УДК 519.21
О. В. Іванов, І. В. Орловський (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ M-ОЦІНОК У КЛАСИЧНІЙ НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

The nonlinear regression model with discrete time and independent identically distributed observation errors is considered. Sufficient conditions for the asymptotic normality of M-estimates are obtained.

Получены достаточные условия асимптотической нормальности M-оценок неизвестных параметров нелинейных моделей регрессии с дискретным временем и независимыми одинаково распределенными погрешностями наблюдений.

Вступ. Кількість робіт, що стосуються M-оцінок у класичних регресійних моделях, є достатньо великою. Застосування M-оцінок у моделях лінійного регресійного аналізу з незалежними похибками спостережень наведено в піонерських роботах П. Хьюбера [1, 2]. Асимптотичні результати для M-оцінок параметрів лінійних та нелінійних моделей регресії з незалежними похибками спостережень викладено в роботах [3 – 22].

Асимптотичні властивості M-оцінок параметрів лінійних та нелінійних моделей регресії з випадковим шумом, що задовольняє умову сильної залежності для моделей з дискретним часом, досліджено в роботах [23 – 31], а для моделей з неперервним часом — в роботах [32 – 34].

Автори у роботах [34, 35] вивчали асимптотичні властивості M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії з неперервним часом та слабко залежним випадковим шумом.

У даній роботі досліджено M-оцінки, які побудовано за допомогою гладких функцій втрат. Останні, як і їхні недиференційовні аналоги, широко використовуються при розв'язанні задач обробки статистичних даних (див., наприклад, [36]).

У статті доведенню теореми про асимптотичну нормальність M-оцінок (п. 3) передує доведення двох лем редукції (п. 2). З леми 1 видно, що вивчення M-оцінки можна замінити вивченням оцінки найменших квадратів (о.н.к.) параметра тієї самої нелінійної функції регресії у допоміжній моделі регресії з помилками спостережень, які виражаються через похідні функції втрат. Лема 2 зводить вивчення о.н.к. параметра останньої нелінійної моделі до вивчення о.н.к. параметра відповідної сурогатної лінійної моделі регресії. Таку двокрокову редукцію для доведення асимптотичної нормальності M-оцінок вперше було застосовано у роботі [6].

Ключовим моментом доведення асимптотичної нормальності є застосування теореми Брауера про нерухому точку. Для коректного використання цієї теореми потрібна єдиність, у деякому асимптотичному сенсі, розв'язку системи „нормальних" рівнянь, яка визначає M-оцінку. Таку єдиність встановлено у лемі 5.

Важливо також зауважити, що у роботі запропоновано економні та необтяжливі вимоги до функції регресії (п. 1), за яких M-оцінка є асимптотично нормальною.

1. Умови та формулювання основного результату. Розглянемо модель регресії

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

де $g(j,\theta)$, $j \geq 1$, — послідовність невипадкових функцій, які задано на Θ^c, Θ^c — замикання в $\mathbb{R}^q$ обмеженої відкритої множини $\Theta \subset \mathbb{R}^q$. Ми не будемо припускати, що функція $g(j,\theta)$ є лінійною комбінацією координат вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$.

Нехай виконується умова **A**:

A. ε_j, $j \geq 1$, — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (в.в.), заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \mathrm{P}), \mathrm{E}\varepsilon_j = 0$.

Означення. *M-оцінкою невідомого параметра $\theta \in \Theta$, одержаною за спостереженнями X_j, $j = 1, \ldots, n$, вигляду* (1) *та неперервною функцією втрат $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, називають будь-який випадковий вектор (в.в.) $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(X_j, j = 1, \ldots, n) \in \Theta^c$, для якого*

$$S_n(\widehat{\theta}_n) = \inf_{\tau \in \Theta^c} S_n(\tau), \qquad S_n(\tau) = \sum \rho(X_j - g(j,\tau)),$$

де $\sum = \sum_{j=1}^{n}$.

Зауважимо, що, за введених умов M-оцінка існує (див., наприклад, роботи [37–39]).

Припустимо, що функції $g(j,\tau)$, $j \geq 1$, є двічі неперервно диференційовними по $\tau \in \Theta^c$. Позначимо

$$g_i(j,\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(j,\tau), \qquad g_{il}(j,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_l} g(j,\tau), \quad i,\ l = 1, \ldots, q,$$

$$d_n^2(\theta) = \operatorname{diag}\left(d_{in}^2(\theta)\right)_{i=1}^q,$$

де

$$d_{in}^2(\theta) = \sum g_i^2(j,\theta), \qquad \varliminf_{n\to\infty} n^{-1} d_{in}^2(\theta) > 0, \quad i = 1, \ldots, q.$$

Ці границі можуть дорівнювати, зокрема, нескінченності. Нехай також

$$d_{il,n}^2(\tau) = \sum g_{il}^2(j,\tau), \qquad \tau \in \Theta^c, \quad i,\ l = 1, \ldots, q.$$

Буквами k будемо позначати додатні константи. Припустимо, що для достатньо великих n (для $n > n_0$) виконуються умови $\mathbf{B_1}$:

$$\max_{1\leq j\leq n} \sup_{\tau\in\Theta^c} \frac{|g_i(j,\tau)|}{d_{in}(\theta)} \leq k^i n^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

$$\max_{1\leq j\leq n} \sup_{\tau\in\Theta^c} \frac{|g_{il}(j,\tau)|}{d_{il,n}(\theta)} \leq k^{il} n^{-\frac{1}{2}}, \quad i,\ l = 1, \ldots, q, \tag{3}$$

$$\sup_{\tau\in\Theta^c} \frac{d_{il,n}(\tau)}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \leq \widetilde{k}^{il} n^{-\frac{1}{2}}, \quad i,\ l = 1, \ldots, q. \tag{4}$$

Запишемо

$$J_n(\theta) = (J_{il,n}(\theta))_{i,l=1}^q, \qquad J_{il,n}(\theta) = d_{in}^{-1}(\theta) d_{ln}^{-1}(\theta) \sum g_i(j,\theta) g_l(j,\theta),$$

$\lambda_{\min}(A)$ $(\lambda_{\max}(A))$ — мінімальне (максимальне) власне число додатно визначеної матриці A.

Припустимо, що виконується умова $\mathbf{B_2}$:

$\mathbf{B_2}$. $\lambda_{\min}(J_n(\theta)) \geq \lambda_0 > 0$ для $n > n_0$.

При виконанні умови $\mathbf{B_2}$ для $n > n_0$ існують невироджені матриці

$$J_n^{-1}(\theta) = \Lambda_n(\theta) = \left(\Lambda_n^{il}(\theta)\right)_{i,l=1}^q .$$

Нехай

$$f_{il}(j,w) = g_{il}(j, \theta + n^{\frac{1}{2}} d_n^{-1}(\theta)w), \ F_{il}(j; w_1, w_2) = f_{il}(j, w_1) - f_{il}(j, w_2),$$

$$F_{il,n}(w_1, w_2) = \sum F_{il}^2(j; w_1, w_2), \quad i, \ l = 1, \ldots, q.$$

Введемо наступні умови:

$\mathbf{B_3}$. Для деякого $r_0 > 0$ для $n > n_0$

$$n d_{in}^{-2}(\theta) d_{ln}^{-2}(\theta) \sup_{w \in v^c(r_0)} F_{il,n}(w, 0) \|w\|^{-2} \leq k_{il}, \quad i, \ l = 1, \ldots, q;$$

C. Функція $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, є двічі неперервно диференційовною, її похідні $\rho'(x) = \psi(x)$ та $\rho''(x) = \psi'(x)$ задовольняють такі властивості:

(i) $\mathrm{E}\psi(\varepsilon_j) = 0$, $\mathrm{E}|\psi(\varepsilon_j)|^3 < \infty$;

(ii) $\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_j) \neq 0$, $\mathrm{E}(\psi'(\varepsilon_j))^2 < \infty$;

(iii) для довільних $x, h \in \mathbb{R}^1$ та деякої константи $\varkappa < \infty$

$$\left|\psi'(x+h) - \psi'(x)\right| \leq \varkappa |h|.$$

Позначимо

$$\sigma^2 = \frac{\mathrm{E}\psi^2(\varepsilon_j)}{(\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_j))^2}, \tag{5}$$

$\mathcal{C}^q$ — клас опуклих борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$;

$$\Phi_K(C) = \int\limits_C \varphi_K(x) dx,$$

де $\varphi_K(x)$, $x \in \mathbb{R}^q$ — щільність гауссівського в.в. з нульовим середнім та кореляційною матрицею K.

