УДК 517.5

Р. Р. Салимов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЛОКАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕВНЕРА

We study the problem of removability of isolated singularities for the so-called Q-homeomorphisms in the Loewner spaces. We formulate a number of conditions for the function $Q(x)$ under which every Q-homeomorphism admits the continuous extension to an isolated singular point. We also discuss the problem of homeomorphism of the obtained extension. The results are applicable, in particular, to Riemannian manifolds and the Carnot groups.

Вивчається проблема усувності ізольованих особливостей для так званих Q-гомеоморфізмів у просторах Льовнера. Сформульовано низку умов на функцію $Q(x)$, при яких будь-який Q-гомеоморфізм допускає неперервне продовження в ізольовану особливу точку. Також розглянуто проблему гомеоморфності отриманого продовження. Результати застосовано до ріманових многовидів та груп Карно.

1. Введение. Проблема локального поведения — одна из центральных проблем в теории квазиконформных отображений и их обобщений (см., например, [1 – 20]).

Следующая концепция была предложена профессором Олли Мартио (см. [7 – 10]). Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $Q: G \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f\colon G \to \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int_G Q(x)\, \rho^n(x)\, dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ. Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля (см. пп. 13.1 и 34.6 в [21]).

Напомним, что борелева функция $\rho: \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$ (пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int_\gamma \rho\, ds \geq 1 \tag{2}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int_G \rho^n(x)\, dm(x). \tag{3}$$

Проблема локального поведения Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) изучалась в работах [8 – 10], а в случае $Q \in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях — в работах [7, 12 – 17]. В настоящей работе проблема изучается в метрических пространствах Левнера. Результаты применимы, в частности, к римановым многообразиям и группам Карно. Ранее модульная техника для метрических пространств развивалась, например, в работах [22 – 24] и в предыдущей статье автора [25].

2. Определения и предварительные замечания. Приведем некоторые топологические определения и замечания общего характера, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть T — произвольное топологическое пространство.

Кривой в T называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b]\to T$. В дальнейшем $|\gamma|$ обозначает $\gamma([a,b])$ и рассматриваются только кривые с $|\gamma|$, не вырождающимся в точку. Пространство T будем называть *линейно связным*, если любые две его точки можно связать кривой. Множество G в T называется областью, если G открыто и линейно связно. Если A, B и C — множества в T, то $\Delta(A,B,C)$ обозначает множество всех кривых γ, которые соединяют A и B в C, т.е. $\gamma(a)\in A$, $\gamma(b)\in B$ и $\gamma(t)\in C$, $t\in(a,b)$.

Говорят, что семейство кривых Γ_1 в T *минорируется* семейством кривых Γ_2 в T (пишут $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждой кривой $\gamma_1\in\Gamma_1$ найдется кривая $\gamma_2\in\Gamma_2$ такая, что γ_2 — сужение γ_1.

Предложение 1. *Пусть Ω — открытое множество в произвольном топологическом пространстве T. Тогда*

$$\Delta(\Omega, T\setminus\Omega, T) \;>\; \Delta(\Omega, \partial\Omega, \Omega).$$

Доказательство. Действительно, для произвольной кривой $\gamma\colon [a,b]\to T$ с $\gamma(a)\in\Omega$ и $\gamma(b)\in T\setminus\Omega$ прообраз $\omega=\gamma^{-1}(\Omega)\subset[a,b]$ — открытое множество (по непрерывности γ), которое содержит a. Аналогично, прообраз $\omega = \gamma^{-1}(T\setminus\overline{\Omega})\subseteq[a,b]$ также открыт. Таким образом, вследствие связности отрезка $[a,b]$ найдется $c\in\gamma^{-1}(\partial\Omega)$ такое, что $\gamma([a,c))\subset\Omega$.

Предложение 2. *Если Ω и Ω' — открытые множества в метрических пространствах (X,d) и (X',d'), а $f\colon \Omega\to\Omega'$ — гомеоморфизм, то предельное множество f в точке $x_0\in\partial\Omega$*

$$C(x_0,f) \;:=\; \left\{x'\in X'\colon\; x' \;=\; \lim_{n\to\infty} f(x_n),\, x_n\to x_0,\, x_n\in\Omega\right\}$$

находится на границе множества Ω'.

