УДК 517.95

В. В. Курта, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О поведении решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях

Сформулированы аналоги известной в теории аналитических функций теоремы Фрагмена — Линделефа для решений широкого класса квазилинейных уравнений эллиптического типа. Приведены примеры, иллюстрирующие точность полученных результатов для решений уравнения вида $\operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u) = f(x, u)$, где $f(x, u)$ — локально ограниченная в $\mathbb{R}^{n+1}$ функция,

$$f(x, 0) = 0,\ uf(x, u) \geqslant a|u|^{1+q},\ a > 0,\ \alpha > 1,\ \alpha - 1 > q \geqslant 0,\ n \geqslant 2.$$

Сформульовані аналоги відомої в теорії аналітичних функцій теореми Фрагмена — Лінделефа для розв'язків широкого класу квазілінійних рівнянь еліптичного типу. Наведені приклади, що ілюструють точність одержаних результатів для розв'язків рівняння вигляду $\operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u) = f(x, u)$, де $f(x, u)$ — локально обмежена в $\mathbb{R}^{n+1}$ функція,

$$f(x, 0) = 0, uf(x, u) \geqslant a|u|^{1+q},\ a > 0,\ \alpha > 1,\ \alpha - 1 > q \geqslant 0,\ n \geqslant 2.$$

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $A_i(x, \eta, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— измеримые локально ограниченные функции, определенные на множестве $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такие, что

$$(\xi A) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i(x, \eta, \xi) \geqslant 0. \tag{1}$$

Обозначим через L дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x, u, \nabla u). \tag{2}$$

© В. В. КУРТА, 1992

Будем говорить, следуя [1], что оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$, $1<\alpha<\infty$, если он удовлетворяет условию (1) и существует постоянная $\mathcal{K}>0$ такая, что для любых $\xi, \psi \in \mathbb{R}^n$ и $(x, \eta) \in D\times\mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i A_i(x, \eta, \psi)\Big)^{\alpha} \leqslant \mathcal{K}\,|\xi|^{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{n}\psi_i A_i(x, \eta, \psi)\Big)^{\alpha-1}. \tag{3}$$

Рассмотренные в [1] классы $A(\alpha)$ содержат достаточно широкий ряд линейных и нелинейных операторов. Например, дифференциальные операторы, определенные соотношением (2) и удовлетворяющие условиям

$$\nu_1|\xi|^{\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\xi_i A_i(x, \eta, \xi), \quad |A(x, \eta, \xi)| \leqslant \nu_2|\xi|^{\alpha-1}$$

с некоторыми абсолютными постоянными $\nu_1, \nu_2>0$, принадлежат $A(\alpha)$.

Линейные равномерно эллиптические операторы вида $L=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$ с измеримыми коэффициентами принадлежат $A(\alpha)$ при $\alpha=2$.

Не оговаривая особо, на протяжении всей работы будем считать, что оператор L принадлежит фиксированному классу $A(\alpha)$ с произвольным образом выбранным $\alpha\in(1, \infty)$.

В настоящей работе изучаются уравнения вида

$$Lu = g(x, u), \tag{4}$$

где функция $g(x, u)$ локально ограничена в $\mathbb{R}^{n+1}$, $g(x, 0)=0$, $ug(x, u)\geqslant a|u|^{1+q}$, $a>0$, $q\geqslant 0$.

Получен ряд теорем о характеристике поведения решений уравнения (4) в неограниченных областях при $|x|\to\infty$ в зависимости от геометрических свойств области и величины q, $0\leqslant q<\alpha-1$.

Аналогичные утверждения при $q>\alpha-1$ установлены в [2].

Будем говорить, что функция $u(x)$ класса $W^1_{\alpha,\mathrm{loc}}(D)\cap L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(D)$ удовлетворяет уравнению (4) в области D, если для любой $\varphi(x)\in \overset{0}{W}{}^1_{\alpha}(D)$ выполнено соотношение

$$\int_D\Big[\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}A_i(x, u, \nabla u)+g(x, u)\varphi(x)\Big]dx=0. \tag{5}$$

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Через $W^1_{\alpha}(\Omega, E)$ обозначим пополнение по норме пространства $W^1_{\alpha}(\Omega)$ множества принадлежащих $C^{\infty}(\Omega)$ функций, равных нулю в окрестности E.