Будемо вважати, що нормована M-оцінка

$$\widehat{w}_n = \widehat{w}_n(\theta) = n^{-\frac{1}{2}} d_n(\theta)(\hat{\theta}_n - \theta)$$

задовольняє умову конзистентності **D.**

D. $\widehat{w}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\longrightarrow}} 0$.

Достатні умови слабкої конзистентності M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії наведено у роботах [10–14, 16, 36, 40].

Сформулюємо основний результат цієї роботи.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **A**, $\mathbf{B_1} - \mathbf{B_3}$, **C** *та* **D**. *Тоді*

$$\sup_{C \in \mathcal{C}^q} \left| \mathrm{P}\left\{ d_n(\theta)(\hat{\theta}_n - \theta) \in C \right\} - \Phi_{\sigma^2 \Lambda_n(\theta)}(C) \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6}$$

Нехай замість умови $\mathbf{B_2}$ виконано наступну умову:

$\mathbf{B_4}$. Існує $\lim\limits_{n\to\infty} J_n(\theta) = J(\theta)$, де $J(\theta)$ — деяка додатно визначена матриця.

При виконанні умови $\mathbf{B_4}$ існує невироджена матриця

$$\Lambda(\theta) = J^{-1}(\theta) = \left(\Lambda^{il}(\theta)\right)_{i,l=1}^{q}.$$

Тоді справедливим є такий результат.

Наслідок 1. *Якщо виконано умови* **A**, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{B_4}$, **C** *та* **D**, *то*

$$\sup_{C\in\mathcal{C}^q}\left|\mathrm{P}\left\{d_n(\theta)(\hat\theta_n-\theta)\in C\right\}-\Phi_{\sigma^2\Lambda(\theta)}(C)\right|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

2. Допоміжні твердження. Виконаємо заміну змінних

$$u = d_n(\theta)(\tau-\theta) \tag{7}$$

у функції регресії та її похідних:

$$g(j,\tau) = g(j,\theta + d_n^{-1}(\theta)u) = h(j,u),$$

$$g_i(j,\tau) = g_i(j,\theta + d_n^{-1}(\theta)u) = h_i(j,u), \quad i = 1,\ldots,q,$$

$$g_{il}(j,\tau) = g_{il}(j,\theta + d_n^{-1}(\theta)u) = h_{il}(j,u), \quad i,\ l = 1,\ldots,q.$$

Також будемо використовувати позначення

$$H(j;u_1,u_2) = h(j,u_1) - h(j,u_2),$$

$$H_i(j;u_1,u_2) = h_i(j,u_1) - h_i(j,u_2), \quad i = 1,\ldots,q.$$

Введемо вектори

$$M_n(u) = \left(M_n^i(u)\right)_{i=1}^q,$$

$$M_n^i(u) = \gamma\sum\psi(X_j - h(j,u))\frac{h_i(j,u)}{d_{in}(\theta)}, \quad i = 1,\ldots,q,$$

та

$$\Psi_n(u) = \left(\Psi_n^i(u)\right)_{i=1}^q,$$

$$\Psi_n^i(u) = \gamma\sum\psi(\varepsilon_j)\frac{h_i(j,u)}{d_{in}(\theta)} + \sum H(j;0,u)\frac{h_i(j,u)}{d_{in}(\theta)}, \quad i = 1,\ldots,q,$$

де

$$\gamma = \frac{1}{E\psi'(\varepsilon_j)}.$$

Вектори $M_n(u)$ та $\Psi_n(u)$ визначено для $u\in U_n^c(\theta)$,

$$U_n(\theta) = d_n(\theta)(\Theta-\theta).$$

Зауважимо, що за введених нами припущень множини $U_n(\theta)$ розширюються до $\mathbb{R}^q$ при $n\to\infty$. Таким чином, для довільного $R>0$ $v(R) = \left\{u\in\mathbb{R}^q\colon \|u\| < R\right\}\subset$ $\subset U_n(\theta)$ для $n > n_0(R)$.

Легко зрозуміти статистичний сенс векторів $M_n(u)$ та $\Psi_n(u)$. Розглянемо функціонал

$$\gamma S_n(\theta + d_n^{-1}(\theta)u).$$

Тоді нормована M-оцінка $\widehat{u}_n = d_n(\theta)(\widehat{\theta}_n - \theta)$ задовольняє систему рівнянь

$$M_n(u) = 0. \tag{8}$$

Нехай

$$\eta_j = \gamma\psi(\varepsilon_j), \quad j \geq 1, \tag{9}$$

та спостереження мають вигляд

$$Y_j = g(j,\theta) + \eta_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Тоді

$$\Psi_n(u) = 0$$

є системою нормальних рівнянь для знаходження нормованої оцінки найменших квадратів

$$\breve{u}_n = \breve{u}_n(\theta) = d_n(\theta)(\breve{\theta}_n - \theta)$$

невідомого параметра θ допоміжної нелінійної моделі регресії (10).

Лема 1. *Нехай виконуються умови* **A**, $\mathbf{B_1}$, **C**. *Тоді для довільних* $R > 0$ *та* $r > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{u \in v^c(R)} \|M_n(u) - \Psi_n(u)\| > r\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{11}$$

Доведення. Для фіксованого i запишемо різницю

$$M_n^i(u) - \Psi_n^i(u) =$$

$$= \gamma \sum \Big[\psi\left(\varepsilon_j + H(j;0,u)\right) - \psi(\varepsilon_j) - \psi'(\varepsilon_j)H(j;0,u)\Big]\frac{h_i(j,u)}{d_{in}(\theta)} +$$

$$+\gamma \sum H(j;0,u)\frac{h_i(j,u)}{d_{in}(\theta)}\zeta_j =$$

$$= S_1(u) + S_2(u),$$

$$\zeta_j = \psi'(\varepsilon_j) - \mathrm{E}\psi'(\varepsilon_j), \quad j \geq 1.$$

Необхідно довести, що $S_1(u)$ та $S_2(u)$ збігаються до нуля за ймовірністю рівномірно по $u \in v^c(R)$.

Нехай $u \in v^c(R)$ є фіксованим. Тоді

$$\mathrm{E}S_2^2(u) = \gamma^2 \mathrm{E}\zeta_1^2 \sum H^2(j;0,u)\frac{h_i^2(j,u)}{d_{in}^2(\theta)}. \tag{12}$$

Очевидно,

$$\max_{1\le j\le n}\bigl|H(j;0,u)\bigr| = \max_{1\le j\le n}\left|\sum_{i=1}^{q}\frac{h_i(j,u_j^*)}{d_{in}(\theta)}u_i\right| \le \|u\|\max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{h_i(j,u_j^*)}{d_{in}(\theta)}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\|u_j^*\|\le\|u\|$, $j=1,\ldots,q$. Використовуючи (2), отримуємо

$$\max_{1\le j\le n}\bigl|H(j;0,u)\bigr| \le n^{-\frac{1}{2}}\|\vec{k}\|\|u\|, \tag{13}$$

де $\vec{k}=(k^1,\ldots,k^q)$ — вектор констант з нерівностей (2).