Доказательство. Действительно, допустим, что некоторая точка $y_0\in C(x_0,f)$ лежит внутри области Ω'. Тогда, по определению предельного множества, найдется последовательность $x_n\to x_0$ при $n\to\infty$ такая, что $y_n = f(x_n)\to y_0$. В силу непрерывности обратного отображения $g=f^{-1}$ имеем $x_n = g(y_n)\to g(y_0) = x_*\in\Omega$. Однако сходящаяся последовательность x_n не может иметь два предела $x_0\in\partial\Omega$ и $x_*\in\Omega$ в силу неравенства треугольника

$$d(x_*,x_0) \;\le\; d(x_*,x_n) \;+\; d(x_n,x_0).$$

В дальнейшем для пространства (X,d) с метрикой d, $x_0\in X$ и $r>0$ используется обозначение открытого шара

$$B(x_0,r) \;:=\; \{x\in X\colon\; d(x,x_0)<r\}.$$

Предложение 3. *Если Ω и Ω' — открытые множества в метрических пространствах (X,d) и (X',d'), а гомеоморфизм $f\colon \Omega\to\Omega'$ имеет непрерывное продолжение в точку $x_0\in\partial\Omega$, то продолженное отображение $\bar f$ инъективно в $\Omega\cup\{x_0\}$.*

Доказательство. Действительно, допустим, что $y_0 := \bar f(x_0) = \bar f(x_0^*)$ для некоторой точки $x_0^*\in\Omega$. Пусть $B_0 = B(x_0^*, r_0)$, где $0<r_0<\operatorname{dist}\left(x_0^*,\partial\Omega\right)$. Тогда fB_0 — открытая окрестность точки y_0, что противоречит определению y_0 как

$C(x_0, f)$.

Напомним, что если $\gamma\colon\ [a, b] \to X$ — непрерывная кривая в метрическом пространстве (X, d), то ее длина s задается как супремум сумм

$$\sum_{i=1}^{k} d\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})\big)$$

над всеми разбиениями $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k = b$ интервала $[a, b]$.

Предложение 4. *Пусть* γ *— спрямляемая кривая в метрическом пространстве* (X, d), *соединяющая точки* $x_1 \in B(x_0, r_1)$ *и* $x_2 \in X \backslash \overline{B(x_0, r_2)}$, *где* $0 < r_1 < r_2 < \infty$, *а* $\rho\colon\ [0, \infty] \to [0, \infty]$ *— борелевская функция. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \rho\big(d(x, x_0)\big)\,ds \;\ge\; \int\limits_{r_1}^{r_2} \rho(r)\,dr.$$

Доказательство. Действительно, по определению длины кривой в метрическом пространстве $\gamma\colon\ [a, b] \to X$, длина сегмента кривой

$$s(t_1, t_2) \;\ge\; d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big).$$

Кроме того, согласно неравенству треугольника, с одной стороны,

$$d\big(x_0, \gamma(t_2)\big) \;\le\; d\big(x_0, \gamma(t_1)\big) \;+\; d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big),$$

а с другой —

$$d\big(x_0, \gamma(t_1)\big) \;\le\; d\big(x_0, \gamma(t_2)\big) \;+\; d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big).$$

Таким образом,

$$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) \;\ge\; \big|d\big(x_0, \gamma(t_2)\big) - d\big(x_0, \gamma(t_1)\big)\big|.$$

Следовательно,

$$ds \;\ge\; |dr|,$$

где $r = d(x, x_0)$, $x = x(s)$. Наконец, по свойству Дарбу связных множеств, непрерывная функция $d(x, x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ (см., например, [26, с. 137]). Поэтому кратность любого значения r в интервале (r_1, r_2) на кривой не менее 1 и требуемое неравенство доказано.

В дальнейшем через (X, d, μ) будем обозначать пространство X с метрикой d и борелевой мерой μ. Пусть G и G' — области с конечными хаусдорфовыми размерностями α и α' в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') соответственно и $Q\colon\ G \to [0, \infty]$ — измеримая функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $Q\colon\ G \to G'$ является *Q- гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \;\le\; \int\limits_{G} Q(x)\,\rho^{\alpha}(x)\,d\mu(x) \tag{4}$$

для любого семейства Γ кривых в G и любой допустимой функции ρ для Γ.

Модуль семейств кривых Γ в области G задаем равенством

$$M(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{G} \rho^{\alpha}(x)\,d\mu(x), \tag{5}$$

где допустимые функции для Γ, по-прежнему, определяются условием вида (2). При вычислении модуля семейств кривых $f\Gamma$ в G' степень α заменяется на α'.