Ниже через $B(x, R)$ будет обозначаться открытый шар в R^n радиуса R с центром в точке x. Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ — некоторая область. Будем говорить, что $u(x)$ обращается в нуль на множестве $E\subset\partial G$, если для любого $R>0$

$$u(x)\in W^1_{\alpha}(G\cap B(0, R), E\cap B(0, R)).$$

Нам понадобится понятие вариационной емкости множества.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, Δ — произвольная подобласть D, и $P, Q\subset\Delta$ — непересекающиеся, замкнутые относительно Δ множества. Всякую тройку $(P, Q; \Delta)$ описанного вида будем называть конденсатором.

Зададим $p\geqslant 1$. Величину

$$\mathrm{cap}_p(P, Q; \Delta)=\inf\int_{\Delta}|\nabla\psi|^p\,dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $\psi(x)\in C^{\infty}(D)$, обращающимся в единицу на P, равным нулю на Q, назовем p-емкостью конденсатора $(P, Q; \Delta)$.

В дальнейшем будем считать, что D — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая точку $y \in \mathbb{R}^n$, $U_r(y) = \{x \in D : |x - y| < r\}$, $U_r = U_r(0)$, а $C_r(y) = \{x \in D : |x - y| > r\}$, $C_r = C_r(0)$, для произвольного неотрицательного r.

Лемма 1. *Пусть D — неограниченная область, содержащая точку $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (4), обращающееся в нуль на $\partial D \cap B(y, R)$, и $m_R(y) = \operatorname{ess\,sup}_{U_R(y)} |u(x)|$. Тогда для произвольного ε, $0 < \varepsilon < 1 + q$, справедливы неравенства*

$$c\left(\alpha + \frac{1}{1+q}\right)^{\alpha} [m_R(y)]^{\alpha-1-q+\varepsilon} \operatorname{cap}_{\alpha\beta}^{1/\beta} (\bar{U}_r(y), \bar{C}_R(y); D) \times$$

$$\times \left(\int_{U_R(y)} |u|^{1+q} dx\right)^{\frac{1+q-\varepsilon}{1+q}} \geqslant a \int_{U_r(y)} |u|^{1+q} dx, \tag{6}$$

$$c\left(\frac{\alpha(1+q)}{\varepsilon}\right)^{\alpha} [m_R(y)]^{\alpha-1-q+\varepsilon} \operatorname{cap}_{\alpha\beta}^{1/\beta} (\bar{U}_r(y), \bar{C}_R(y); D) \geqslant a\left(\int_{U_r(y)} |u|^{1+q} dx\right)^{1/\beta}. \tag{7}$$

Здесь и всюду ниже $c = \dfrac{\mathscr{K}}{\alpha^{\alpha}} (\alpha - 1)^{\alpha-1}$, $\beta = \dfrac{1+q}{\varepsilon}$.

Доказательство. Пусть $\zeta(x)$ — произвольная функция из пространства $\overset{0}{C}{}^1(B(y, R))$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$, равная единице на $B(y, r)$. Положим в тождестве (5) $\varphi(x) = \zeta^s(x) u(x)$, где $s > \alpha$ будет выбрано ниже. Имеем

$$-\int_D (u_x A) \zeta^s dx - s \int_D (\zeta_x A) u \zeta^{s-1} dx = I_1 + I_2 = \int_D g(x, u) u \zeta^s dx. \tag{8}$$

Оценим вначале I_2. Из условия (3) на оператор L и неравенства Гельдера вытекает

$$|I_2| \leqslant s \mathscr{K}^{1/\alpha} \left(\int_D (u_x A) \zeta^s dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\int_D |u|^{\alpha} \zeta^{s-\alpha} |\nabla \zeta|^{\alpha} dx\right)^{1/\alpha}.$$

Применяя далее «неравенство Юнга с $\varepsilon = \left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$», получаем

$$|I_2| \leqslant \int_D (u_x A) \zeta^s dx + c s^{\alpha} \int_D |u|^{\alpha} \zeta^{s-\alpha} |\nabla \zeta|^{\alpha} dx. \tag{9}$$

Из соотношений (4), (8), (9) следует

$$c s^{\alpha} \int_D |u|^{\alpha} \zeta^{s-\alpha} |\nabla \zeta|^{\alpha} dx \geqslant a \int_D |u|^{1+q} \zeta^s dx.$$