Застосовуючи нерівності (13) та (2) до суми (12), знаходимо

$$\mathrm{E}S_2^2(u) \le \gamma^2\mathrm{E}\zeta_1^2\|\vec{k}\|^2(k^i)^2R^2n^{-1}. \tag{14}$$

З (14) та умови **C(ii)** випливає, що $S_2(u)\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$ поточково у $v^c(R)$.

Для $u_1,\,u_2\in v^c(R)$ розглянемо різницю

$$S_2(u_1)-S_2(u_2)=$$
$$=\gamma\sum H(j;0,u_1)\frac{H_i(j;u_1,u_2)}{d_{in}(\theta)}\zeta_j-\gamma\sum H(j;u_1,u_2)\frac{h_i(j,u_2)}{d_{in}(\theta)}\zeta_j=$$
$$=S_3(u_1,u_2)+S_4(u_1,u_2).$$

Для довільних $h>0$, $r>0$ розглянемо ймовірність

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|S_3(u_1,u_2)|>r\right\}\le r^{-1}\mathrm{E}\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\bigl|S_3(u_1,u_2)\bigr|\le$$
$$\le 2r^{-1}\bigl|\gamma|\mathrm{E}|\psi'(\varepsilon_1)\bigr|n\sup_{\substack{u\in v(R)\\1\le j\le n}}\bigl|H(j;0,u)\bigr|\sup_{\substack{\|u_1-u_2\|\le h\\1\le j\le n}}\frac{|H_i(j;u_1,u_2)|}{d_{in}(\theta)}. \tag{15}$$

Крім цього,

$$\sup_{\substack{\|u_1-u_2\|\le h\\1\le j\le n}}\frac{|H_i(j;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta)}\le$$
$$\le h\max_{1\le j\le n}\left[\sum_{l=1}^{q}\left(\sup_{u\in v(R)}\frac{|h_{il}(j,u)|}{d_{il,n}(\theta)}\right)\frac{d_{il,n}(\theta)}{d_{in}(\theta)d_{ln}(\theta)}\right]\le\sum_{l=1}^{q}k^{il}\widetilde{k}^{il}hn^{-1} \tag{16}$$

завдяки (3) та (4). Застосовуючи (13) та (16) до (15), отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|S_3(u_1,u_2)|>r\right\}\le k_1r^{-1}n^{-\frac{1}{2}}h \tag{17}$$

з

$$k_1=2\bigl|\gamma|\mathrm{E}|\psi'(\varepsilon_1)\bigr|R\|\vec{k}\|\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}\widetilde{k}^{il}\right).$$

Аналогічним чином, використовуючи (2) та (13), знаходимо

$$P\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|S_4(u_1,u_2)|>r\right\}\le r^{-1}\mathrm{E}\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\big|S_4(u_1,u_2)\big|\le$$

$$\le 2r^{-1}\big|\gamma|\mathrm{E}|\psi'(\varepsilon_1)\big|n\sup_{\substack{u\in v^c(R)\\1\le j\le n}}\frac{|h_i(j,u)|}{d_{in}(\theta)}\sup_{\substack{\|u_1-u_2\|\le h\\1\le j\le n}}\big|H(j;u_1,u_2)\big|\le k_2r^{-1}h \qquad (18)$$

з

$$k_2=2\big|\gamma|\mathrm{E}|\psi'(\varepsilon_1)\big|Rk^i\|\vec{k}\|.$$

З (17) та (18) маємо

$$P\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\big|S_2(u_1)-S_2(u_2)\big|>r\right\}\le 2r^{-1}h(k_1n^{-\frac{1}{2}}+k_2)\le k_3r^{-1}h. \qquad (19)$$

Нехай N_h — скінченна h-сітка кулі $v^c(R)$. Тоді

$$\sup_{u\in v^c(R)}|S_2(u)|\le\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\big|S_2(u_1)-S_2(u_2)\big|+\max_{u\in N_h}\big|S_2(u)\big|. \qquad (20)$$

З (19) та (20) випливає, що для будь-якого $r>0$

$$P\left\{\sup_{u\in v^c(R)}|S_2(u)|>r\right\}<2k_3r^{-1}h+P\left\{\max_{u\in N_h}|S_2(u)|>\frac{r}{2}\right\}.$$

Для $\epsilon>0$ задамо $h=\dfrac{\epsilon r}{4k_3}$. Тоді для $n>n_0$ внаслідок поточкової збіжності $S_2(u)$ до нуля за ймовірністю маємо

$$P\left\{\max_{u\in N_{\epsilon r/4k_3}}|S_2(u)|>\frac{r}{2}\right\}\le\frac{\epsilon}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$P\left\{\sup_{u\in v^c(R)}|S_2(u)|>r\right\}<\epsilon.$$

З іншого боку, для деякої в.в. $u_n^*\in v^c(R)$

$$\sup_{u\in v^c(R)}\big|S_1(u)\big|=$$

$$=|\gamma|\left|\sum\frac{h_i(j,u_n^*)}{d_{in}(\theta)}\big(\psi(\varepsilon_j+H(j;0,u_n^*)\big)-\psi(\varepsilon_j)-\psi'(\varepsilon_j)H(j;0,u_n^*))\right|. \qquad (21)$$

Згідно з припущенням **C(iii)** та (13) майже напевно (м.н.)

$$\Big|\psi\big(\varepsilon_j+H(j;0,u_n^*)\big)-\psi(\varepsilon_j)-\psi'(\varepsilon_j)H(j;0,u_n^*)\Big|=$$

$$=\big|\psi'\big(\varepsilon_j+\delta H(j;0,u_n^*)\big)-\psi'(\varepsilon_j)\big|\big|H(j;0,u_n^*)\big|\le$$

$$\le\varkappa H^2(j;0,u_n^*)\le\varkappa\|\vec{k}\|^2R^2n^{-1},\quad \delta\in(0,1). \qquad (22)$$

Завдяки (2), (21) та (22)

$$\sup_{u\in v(R)} \left|S_1(u)\right| \leq \varkappa|\gamma|\|\vec{k}\|^2 k^i R^2 n^{-\frac{1}{2}} \quad \text{м.н.},$$

і лему 1 доведено.

Введемо в.в.

$$L_n(u) = \left(L_n^i(u)\right)_{i=1}^q,$$

$$L_n^i(u) = \sum \left(\eta_j - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j,\theta)}{d_{ln}(\theta)} u_l\right) \frac{g_i(j,\theta)}{d_{in}(\theta)}, \quad i = 1,\ldots,q, \tag{23}$$

який відповідає допоміжній лінійній регресійній моделі

$$Z_j = \sum_{i=1}^q g_i(j,\theta)\beta_i + \eta_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

з в.в. η_j, заданими формулою (9).

Система нормальних рівнянь

$$L_n(u) = 0 \tag{24}$$

визначає нормовану лінійну оцінку найменших квадратів $\widetilde{\beta}_n$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$. Покладемо

$$\widetilde{u}_n = \widetilde{u}_n(\theta) = d_n(\theta)(\widetilde{\beta}_n - \beta). \tag{25}$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови* **A**, $\mathbf{B_1}$ *та* **C**. *Тоді для довільних* $R > 0$ *та* $r > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{u\in v^c(R)} \|\Psi_n(u) - L_n(u)\| > r\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{26}$$