Напомним, что пространство (X, d, μ) называется α-*регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$C^{-1} r^{\alpha} \leq \mu(B_r) \leq C r^{\alpha} \tag{6}$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., например, [22, с. 61]).

Будем говорить, что пространство (X, d, μ) α -*регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leq C r^{\alpha} \tag{7}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ) α-*регулярно сверху*, если условие (7) выполнено в каждой точке.

Пусть (X, d, μ) — пространство с метрикой d, борелевой мерой μ и конечной хаусдорфовой размерностью $\alpha \geq 1$. Линейно связное X называется *пространством Левнера*, если существует функция $\Phi\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ такая, что

$$M(\Delta(E, F, X)) \geq \Phi(t)$$

для любых двух непересекающихся невырожденных континуумов E и F в X с

$$\frac{\operatorname{dist}(E, F)}{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}} \leq t.$$

Как известно [23], для пространства Левнера хаусдорфовой размерности $\alpha > 1$

$$C_1^{-1} R^{\alpha} \leq \mu(B_R) \tag{8}$$

для всех шаров B_R в X радиуса $R < \operatorname{diam} X$ и некоторой постоянной $C_1 \geq 1$. Если к тому же существует константа $C_2 \geq 1$ такая, что

$$\mu(B_R) \leq C_2 R^{\alpha} \tag{9}$$

для всех шаров B_R в X радиуса $R < \operatorname{diam} X$, то (X, d, μ) является α-регулярным и существует убывающий гомеоморфизм $\Phi\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ такой, что

$$M(\Delta(E, F, X)) \geq \Phi\left(\frac{\operatorname{dist}(E, F)}{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}}\right).$$

Пространства Левнера с условиями (8) и (9) при $\alpha > 1$ будем называть *регулярными*.

3. О конечном среднем колебании относительно меры. Пусть G — область в пространстве (X, d, μ). Аналогично [7] (см. также [27]) будем говорить, что функция $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \overline{G}$ (сокращенно $\varphi \in FMO(x_0)$), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \fint_{G(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_{\varepsilon}|\, d\mu(x) < \infty, \tag{10}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\,d\mu(x) = \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))}\int_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\,d\mu(x)$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по множеству $G(x_0,\varepsilon) = \{x \in G\colon\ d(x,x_0) < < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (10) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ в окрестности точки x_0.

Предложение 5. *Если для некоторого набора чисел* $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\,d\mu(x) < \infty, \tag{11}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Действительно, согласно неравенству треугольника

$$\fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\,d\mu(x) \le \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\,d\mu(x) + |\varphi_\varepsilon - \overline{\varphi}_\varepsilon| \le$$

$$\le 2\cdot \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\,d\mu(x).$$

***Следствие* 1.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\,d\mu(x) < \infty, \tag{12}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Варианты следующей леммы были сначала доказаны для функций класса *BMO* и внутренних точек области G в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \ge 3$ соответственно в [13, 14] и [9, 10], а затем для граничных точек G в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, с условием удвоения меры и функций класса *FMO* в [7].

Лемма 1. *Пусть* G *— область в пространстве* (X,d,μ), α*-регулярном сверху с* $\alpha \ge 2$ *в точке* $x_0 \in \overline{G}$ *и*

$$\mu(G \cap B(x_0,2r)) \le \gamma \log^{\alpha-2}\frac{1}{r}\,\mu(G\cap B(x_0,r)) \quad \forall\, r\in(0,r_0). \tag{13}$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ *класса* $FMO(x_0)$

$$\int_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\,d\mu(x)}{\left(d(x,x_0)\log\dfrac{1}{d(x,x_0)}\right)^{\alpha}} = O\!\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{14}$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 \in (0,\delta_0)$, *где* $\delta_0 = \min\left(e^{-e},\ d_0\right)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$,

$$G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x\in G\colon\ \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}.$$

Эта лемма доказана в работе автора [25] для целых $\alpha \ge 2$. Мы опускаем здесь доказательство, поскольку рассуждения повторяются.

***Замечание* 1.** Условие (13) слабее условия удвоения меры

$$\mu(G \cap B(x_0,2r)) \le \gamma\,\mu(G\cap B(x_0,r)) \quad \forall\, r\in(0,r_0), \tag{15}$$

которое использовалось ранее в случае $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, в работе [7].