Пусть ε — произвольное положительное число, меньшее $1+q$. Тогда

$$c s^{\alpha} [m_R(y)]^{\alpha-1-q+\varepsilon} \int_D |\nabla \zeta|^{\alpha} \zeta^{s-\alpha} |u|^{1+q-\varepsilon} dx \geqslant a \int_D |u|^{1+q} \zeta^s dx.$$

Применяя к полученному соотношению неравенство Гельдера, находим

$$c s^{\alpha} [m_R(y)]^{\alpha-1-q+\varepsilon} \left(\int_D |\nabla \zeta|^{\alpha\beta} dx\right)^{1/\beta} \left(\int_D \zeta^{(s-\alpha)\frac{1+q}{1+q-\varepsilon}} |u|^{1+q} dx\right)^{\frac{1+q-\varepsilon}{1+q}} \geqslant$$

$$\geqslant a \int_D |u|^{1+q} \zeta^s dx. \tag{10}$$

Выбирая $s = \alpha + \dfrac{1}{1+q}$ и минимизируя левую часть (10) по всем допустимым функциям $\zeta(x)$ указанного вида, получаем соотношение (6).

Выбирая теперь в неравенстве (10) $s = \frac{\alpha(1+q)}{\varepsilon}$, имеем

$$\left(\frac{\alpha(1+q)}{\varepsilon}\right)^{\alpha} c\,[m_R(y)]^{\alpha-1-q+\varepsilon}\left(\int_D |\nabla\zeta|^{\alpha\beta}dx\right)^{1/\beta} \geqslant a\left(\int_D |u|^{1+q}\zeta^s dx\right)^{1/\beta}.$$

Минимизируя левую часть полученного неравенства по всем допустимым функциям $\zeta(x)$ указанного вида, получаем соотношение (7).

Теорема 1. *Пусть $0\leqslant q<\alpha-1$, $D\subset\mathbb{R}^n$ — неограниченная область, $u(x)$ — решение уравнения (4) в D, обращающееся в нуль на ∂D. Тогда либо $u(x)\equiv 0$, либо*

$$\varliminf_{R\to\infty} m_R\,[\beta^{\alpha}\operatorname{cap}_{\alpha\beta}^{1/\beta}(\overline{U}_{R/2},\ \overline{C}_R;\ D)]^{\frac{1}{\alpha-1-q+\varepsilon}} > 0, \tag{11}$$

где $m_R = \operatorname*{ess\,sup}_{U_R}|u(x)|$, $0<\varepsilon<\frac{\alpha(1+q)}{n}$, *$\varepsilon$ произвольно.*

Доказательство. Предположим противное: $u(x)\not\equiv 0$ и условие (11) не выполнено. Выбирая в неравенстве (7) $r=R/2$, $y=0$, получаем противоречие принятому предположению при $R\to\infty$.

Для характеристики скорости возрастания величины m_R приведем в удобной для нас форме известную оценку p-емкости кольцевой области в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2 [3, с. 177]. *Пусть D — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $D\ni y$, $0<r<R$, $p>n$. Тогда*

$$\operatorname{cap}_p(\overline{U}_r(y),\ \overline{C}_R(y);\ D)\leqslant\left[\omega_n\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)\right]^{1-p} R^{n-p}, \tag{12}$$

где ω_n — площадь поверхности единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть $0\leqslant q<\alpha-1$, $D\subset\mathbb{R}^n$ — неограниченная область, $u(x)$ — решение уравнения (4) в D, обращающееся в нуль на ∂D, а $m_R = \operatorname*{ess\,sup}_{U_R}|u(x)|$. Тогда либо $u(x)\equiv 0$ в D, либо*

$$\varliminf_{R\to\infty} m_R R^{-\frac{\alpha}{\alpha-1-q}} > 0.$$

Доказательство. Предположим противное: $u(x)\not\equiv 0$ и $m_R = 0(R^{\frac{\alpha}{\alpha-1-q}})$ при $R\to\infty$. Тогда для достаточно больших r, $R=2r$, и $y=0$ из неравенства (6) имеем

$$\left(\alpha+\frac{1}{1+q}\right)^{\alpha} c\,[m_R]^{\alpha+\varepsilon-1-q}\operatorname{cap}_{\alpha\beta}^{1/\beta}(\overline{U}_r,\ \overline{C}_R;\ D)\geqslant a I_r I_R^{-\frac{1+q-\varepsilon}{1+q}},$$

где ε — произвольное неотрицательное число, меньшее $\frac{\alpha(1+q)}{n}$, $I_r = \int_{U_r}|u|^{1+q}dx$.