Доведення. Для довільного $i \in \{1,\ldots,q\}$

$$\Psi_n^i(u) - L_n^i(u) =$$

$$= \sum \eta_j \frac{h_i(j,u)}{d_{in}(\theta)} + \sum H(j;0,u)\frac{h_i(j,u)}{d_{in}(\theta)} -$$

$$-\sum \eta_j \frac{g_i(j,\theta)}{d_{in}(\theta)} + \sum \frac{g_i(j,\theta)}{d_{in}(\theta)} \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j,\theta)}{d_{ln}(\theta)} u_l =$$

$$= \sum \eta_j \frac{H_i(j;u,0)}{d_{in}(\theta)} + \sum H(j;0,u)\frac{H_i(j;u,0)}{d_{in}(\theta)} +$$

$$+\sum \frac{g_i(j,\theta)}{d_{in}(\theta)} \left[H(j;0,u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j,\theta)}{d_{ln}(\theta)} u_l\right] =$$

$$= S_5(u) + S_6(u) + S_7(u).$$

Для фіксованого $u \in v^c(R)$, використовуючи нерівність (16), знаходимо

$$\mathrm{E}S_5^2(u) = \gamma^2\mathrm{E}\psi^2(\varepsilon_1)\sum\frac{H_i^2(j;u,0)}{d_{in}^2(\theta)} \le \gamma^2\mathrm{E}\psi^2(\varepsilon_1)\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}\widetilde{k}^{il}\right)^2 R^2n^{-1},$$

і тому $S_5(u) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$ поточково у $v^c(R)$. З іншого боку, завдяки (16),

$$\mathrm{E}\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\left|S_5(u_1)-S_5(u_2)\right| \le \left|\gamma|\mathrm{E}|\psi(\varepsilon_1)\right|\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}\widetilde{k}^{il}\right)h,$$

і, як і для $S_2(u)$ в доведенні леми 1, доводиться рівномірна у $v^c(R)$ збіжність $S_5(u)$ до нуля за ймовірністю.

Беручи до уваги нерівності (13) та (16), отримуємо

$$\sup_{u\in v^c(R)}\left|S_6(u)\right| \le \|\vec{k}\|\left(\sum_{l=1}^{q}k^{il}\widetilde{k}^{il}\right)R^2n^{-\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Зауважимо, що $S_7(u)$ можна записати у вигляді

$$S_7(u) = -\frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{q}\left(\sum\frac{h_{lm}(j,\overline{u}_n)}{d_{ln}(\theta)d_{mn}(\theta)}\frac{g_i(j,\theta)}{d_{in}(\theta)}\right)u_lu_m$$

для деякого $\overline{u}_n \in v^c(R)$. Тоді за умови $\mathbf{B_1}$

$$\left|S_7(u)\right| \le \frac{k^i}{2}\sum_{l,\ m=1}^{q}\left(k^{lm}\widetilde{k}^{lm}|u_l||u_m|\right)n^{-\frac{1}{2}} \le \frac{qk^i}{2}\max_{l,\ m=1,\ldots,q}\left[k^{lm}\widetilde{k}^{lm}\right]\|u\|^2n^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким чином,

$$\sup_{u\in v^c(R)}\left|S_7(u)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

і лему 2 доведено.

З (11) та (26) випливає таке твердження.

Лема 3. *Нехай виконуються умови* **A**, $\mathbf{B_1}$ *та* **C**. *Тоді для довільних* $R > 0$ *та* $r > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{u\in v^c(R)}\|M_n(u)-L_n(u)\| > r\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{27}$$

Використовуючи (23) та (24), знаходимо (див. (25))

$$\widetilde{u}_n = \Lambda_n(\theta)\sum\eta_jd_n^{-1}(\theta)\nabla g(j,\theta), \tag{28}$$

де $\nabla g(j,\theta) = (g_i(j,\theta))_{i=1}^q$ — градієнт функції $g(j,\theta)$.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (2), **C(i)**, **C(ii)** *та* $\mathbf{B_2}$. *Тоді для довільних* $R > 0$ *та* $r > 0$

$$\sup_{C\in\mathcal{C}^q}\left|\mathrm{P}\left\{\widetilde{u}_n\in C\right\}-\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{29}$$

Доведення. Позначимо через $\mathrm{cov}(\zeta)$ коваріаційну матрицю в.в. ζ.

Для доведення леми необхідно перевірити умови наслідку 17.2 в [41, с. 172], який сформульовано нижче у зручному для нас вигляді.

Твердження 1. *Нехай ξ_{jn}, $j = 1, \ldots, n$, $n \geq 1$, — послідовність серій із незалежних в кожній серії в.в. в $\mathbb{R}^q$ з $\mathrm{E}\xi_{jn} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $n \geq 1$, і для $n \geq n_0$:*

1) $\lambda_{\min}(K_n) \geq \lambda_* > 0$, $K_n = n^{-1}\sum \mathrm{cov}(\xi_{jn})$;

2) $n^{-1}\sum \mathrm{E}\|\xi_{jn}\|^3 \leq r_3 < \infty$.

Тоді існує константа $k(q) < \infty$ така, що

$$\sup_{C \in \mathcal{C}^q} \left| \mathrm{P}\left\{ n^{-1/2}\sum \xi_{jn} \in C \right\} - \Phi_{K_n}(C) \right| \leq k(q)\lambda_*^{-3/2} r_3 n^{-1/2}.$$

Покладемо $\xi_{jn} = n^{1/2}\eta_j \Lambda_n(\theta) d_n^{-1}(\theta)\nabla g(j,\theta)$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді $K_n = \sigma^2\Lambda_n(\theta)$. Оскільки $J_{ii,n} = 1$, $i = 1, \ldots, q$, то $\lambda_{\max}(J_n(\theta)) \leq q$ і, відповідно, $\lambda_{\min}(\Lambda_n(\theta)) \geq \dfrac{1}{q}$.

Позначимо

$$\mu_3 = \frac{\mathrm{E}|\psi(\varepsilon_1)|^3}{|\mathrm{E}\psi'(\varepsilon_1)|^3} < \infty.$$

Маємо

$$n^{-1}\sum \mathrm{E}\|\xi_{jn}\|^3 \leq \mu_3 \Big(\lambda_{\max}\big(\Lambda_n(\theta)\big)\Big)^3 n^{1/2} \sum \left(\sum_{i=1}^{q} \frac{g_i^2(j,\theta)}{d_{in}^2(\theta)} \right)^{3/2}. \tag{30}$$

За умови $\mathbf{B_2}$ для $n > n_0$ виконується $\lambda_{\min}(J_n(\theta)) \geq \lambda_0 > 0$. Відповідно, при $n > n_0$

$$\lambda_{\max}(\Lambda_n(\theta)) \leq \frac{1}{\lambda_0}. \tag{31}$$

З іншого боку, завдяки (2)

$$n^{1/2}\sum \left(\sum_{i=1}^{q} \frac{g_i^2(j,\theta)}{d_{in}^2(\theta)} \right)^{3/2} \leq n^{3/2} \left(\sum_{i=1}^{q} \left(\max_{1 \leq j \leq n} \frac{|g_i(j,\theta)|}{d_{in}(\theta)} \right)^2 \right)^{3/2} \leq \|\vec{k}\|^3. \tag{32}$$

Таким чином, підставляючи (31), (32) у (30), отримуємо

$$n^{-1}\sum \mathrm{E}\|\xi_{jn}\|^3 \leq \mu_3 \lambda_0^{-3} \|\vec{k}\|^3 = r_3 < \infty.$$

Всі умови твердження 1 виконано, і лему 4 доведено.

Аналогічно (7) виконаємо заміну змінних

$$w = n^{-\frac{1}{2}} d_n(\theta)(\tau - \theta)$$

у функції регресії та її похідних. Функції, аналогічні h, h_i, H, H_i позначимо f, f_i, F, F_i відповідно (див. також означення перед умовою $\mathbf{B_3}$).

Лема 5. *За умов теореми для довільного $\epsilon > 0$ існує таке $n_0 = n_0(\epsilon)$, що для $n > n_0$ з імовірністю не меншою за $1 - \dfrac{\epsilon}{3}$ система рівнянь*

$$\nabla \left(\gamma n^{-1} S_n(\theta + n^{\frac{1}{2}} d_n^{-1}(\theta) w) \right) = 0 \tag{33}$$

має єдиний розв'язок.