4. О непрерывном продолжении в изолированную особую точку. Напомним, что топологическое пространство T называется *связным*, если его нельзя разбить на два открытых (замкнутых) непустых множества. T называется *континуумом*, если T связно и компактно, т. е. из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. T называется *локально связным в точке* $x_0 \in T$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0, которая связна (в индуцированной топологии) [18, с. 232]. Будем говорить, что пространство T *связно в точке* x_0, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \setminus \{x_0\}$ связно. Отметим, что связность пространства T в точке x_0 влечет его локальную связность в точке x_0. Обратное заключение, вообще говоря, неверно.

В дальнейшем (X, d, μ) и (X', d', μ') — пространства с метриками d и d' и мерами μ и μ', а G и G' — области в X и X' с конечными хаусдорфовыми размерностями α и α' соответственно.

Лемма 2. *Пусть X связно в точке $x_0 \in G$, которая имеет компактную окрестность, X' — регулярное компактное пространство Левнера, а f: $G \setminus \{x_0\} \to G'$ — Q-гомеоморфизм, где $Q: G \to [0, \infty]$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x_0, x) < \varepsilon_0} Q(x)\, \psi^{\alpha}_{x_0, \varepsilon}\,(d(x, x_0))\, d\mu(x) \;=\; o\Big(I^{\alpha}_{x_0}(\varepsilon)\Big) \tag{16}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$ и $\psi_{x_0, \varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$ таких, что

$$0 \;<\; I_{x_0}(\varepsilon) \;=\; \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0, \varepsilon}(t)\, dt \;<\; \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{17}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности в пространстве (X', d').

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Множество E лежит на $\partial G'$ по предложению 2. Кроме того, E — континуум, так как область G связна в точке x_0. Действительно,

$$E \;=\; \limsup_{m \to \infty} f(G_m) \;=\; \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{f(G_m)},$$

где $G_m = G \cap U_m$ — некоторая монотонно убывающая последовательность связных открытых множеств с окрестностями U_m точки x_0 и $d(G_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Отметим, что $\liminf\limits_{m \to \infty} \overline{f(G_m)} = \liminf\limits_{m \to \infty} f(G_m) \neq \varnothing$ вследствие компактности X' (см. [26], замечание 3, п. 41). Следовательно, $E \neq \varnothing$ и связно [28, с. 15]. Кроме того, E замкнуто по построению и потому компактно как замкнутое подпространство компактного пространства X' (см. [29], п. 1.9.3).

В силу связности G в точке x_0 найдется компонента связности G_* множества $G \setminus \{x_0\} \cap B(x_0, r_0)$, $0 < r_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$, включающая $G \setminus \{x_0\} \cap \cap B(x_0, r_*)$ для некоторого $r_* \in (0, r_0)$. Если $\partial G = \varnothing$, то полагаем, что $\operatorname{dist}(x_0, \partial G) = \infty$. Поскольку x_0 имеет компактную окрестность, можно считать, что $\overline{B(x_0, r_0)}$ — компакт.

Рассмотрим $G'_* = f G_*$. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$

является изолированной компонентой $\partial G'_*$. Действительно, $K = \partial G_* \setminus \{x_0\}$ является компактом как замкнутое подмножество компакта $\overline{B(x_0, r_0)}$ и, следовательно, $K_* = fK \subset G'$ — компакт. С другой стороны, компакт E лежит на $\partial G'$, т. е. $E \bigcap K_* = \varnothing$. Таким образом, $\operatorname{dist}(E, K_*) > 0$. Наконец, если $y_0 \in \in \partial G'_*$, то согласно предложению 2 $C(y_0, g) \subset \partial G_* = K \bigcup \{x_0\}$, где $g = f^{-1}\big|_{G'_*}$, и, следовательно, либо $y_0 \in E$, либо $y_0 \in K_*$.

Пусть $z_0 \in G'_*$. Тогда $\Delta(\{z_0\}, E, X') \neq \varnothing$ в силу линейной связности левнеровского пространства X', и, следовательно, $\Delta(\{z_0\}, E, G'_*) \neq \varnothing$ по предложению 1. Итак, пусть $\gamma_0 \in \Delta(\{z_0\}, E, G'_*)$, т. е. $\gamma_0(a) = \{z_0\}$, $\gamma_0(b) \in E$, $\gamma_0(t) \in G'_*$, $t \in (a, b)$. Полагаем $C_* = \gamma_0([a, b))$ и

