots(n!)^{\lambda_n}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} S(n,k).$$

Позначимо параперманент вигляду

$$\left[(j-(j-1)\delta_{ij}) \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right]_{1\le j\le i\le n} = \left[\begin{array}{llllll} x_1 & & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & \\ \frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{x_4}{x_3} & 2\frac{x_3}{x_2} & 3\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & 2\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & (n-1)\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \end{array} \right]_n$$

через $C_n(x_1,\ldots,x_n)$ і розкладемо його за елементами останнього рядка:

$$C_n(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= (n-1)^{\underline{0}} x_1 C_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) + (n-1)^{\underline{1}} x_2 C_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2}) + \ldots$$

$$\ldots + (n-1)^{\underline{n-2}} x_{n-1} C_1(x_1) + (n-1)^{\underline{n-1}} x_n C_0. \tag{4.1}$$

Можна довести, що цикловий індикатор

$$C_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\Pi(n)} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!\,1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}$$

симетричної групи також задовольняє рекурентну рівність (4.1). Отже, справджується тотожність

$$\left[(j-(j-1)\delta_{ij}) \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right]_{1\le j\le i\le n} = \sum_{\Pi(n)} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!\,1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}. \tag{4.2}$$

Якщо покласти $x_1 = \ldots = x_n = x$, то тотожність (4.2) набере вигляду

$$\left[\begin{array}{llllll} x & & & & & \\ 1 & x & & & & \\ 1 & 2 & x & & & \\ 1 & 2 & 3 & x & & \\ \multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & x & \end{array}\right]_{1\le j\le i\le n} = \sum_{\Pi(n)} \frac{n!}{\lambda_1!\dots\lambda_n!\,1^{\lambda_1}\dots n^{\lambda_n}} x^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}, \qquad (4.3)$$

але (див. [5]) параперманент в лівій частині рівності (4.3) дорівнює

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1),$$

тому отримуємо відому тотожність [11, с. 181]

$$C_n(\underbrace{x,\dots,x}_{n}) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1),$$

яка при $x=1$ набирає вигляду

$$\left[\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & & \\ \multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & 1 & \end{array}\right]_{n} = C_n(\underbrace{1,\dots,1}_{n}) = n!. \qquad (4.4)$$

Таким чином, співставляючи рівності (4.3) і (4.4), одержуємо рівність [9, с. 49]

$$\sum_{\Pi(n)} \frac{1}{\lambda_1!\dots\lambda_n!\,1^{\lambda_1}\dots n^{\lambda_n}} = 1.$$

***Зауваження* 4.2.** Число під знаком суми в рівності (4.2) є числом підстановок n символів, які складаються із λ_1 циклів довжини 1, λ_2 циклів довжини $2,\dots,\lambda_n$ циклів довжини n.

Парадетермінант матриці

$$\left((j-(j-1)\delta_{ij})\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n}$$

обчислюється, як і парадетермінант матриці

$$\left(\frac{j}{i-j+j\delta_{ij}}\right)_{1\le j\le i\le n}.$$

При цьому справджується тотожність

$$\left\langle (j-(j-1)\delta_{ij})\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\rangle_{1\le j\le i\le n} =$$

$$= \sum_{\Pi(n)} (-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!\,1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}. \qquad (4.5)$$

Враховуючи, що виконується рівність [11, с. 191]

$$s(n,k) = \sum_{\Pi_k(n)} (-1)^{n-k} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!\,1^{\lambda_1}\ldots n^{\lambda_n}},$$

де $s(n,k)$ — числа Стірлінга першого роду, тотожність (4.5) при $x_1 = \ldots = x_n = 1$ можна записати у вигляді

$$\langle (j-(j-1)\delta_{ij}) \rangle_{1\le j\le i\le n} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

Очевидно, що вірною є також рівність

$$[(j-(j-1)\delta_{ij})]_{1\le j\le i\le n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) = n!.$$

1. *Bell E. T.* Partition polynomials // Ann. Math. – 1927. – **29**. – P. 38 – 46.
2. *Riordan J.* An Introduction to combinatorial analysis. – New York: Wiley, 1958. – 236 p.
3. *Fine N. J.* Sums over partitions // Rept Inst. Theory Numbers, Boulder. – 1959. – P. 86 – 94.
4. *Протасов І. В., Хромуляк О. М.* Методи лінійної алгебри в комбінаториці. – Київ: Укр. держ. пед. ун-т, 1997. – 40 с.
5. *Тараканов В. Е.* Комбинаторные задачи и $(0,1)$-матрицы. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
6. *Заторський Р. А.* Паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Мат. студ. – 2002. – **17**, вип. 1. – С. 45 – 54.
7. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 440 с.
8. *Эндрюс Г.* Теория разбиений: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
9. *Заторський Р. А.* Параперманенти та лінійні рекурентні співвідношення // Мат. міжн. мат. конф., присв. 100-річчю від початку роботи Д. О. Граве (1863 – 1939) в Київ. ун-ті (Київ, 17 – 22 червня 2002 р.). – 138 с.
10. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторые методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 382 с.
11. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 255 с.

Одержано 17.04.07