Доведення. Розглянемо загальний елемент гессіана $\mathbb{H}(w)$ відображення $w \to \to \gamma n^{-1} S_n(\theta + n^{\frac{1}{2}} d_n^{-1}(\theta) w)$:

$$\mathbb{H}_{il}(w) = \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l} \left(\gamma n^{-1} S_n(\theta + n^{\frac{1}{2}} d_n^{-1}(\theta) w) \right) = \sum_{k=1}^{8} \mathbb{H}_{il}^{(k)}(w),$$

$$\mathbb{H}_{il}^{(1)}(w) = \frac{\gamma}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \sum \left(\psi'(\varepsilon_j + F(j;0,w)) - \psi'(\varepsilon_j) \right) f_i(j,w) f_l(j,w),$$

$$\mathbb{H}_{il}^{(2)}(w) = \frac{\gamma}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \sum \psi'(\varepsilon_j) \left(f_i(j,w) F_l(j;w,0) + f_l(j,0) F_i(j;w,0) \right),$$

$$\mathbb{H}_{il}^{(3)} = \frac{\gamma}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \sum \zeta_j f_i(j,0) f_l(j,0); \quad \mathbb{H}_{il}^{(4)} = J_{il,n}(\theta),$$

$$\mathbb{H}_{il}^{(5)}(w) = -\frac{\gamma}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \sum \bigl(\psi(\varepsilon_j + F(j;0,w)) - \psi(\varepsilon_j) -$$

$$- \psi'(\varepsilon_j) F(j;0,w) \bigr) f_{il}(j,w),$$

$$\mathbb{H}_{il}^{(6)}(w) = -\frac{\gamma}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \sum \psi'(\varepsilon_j) F(j;0,w) f_{il}(j,w),$$

$$\mathbb{H}_{il}^{(7)}(w) = -\frac{1}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \sum \eta_j F_{il}(j;w,0),$$

$$\mathbb{H}_{il}^{(8)} = -\frac{1}{d_{in}(\theta) d_{ln}(\theta)} \sum \eta_j f_{il}(j,0), \quad i,l = 1,\ldots,q.$$

Нерівності, аналогічні (13) та (16), набирають вигляду

$$\max_{1 \le j \le n} \bigl| F(j;w,0) \bigr| \le \|\vec{k}\| \|w\|,$$

$$n^{-\frac{1}{2}} d_{in}^{-1}(\theta) \max_{1 \le j \le n} \bigl| F_i(j;w,0) \bigr| \le \left(\sum_{l=1}^{q} k^{il} \widetilde{k}^{il} \right) \|w\| n^{-1}, \quad i = 1,\ldots,q.$$

У подальших оцінках будемо використовувати умови теореми та останні дві нерівності. Маємо

$$\bigl| \mathbb{H}_{il}^{(1)}(w) \bigr| \le |\gamma| \varkappa k^i k^l \|\vec{k}\| \|w\|. \tag{34}$$

Позначимо $\xi_n = \dfrac{1}{n} \sum \left(\left(\psi'(\varepsilon_j)\right)^2 - \mathrm{E}\left(\psi'(\varepsilon_j)\right)^2 \right)$. Тоді

$$\bigl| \mathbb{H}_{il}^{(2)}(w) \bigr| \le |\gamma| n^{\frac{1}{2}} \left(|\xi_n|^{\frac{1}{2}} + \left(\mathrm{E}\left(\psi'(\varepsilon_j)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \times$$

$$\times \left(2 \sum \frac{f_i^2(j,w) F_l^2(j;w,0) + f_l^2(j,0) F_i^2(j;w,0)}{d_{in}^2(\theta) d_{ln}^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le |\gamma| \left(|\xi_n|^{\frac{1}{2}} + \left(\mathrm{E}\left(\psi'(\varepsilon_j)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \times$$

$$\times \left(2 (k^i)^2 \left(\sum_{i=1}^{q} k^{li} \widetilde{k}^{li} \right)^2 + 2 (k^l)^2 \left(\sum_{i=1}^{q} k^{il} \widetilde{k}^{il} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|, \tag{35}$$

$$\mathrm{E}\left(\mathbb{H}_{il}^{(3)}\right)^2 \leq \gamma^2 \mathrm{E}\zeta_j^2 \left(k^i k^l\right)^2 n^{-1}, \tag{36}$$

$$\left|\mathbb{H}_{il}^{(5)}(w)\right| \leq |\gamma| \varkappa \sum \frac{F^2(j;0,w)|f_{il}(j,w)|}{d_{in}(\theta)d_{ln}(\theta)} \leq |\gamma| \varkappa k^{il}\, \widetilde{k}^{il} \|\vec{k}\|^2 \|w\|^2. \tag{37}$$

Аналогічно (35) отримуємо

$$\left|\mathbb{H}_{il}^{(6)}(w)\right| \leq |\gamma| \left(|\xi_n|^{\frac{1}{2}} + \left(\mathrm{E}\left(\psi'(\varepsilon_j)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \|\vec{k}\| k^{il} \widetilde{k}^{il} \|w\|. \tag{38}$$

За умови $\mathbf{B_3}$, якщо $\|w\| \leq r_0$,

$$\left|\mathbb{H}_{il}^{(7)}(w)\right| \leq \left(|\nu_n|^{\frac{1}{2}} + \left(\mathrm{E}\nu_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) k_{il}^{\frac{1}{2}} \|w\|, \tag{39}$$

де $\nu_n = n^{-1} \sum (\eta_j^2 - \mathrm{E}\eta_j^2)$.

Маємо також

$$\mathrm{E}\left(\mathbb{H}_{il}^{(8)}\right)^2 \leq \mathrm{E}\eta_j^2 \left(k^{il}\widetilde{k}^{il}\right)^2 n^{-1}. \tag{40}$$

На підставі нерівності [42, с. 103] можемо записати

$$\Big|\lambda_{\min}\left(\mathbb{H}(w)\right) - \lambda_{\min}\left(J_n(\theta)\right)\Big| \leq q \max_{1 \leq i,l \leq q} |\mathbb{H}_{il}(w) - J_{il,n}(\theta)| \leq$$

$$\leq q \sum_{k \neq 4} \max_{1 \leq i,l \leq q} \left|\mathbb{H}_{il}^{(k)}(w)\right|.$$

З умови конзистентності $\mathbf{D}$ та оцінок (34)–(40) випливає, що для довільного $\epsilon > 0$ можна вказати подію C_n, імовірність якої $\mathrm{P}\{C_n\} \geq 1 - \dfrac{\epsilon}{3}$ для $n > n_0$, таку, що коли C_n відбувається, то

$$|\lambda_{\min}\left(\mathbb{H}(w)\right) - \lambda_{\min}\left(J_n(\theta)\right)| \leq \frac{\lambda_0}{2},$$

або

$$\lambda_{\min}\left(\mathbb{H}(\widehat{w}_n)\right) \geq \frac{\lambda_0}{2},$$

тобто випадковий вектор $\widehat{w}_n$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (33).

Наслідок 2. *Для будь-яких $\epsilon > 0$ та $R > 0$ система рівнянь* (8) *для $n > n_0$ з імовірністю не меншою за $1 - \dfrac{\epsilon}{3}$ має єдиний розв'язок у кулі $v^c(R)$.*

3. Доведення основних результатів. ***Доведення теореми.*** З огляду на лему 4 для доведення теореми необхідно показати, що для довільних $r > 0$

$$\pi_n(r) = \mathrm{P}\left\{\|\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\| > r\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{41}$$

де $\widetilde{u}_n$ введено у (28).

Задамо подію $A_n = \left\{\widetilde{u}_n \in v^c(R-r)\right\}$ з таким R, що за лемою 4 для $n > n_0$

$$\mathrm{P}\{\,\overline{A}_n\} \leq \frac{\epsilon}{3},$$

де $\epsilon > 0$ — фіксоване як завгодно мале число.