Применяя лемму 2 при $p=\alpha\beta$ для оценки емкости, из предыдущей формулы получаем

$$\left(\alpha+\frac{1}{1+q}\right)^{\alpha} c\,[m_R]^{\alpha-1-q+\varepsilon} R^{\frac{n\varepsilon-\alpha(1+q)}{1+q}}[\omega_n(1-2^{\frac{\varepsilon n-\alpha(1+q)}{\alpha(1+q)-\varepsilon}})]^{\frac{\varepsilon-\alpha(1+q)}{1+q}}\geqslant$$

$$\geqslant a I_r I_R^{\frac{\varepsilon-1-q}{1+q}}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу по $\varepsilon \to 0$, находим

$$\left(\frac{1}{2}\omega_n\right)^{-\alpha}\left(\alpha+\frac{1}{1+q}\right)^{\alpha} c m_R^{\alpha-1-q} R^{-\alpha} \geqslant a I_r I_R^{-1}.$$

Исходя из принятого предположения о росте решения $u(x)$, приходим к следующему: I_r неограниченно возрастает при $r\to\infty$ так, что для любого $\lambda>0$ существует $r(\lambda)$ такое, что при $r>r(\lambda)$ $I_{2r}>\lambda I_r$. Следовательно, $I_R>\lambda^{-r(\lambda)}R^{\ln_2\lambda}$ для достаточно больших R вида $R=2^{r(\lambda)+N}$, где N натуральное, большее $r(\lambda)$. Последнее в силу произвольности выбора λ противоречит тому, что $m_R=o(R^{\frac{\alpha}{\alpha-1-q}})$ при $R\to\infty$.

Аналогично устанавливается следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $0\leqslant q<\alpha-1$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — *компакт и* $u(x)\in \in W^1_{\alpha,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)\cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)$ — *решение уравнения* (4) *такое, что*

$$u(x)=o(|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1-q}}) \text{ при } |x|\to\infty.$$

Тогда $u(x)\equiv 0$ *вне шара достаточно большого радиуса.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда при достаточно больших r, $R=2r$, существует $y\in\mathbb{R}^n$, $|y|=2R$, такая, что по неравенству (6) имеем

$$c\left(\alpha+\frac{1}{1+q}\right)^{\alpha}[m_R(y)]^{\alpha-1-q+\varepsilon}\operatorname{cap}^{1/\beta}_{\alpha\beta}(\overline{U}_r(y),\ \overline{C}_R(y);D)\geqslant a I_r(y)\,[I_R(y)]^{\frac{\varepsilon-1-q}{1+q}}.$$

Здесь $D\equiv\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, $I_r(y)=\int\limits_{U_r(y)}|u|^{1+q}dx$.

Применяя, как и при доказательстве теоремы 2, лемму 2 при $p= =\alpha\beta$ и переходя в полученном неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\left(\frac{1}{2}\omega_n\right)^{-\alpha} c\left(\alpha+\frac{1}{1+q}\right)^{\alpha}[m_R(y)]^{\alpha-1-q} R^{-\alpha}\geqslant a I_r(y)\, I_R^{-1}(y).$$

Дальнейшее доказательство дословно совпадает с анализом, проведенным при доказательстве теоремы 2.

Замечание 1. Оценки в теоремах 2 и 3 точны. Действительно, в случае, когда $D\equiv\mathbb{R}^n$ или $\Omega\equiv\varnothing$, функция $u(r)=r^{\frac{\alpha}{\alpha-1-q}}$, $r=|x|$, является решением уравнения

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u)=au^q$$

при надлежащем выборе положительной постоянной a.

Замечание 2. Из теорем 2 и 3 при $\alpha=2$ легко следуют результаты, полученные ранее В. А. Кондратьевым и Е. М. Ландисом в [4] для полулинейных уравнений.

1. *Миклюков В. М.* Емкость и обобщенный принцип максимума для квазилинейных уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР.— 1980.— **250**, № 6.— С. 1318—1320.
2. *Курта В. В.* О качественных свойствах решений некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 12.— С. 12—14.
3. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М. : Наука, 1983.— 284 с.
4. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сб.— 1988.— **135** (177), № 3.— С. 346—360.

Получено 09.10.91