Введемо також подію

$$B_n = \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|\Lambda_n(\theta)(M_n(u) - L_n(u))\| \leq r \right\}.$$

З (27) та (31) випливає, що для $n > n_0$

$$\mathrm{P}\{\overline{B}_n\} \leq \mathrm{P}\left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|M_n(u) - L_n(u)\| > \lambda_0 r \right\} \leq \frac{\epsilon}{3},$$

а отже, для $n > n_0$

$$\mathrm{P}\{A_n \cap B_n \cap C_n\} \geq 1 - \epsilon, \tag{42}$$

де C_n — подія, про яку йдеться у доведенні леми 5.

Беручи до уваги формули (23) та (28), отримуємо $\Lambda_n(\theta) L_n(u) = \widetilde{u}_n - u$. Якщо подія $A_n \cap B_n \cap C_n$ відбулася, то для $u \in v^c(R)$

$$\big\|u + \Lambda_n(\theta) M_n(u)\big\| \leq \big\|\Lambda_n(\theta)(M_n(u) - L_n(u))\big\| + \|\widetilde{u}_n\| \leq r + (R - r) = R,$$

тобто $F_n(u) = u + \Lambda_n(\theta) M_n(u)$ — неперервне відображення з $v^c(R)$ в $v^c(R)$. Для того щоб довести (41), скористаємося теоремою Брауера про нерухому точку (див., наприклад, [43]).

Застосовуючи цю теорему до $F_n(u)$, отримуємо, що існує точка $u_n^0 \in v^c(R)$ така, що $F_n(u_n^0) = u_n^0$ або, оскільки $\Lambda_n(\theta)$ не вироджена, $M_n(u_n^0) = 0$. Згідно з наслідком 2 леми 5 єдиним розв'язком системи рівнянь $M_n(u) = 0$ є нормована M-оцінка $\widehat{u}_n$. Таким чином,

$$A_n \cap B_n \cap C_n \subset \big\{\widehat{u}_n \in v^c(R)\big\}$$

і

$$\mathrm{P}\big\{\widehat{u}_n \in v^c(R)\big\} \geq 1 - \epsilon.$$

Зауважимо також, що з (42) випливає нерівність

$$\begin{aligned} 1 - \epsilon &\leq \mathrm{P}\Big\{\big\{\widehat{u}_n \in v^c(R)\big\} \cap B_n\Big\} \leq \\ &\leq \mathrm{P}\Big\{\big\|\Lambda_n(\theta)(M_n(\widehat{u}_n) - L_n(\widehat{u}_n))\big\| \leq r\Big\} = \\ &= \mathrm{P}\left\{\|\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n)\| \leq r\right\}, \end{aligned} \tag{43}$$

а виконання (43) для довільного $\epsilon > 0$ еквівалентне виконанню (41).

Нехай для опуклої борелевої множини C

$$C_r = \{x \colon x \in \mathbb{R}^q;\ d(x, C) < r\},$$

де $d(x, C) = \inf\limits_{y \in C} \|x - y\|$, та $C_{-r} = \mathbb{R}^q \backslash \left(\mathbb{R}^q \backslash C\right)_r$.

Тоді завдяки (41),

$$\mathrm{P}\{\widehat{u}_n \in C\} \leq \mathrm{P}\left\{\widehat{u}_n \in C, \|\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\| \leq \frac{r}{2}\right\} +$$

$$+\mathrm{P}\left\{\widehat{u}_n \in C, \|\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\| > \frac{r}{2}\right\} \leq \mathrm{P}\{\widetilde{u}_n \in C_r\} + \pi_n\left(\frac{r}{2}\right), \tag{44}$$

$$\mathrm{P}\{\widetilde{u}_n \in C_{-r}\} \leq P\left\{\widetilde{u}_n \in C_{-r}, \|\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\| \leq \frac{r}{2}\right\} +$$

$$+\mathrm{P}\left\{\widetilde{u}_n \in C_{-r}, \|\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\| > \frac{r}{2}\right\} \leq \mathrm{P}\{\widehat{u}_n \in C\} + \pi_n\left(\frac{r}{2}\right). \tag{45}$$

Для довільної опуклої множини $C \in \mathcal{C}^q$ з (44) та (45) маємо

$$\mathrm{P}\{\widehat{u}_n \in C\} - \Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C) \leq$$

$$\leq \pi_n\left(\frac{r}{2}\right) + \Big(\mathrm{P}\{\widetilde{u}_n \in C_r\} - \Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C_r)\Big) +$$

$$+\Big(\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C_r) - \Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C)\Big), \tag{46}$$

$$\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C) - \mathrm{P}\{\widehat{u}_n \in C\} \leq$$

$$\leq \pi_n\left(\frac{r}{2}\right) + \Big(\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C_{-r}) - \mathrm{P}\{\widetilde{u}_n \in C_{-r}\}\Big) +$$

$$+\Big(\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C) - \Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C_{-r})\Big). \tag{47}$$

Другі доданки у правих частинах (46) та (47) збігаються до нуля рівномірно по $C \in \mathcal{C}^q$ завдяки (29), $\pi_n\left(\frac{r}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ за (41). Для оцінки третіх доданків нам потрібен один глибокий факт, повне доведення якого можна знайти в § 3 [41].

Твердження 2. *Нехай ν — невід'ємна диференційовна функція на $[0, \infty)$ така, що*:

1) $b = \int_0^\infty |\nu'(\lambda)|\lambda^{q-1} d\lambda < \infty$;

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \nu(\lambda) = 0$.

Тоді для довільної опуклої множини $C \in \mathcal{C}^q$ та будь-якого $r > 0$

$$\int\limits_{C_r\setminus C} \nu(\|x\|)dx \leq b\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}r, \qquad \int\limits_{C\setminus C_{-r}} \nu(\|x\|)dx \leq b\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}r. \tag{48}$$

Оскільки за означенням матриці $J_n(\theta)$

$$\det J_n(\theta) \leq q!,$$

а за умовою $\mathbf{B_2}$ для $n > n_0$

$$\langle J_n(\theta)x, x\rangle \geq \lambda_0\|x\|^2,$$

то

$$\varphi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(x) = \frac{(\det J_n(\theta))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{q}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\langle J_n(\theta)x, x\rangle\right\} \leq$$

$$\leq \frac{(q!)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{q}{2}}} \exp\left\{-\frac{\lambda_0}{2\sigma^2}\|x\|^2\right\} = \nu(\|x\|).$$

Тоді за формулами (48)

$$\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C_r) - \Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C) = \int\limits_{C_r \setminus C} \varphi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(x)dx \leq b\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}\right)}r, \qquad (49)$$

де $b = b(q, \lambda_0, \sigma^2) < \infty$ — деяка константа, яка не залежить від множини C.

За допомогою (48) для різниці

$$\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C) - \Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C_{-r})$$

отримуємо оцінку, яка збігається з (49).

Таким чином, з (46), (47) та попередніх міркувань випливає справедливість (6).

***Доведення наслідку* 1.** Беручи до уваги (6), потрібно довести, що

$$\sup_{C \in \mathcal{C}^q} \left|\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C) - \Phi_{\sigma^2\Lambda(\theta)}(C)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Позначимо $\lambda_{\min}(J(\theta)) = 2\lambda_0 > 0$. Тоді для $n > n_0$ $\lambda_{\min}(J_n(\theta)) \geq \lambda_0$. Для довільного $C \in \mathcal{C}^q$ та $n > n_0$

$$\left|\Phi_{\sigma^2\Lambda_n(\theta)}(C) - \Phi_{\sigma^2\Lambda(\theta)}(C)\right| \leq$$

$$\leq \frac{\left|(\det J_n(\theta))^{\frac{1}{2}} - (\det J(\theta))^{\frac{1}{2}}\right|}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{q}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^q} \exp\left\{-\frac{\lambda_0}{2\sigma^2}\|x\|^2\right\}dx +$$

$$+\frac{(\det J(\theta))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{q}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^q} \left|\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\langle J_n(\theta)x, x\right\rangle\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\langle J(\theta)x, x\right\rangle\right\}\right| dx =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} I_1 = 0$. Крім того, послідовність функцій

$$f_n(x) = \left|\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\langle J_n(\theta)x, x\right\rangle\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\langle J(\theta)x, x\right\rangle\right\}\right|, \quad x \in \mathbb{R}^q,$$

поточково збігається до нуля та має інтегровну мажоранту:

$$f_n(x) \leq \exp\left\{-\frac{\lambda_0}{2\sigma^2}\|x\|^2\right\} + \exp\left\{-\frac{\lambda_0}{\sigma^2}\|x\|^2\right\}, \quad n > n_0.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність $\lim\limits_{n\to\infty} I_2 = 0$.

Наслідок доведено.

4. Приклади. Наступні функції втрат ρ мають обмежену похідну $\rho''' = \psi''$, тобто для них виконується умова Ліпшиця **C(iii)**:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\nu}(1 - e^{-\nu x^2}), \quad \nu > 0,$$

$$\rho(x) = 2\ln\operatorname{ch}\frac{x}{2},$$

$$\rho(x) = \nu x \operatorname{arctg}\mu x - \frac{\nu}{2\mu}\ln(1 + \mu^2x^2), \quad \nu, \quad \mu > 0,$$

$$\rho(x) = \frac{x^2}{x^2+c^2}, \quad c>0, \qquad \psi(x) = \frac{2c^2x}{(x^2+c^2)^2}, \qquad \psi'(x) = \frac{2c^2(c^2-3x^2)}{(x^2+c^2)^3},$$

$$\psi''(x) = \frac{24c^2x(x^2-c^2)}{(x^2+c^2)^4}.$$

У подальших прикладах зупинимось на M-оцінках параметрів зсуву в.в. зі щільністю Коші, побудованих за останньою функцією втрат.

***Приклад* 1.** Розглянемо модель регресії

$$X_j = \theta_1 \cos\theta_2 j + \varepsilon_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

в якій функцію регресії $g(j,\theta) = \theta_1\cos\theta_2 j$ задано на $\Theta = (a,A)\times(h,\pi-h)$, $0<a<A<\infty,\ 0<h<\dfrac{\pi}{2}$, та в.в. ε_j мають розподіл Коші зі щільністю

$$f_{\varepsilon_j}(x) = \frac{c}{\pi(x^2+c^2)}, \quad x\in\mathbb{R}^1,$$

$c>0$ — деякий відомий параметр.

У цьому випадку

$$g_1(j,\theta) = \cos\theta_2 j, \qquad g_2(j,\theta) = -\theta_1 j\sin\theta_2 j,$$

$$g_{11}(j,\theta)=0, \qquad g_{12}(j,\theta) = -j\sin\theta_2 j, \qquad g_{22}(j,\theta) = -\theta_1 j^2\cos\theta_2 j,$$

крім того,

$$d_{1n}^2(\theta) = \sum\cos^2\theta_2 j = \frac{n}{2} + O(1), \quad n\to\infty, \tag{50}$$

$$d_{2n}^2(\theta) = \theta_1^2\sum j^2\sin^2\theta_2 j = \theta_1^2\frac{n^3}{6} + O(n^2), \quad n\to\infty. \tag{51}$$

Виходячи з (50) та (51), можна взяти нормовані M-оцінки

$$\widehat{u}_{1n} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac12}(\widehat{\theta}_{1n}-\theta_1), \qquad \widehat{u}_{2n} = \theta_1\left(\frac{n^3}{6}\right)^{\frac12}\left(\widehat{\theta}_{2n}-\theta_2\right). \tag{52}$$

Враховуючи, що $d_{12,n}(\theta) = O(n^{\frac32})$, $d_{22,n}(\theta) = O(n^{\frac52})$, бачимо, що умова $\mathbf{B_1}$ виконується. Зауважимо також, що

$$\lim_{n\to\infty} J_n(\theta) = J(\theta) = \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

і, таким чином, умови $\mathbf{B_4}$ (та $\mathbf{B_2}$) виконано також.

Перевіримо виконання умови $\mathbf{B_3}$. Для випадку, коли $i=l=1$, $g_{11}(j,\theta)=0$, і твердження є очевидним. Для випадку $i=1$, $l=2$

$$\frac{nF_{12,n}(w,0)}{d_{1n}^2(\theta)d_{2n}^2(\theta)} = \frac{n}{d_{1n}^2(\theta)d_{2n}^2(\theta)}\sum\left(j\sin(\theta_2+n^{\frac12}d_{2n}^{-1}(\theta)w_2)j - j\sin\theta_2 j\right)^2 \le$$

$$\le \frac{4n}{d_{1n}^2(\theta)d_{2n}^2(\theta)}\sum j^2\sin^2\left(\frac{j}{2}n^{\frac12}d_{2n}^{-1}(\theta)w_2\right) \le k_{12}\|w\|^2$$

для деякого $k_{12}>0$. Аналогічно

$$\frac{nF_{22,n}(w,0)}{d_{2n}^4(\theta)} = \frac{n}{d_{2n}^4(\theta)} \sum j^4 \biggl(\theta_1 \left[\cos(\theta_2 + n^{\frac{1}{2}} d_{2n}^{-1}(\theta) w_2) j - \cos\theta_2 j\right] +$$

$$+ n^{\frac{1}{2}} d_{1n}^{-1}(\theta) w_1 \cos(\theta_2 + n^{\frac{1}{2}} d_{2n}^{-1}(\theta) w_2) j\biggr)^2 \le$$

$$\le \frac{4\theta_1^2 n}{d_{2n}^4(\theta)} \sum j^4 \sin^2\left(\frac{j}{2} n^{\frac{1}{2}} d_{2n}^{-1}(\theta) w_2\right) +$$

$$+ \left(\frac{2n^2}{d_{1n}^2(\theta) d_{2n}^4(\theta)} \sum j^4\right) |w_1|^2 \le k_{22} \|w\|^2$$

для деякого $k_{22} > 0$.

Перевіримо виконання умови **C** у випадку, коли параметри c функцій ρ та f збігаються. Очевидно,

$$\mathrm{E}\psi(\varepsilon_j) = 0, \qquad \mathrm{E}\left|\psi(\varepsilon_j)\right|^3 < \infty, \qquad \mathrm{E}\left|\psi'(\varepsilon_j)\right|^2 < \infty.$$

Неважко знайти, наприклад, методом лишків, що

$$\mathrm{E}\psi^2(\varepsilon_j) = \frac{5}{32c^2}, \qquad \mathrm{E}\psi'(\varepsilon_j) = \frac{1}{4c^2} > 0.$$

Таким чином, умова **C** виконується і величина σ^2, задана формулою (5), набуває значення

$$\sigma^2 = \frac{5c^2}{2}.$$

Отже, нормована M-оцінка $\widehat{u_n} = (\widehat{u}_{1n},\ \widehat{u}_{2n})$, яку задано в (52), асимптотично нормальна $N\left(0,\ \dfrac{5c^2}{2}\mathbb{I}_2\right)$.

Приклад **2.** Розглянемо модель спостережень

$$X_j = \theta + \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, n\ ,$$

яка є найпростішим випадком загальної моделі (1). Припустимо, що похибки спостережень ε_j мають розподіл Коші зі щільністю

$$f_{\varepsilon_j}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Таким чином, спостереження X_j мають щільність розподілу

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

і параметр θ є медіаною в.в. X_j.

Доведена у статті теорема стверджує, що M-оцінка $\hat{\theta}_n$ параметра θ, побудована за допомогою функції втрат $\rho(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, має таку властивість: величина $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)$ асимптотично нормальна $N\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$.

З іншого боку, якщо в якості оцінки медіани θ взяти порядкову статистику $X_{\left(k\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$, де $k\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{n}{2}$, якщо $\dfrac{n}{2}$ — ціле число, і $k\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ в протилежному випадку, то в.в. $\sqrt{n}\left(X_{\left(k(\frac{1}{2})\right)} - \theta\right)$ є асимптотично нормальною $N\left(0,\ \dfrac{1}{4f^2(\theta,\theta)}\right)$ і, очевидно, $\dfrac{1}{4f^2(\theta,\theta)} = \dfrac{\pi^2}{4}$ (див., наприклад, теорему 2 в [44, с. 368]).

Відносною асимптотичною ефективністю цих двох оцінок є величина

$$\frac{\pi^2}{4} \ : \ \frac{5}{2} = \frac{\pi^2}{10} \approx 0,987.$$

Останній результат показує, що $\hat{\theta}_n$ і $X_{(k(1/2))}$ оцінюють медіану θ практично з однією точністю.

1. *Huber P. J.* Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte-Carlo // Ann. Statist. – 1973. – **1**, № 5. – P. 799 – 821.
2. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984.
3. *Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A.* Robust statistics. The approach based on influence functions. – New York: Wiley, 1986.
4. *Ronner A. E.* Asymptotic normality of p-norm estimators in multiple regression // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1984. – **66**. – S. 613 – 620.
5. *Бардадым Т. А., Иванов А. В.* Асимптотическая нормальность l_α-оценок параметров нелинейной модели регрессии // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 8. – С. 68 – 70.
6. *Бардадим Т. О., Іванов О. В.* Про асимптотичну нормальність l_α-оцінок параметра нелінійної моделі регресії // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1999. – Вип. 60. – С. 1 – 10.
7. *Chen X. R., Wu Y. H.* Strong consistency of M-estimates in linear models // J. Multivar. Anal. – 1988. – **27**. – P. 116 – 130.
8. *Jurečková.* Consistency of M-estimators in linear model generated by a nonmonotone and discontinuous ψ-function // Probab. Statist. – 1989. – **10**. – P. 1 – 10.
9. *Иванов А. В.* О состоятельности l_α-оценок параметров функции регрессии // Теория вероятности и мат. статистика. – 1990. – Вып. 42. – С. 42 – 48.
10. *Liese F., Vajda I.* Asymptotic normality of M-estimators in nonlinear regression // Res. Rept UTIA, Prague. – 1991. – № 1714. – 6 p.
11. *Liese F., Vajda I.* Consistency of M-estimators in nonlinear regression. – Ibid. – № 1713. – 19 p.
12. *Liese F., Vajda I.* Consistency of M-estimates in general regression models // J. Multivar. Anal. – 1994. – **50**, № 1. – P. 93 – 114.
13. *Liese F., Vajda I.* Necessary and sufficient conditions for consistency of generalized M-estimates // Metrika. – 1995. – **42**. – P. 291 – 324.
14. *Liese F., Vajda I.* A general asymptotic theory of M-estimators // Res. Rept. UTIA, Prague. – 1999. – № 1951.
15. *Müller Ch. H.* Robust planning and analysis of experiments // Lect. Notes Statist. – New York: Springer, 1997.
16. *Liese F.* Necessary and sufficient conditions for consistency of approximate M-estimators in nonlinear models // Proc. Prague Stochast. – 1998. – P. 357 – 360.
17. *Arcones M. A.* Asymptotic theory of M-estimators over a convex kernel // Econometric Theory. – 1998. – **14**, № 4. – P. 387 – 422.
18. *Wu Y., Zen M. M.* A strongly consistent information criterion for linear model selection based on M-estimation // Probab. Theory and Relat. Fields. – 1999. – **113**. – P. 599 – 625.
19. *Geer van de S. A.* Empirical processes in M-estimation. – Cambridge Univ. Press, 2000.
20. *Орловський І. В.* Конзистентність оцінок Коенкера – Бассета в нелінійних моделях регресії // Наук. вісті НТУУ „КПІ”. – 2004. – № 3(35). – С. 144 – 150.
21. *Іванов О. В., Орловський І. В.* Асимптотична нормальність оцінок Коенкера – Бассета у нелінійних моделях регресії // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2005. – Вип. 72. – С. 30 – 41.
22. *Ivanov A. V., Orlovsky I. V.* Parameter estimators of nonlinear quantile regression // Theory Stochast. Process. – 2005. – **11(27)**, № 3-4. – P. 82 – 91.

23. *Koul H. L.* M-estimators in linear models with long range dependent errors // Statist. and Probab. Lett. – 1992. – **14**. – P. 153 – 164.
24. *Koul H. L.* Asymptotics of M-estimations in non-linear regression with long-range dependence errors // Proc. Athens Conf. Appl. Probab. and Time Ser. Analysis / Eds. P. M. Robinson and M. Rosenblatt: Lect. Notes Statist. – 1996. – **2**. – P. 272 – 291.
25. *Koul H. L., Mukherjee K.* Regression quantiles and related processes under long range dependent errors // J. Multivar. Anal. – 1994. – **51**. – P. 318 – 337.
26. *Giraitis L., Koul H. L., Surgailis D.* Asymptotic normality of regression estimators with long memory errors // Statist. and Probab. Lett. – 1996. – **29**. – P. 317 – 335.
27. *Koul H. L., Surgailis D.* Asymptotic expansion of M-estimators with long memory errors // Ann. Statist. – 1997. – **25**. – P. 818 – 850.
28. *Koul H. L., Surgailis D.* Second order behavior of M-estimators in linear regression with long-memory errors // J. Statist. Planning and Inference. – 2000. – **91**. – P. 399 – 412.
29. *Koul H. L., Surgailis D.* Robust estimators in regression models with long memory errors // Theory and Application of Long-Range Dependence / Eds P. Doukhan, G. Oppenheim and M. S. Taqqu. – Boston: Birkhäuser, 2003. – P. 339 – 353.
30. *Giraitis L., Koul H. L.* Estimation of the dependence parameter in linear regression with long-range dependent errors // Statist. and Probab. Letters. – 1996. – **29**. – P. 317 – 335.
31. *Koul H. L., Baillie R. T., Surgailis D.* Regression model fitting with a long memory covariance process // Economic Theory. – 2004. – **20**. – P. 485 – 512.
32. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Asymptotic behavior of M-estimators in continuous-time non-linear regression with long-range dependent errors // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2002. – **10**, № 3. – P. 201 – 222.
33. *Ivanov A. V., Orlovsky I. V.* L_p-estimates in nonlinear regression with long-range dependence // Theory Stochast. Processes. – 2002. – **7**, № 3-4. – P. 38 – 49.
34. *Іванов О. В., Орловський І. В.* Конзистентність М-оцінок у нелінійних моделях регресії з неперервним часом // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2005. – № 4. – С. 140 – 147.
35. *Orlovsky I. V.* M-estimates in nonlinear regression with weak dependence // Theory Stochast. Process. – 2003. – **9**, №. 1-2. – P. 108 – 122.
36. *Орловський І. В.* Асимптотичні властивості M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2007.
37. *Jennrich R. I.* Asymptotic properties of non-linear least squares estimators // Ann. Math. Statist. – 1969. – **40**. – P. 633 – 643.
38. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika. – 1969. – **14**. – P. 249 – 272.
39. *Шметтерер Л.* Введение в математическую статистику. – М.: Наука, 1976.
40. *Ivanov A. V.* Asymptotic theory of nonlinear regression. – Dordrecht: Kluwer Acad. Press, 1997.
41. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. – М.: Наука, 1982.
42. *Wilkinson J. H.* The algebraic eigenvalue problem. – Oxford: Clarendon Press, 1965.
43. *Гончаренко Ю. В., Ляшко С. И.* Теорема Брауэра. – Киев: КИЙ, 2000.
44. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища шк., 1988.

Одержано 03.07.07,
після доопрацювання — 25.03.08