$$\Gamma = \Delta(C_*, E, X').$$

Рассмотрим семейство кривых

$$\Gamma_* = \{\gamma \in \Gamma \colon |\gamma| \bigcap R \neq \varnothing\},$$

где

$$R = X' \setminus \{G'_* \cup E\},$$

и

$$\Gamma_0 = \Delta(C_*, E, G'_*).$$

Заметим, во-первых, что $M(\Gamma_0) = M(\tilde{\Gamma})$, где $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_*$. Действительно, с одной стороны, $\Gamma_0 \subset \tilde{\Gamma}$ и потому $M(\Gamma_0) \leq M(\tilde{\Gamma})$, а с другой — $\Gamma_0 < \tilde{\Gamma}$ по предложению 1 и потому $M(\Gamma_0) \geq M(\tilde{\Gamma})$ (см. [30], теорема 1). Во-вторых,

$$M(\Gamma_*) \leq M_* := \frac{\mu(X')}{(2 \operatorname{dist}(C_* \cup E, \partial G'_* \setminus E))^{\alpha'}} < \infty,$$

поскольку $C_* \cup E$ и $\partial G'_* \setminus E$ — непересекающиеся компакты, а $\mu(X') < \infty$ в силу компактности и α'-регулярности пространства Левнера X'.

Предположим, что континуум E невырожденный. Рассмотрим континуумы $C(t) = \gamma_0([a, t])$, $t \in [a, b)$. Заметим, что $\operatorname{dist}(C(t), E) \to 0$ при $t \to b$. Таким образом,

$$M(C(t), E, X') \geq \Phi\left(\frac{\operatorname{dist}(C(t), E)}{\min\{d(C(t)), d(E)\}}\right) \to \infty$$

при $t \to b$. Следовательно, найдется $t_0 \in [a, b)$ такое, что

$$M_0 := M(\Delta(C(t_0), E, X')) > M_*.$$

Напомним, что $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cup \Gamma_*$ и из монотонности и полуаддитивности модуля получаем

$$M_* < M_0 \leq M(\Gamma) \leq M(\tilde{\Gamma}) + M(\Gamma_*) = M(\Gamma_0) + M(\Gamma_*) \leq M(\Gamma_0) + M_*.$$

Следовательно,

$$M(\Gamma_0) > 0.$$

Однако

$$\Gamma_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n,$$

где $\Gamma_n = \Delta\big(C(t_n), E, G'_*\big)$, $t_n \to b$ при $n \to \infty$, и из полуаддитивности модуля имеем

$$M(\Gamma_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(\Gamma_n).$$

Таким образом, найдется континуум $C = C(t_n)$ такой, что $M\big(\Delta(C, E, G'_*)\big) > 0$.

Заметим, что $C_0 = f^{-1}(C)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Таким образом, $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(x_0, C_0) > 0$. Пусть

$$\Gamma_\varepsilon = \Delta\big(C_0, B(x_0, \varepsilon), G_*\big), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Кроме того, пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ — борелевская функция, $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для почти всех $t \in (0, \infty)$, которая существует по теореме Лузина (см., например, п. 2.3.5. в [31]).

Тогда по предложению 4 функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}\big(d(x, x_0)\big)/I_{x_0}(\varepsilon), & x \in A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & x \in G \backslash A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где

$$A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in X \colon \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\},$$

допустима для Γ_ε и, следовательно,

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \leq \int_G Q(x)\, \rho_\varepsilon^\alpha(x)\, d\mu(x),$$

т. е. $M(f\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в силу (16).

С другой стороны, $M(f\Gamma_\varepsilon) \geq M\big(\Delta(C, E, G'_*)\big) > 0$, поскольку

$$f^{-1}\Delta\big(C, E, G'_*\big) \subseteq \Delta\big(C_0, \{x_0\}, G_*\big)$$

при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ по предложению 2, примененному к гомеоморфизмам f^{-1}, $g = f^{-1}\big|_{G'_*}$, $y_0 \in E$, $y_0 = \gamma(b)$, $\gamma \in \Delta\big(C, E, G'_*\big)$. Полученное противоречие опровергает предположение, что континуум E является невырожденным.

***Следствие* 2.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int\limits_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x)\, \psi^\alpha\big(d(x, x_0)\big)\, d\mu(x) < \infty, \tag{18}$$

где $\psi(t)$ *— неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$ *такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то* Q*-гомеоморфизм* $f \colon G \backslash \{x_0\} \to G' \subset X'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d').

***Замечание* 2.** Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (18) сходился в смысле главного значения в точке x_0 хотя бы для одного ядра ψ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как видно из леммы 2, достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью:

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^{\alpha}\left(d(x,x_0)\right)d\mu(x) \;=\; o\Big(I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0)\Big). \tag{19}$$

Выбирая в лемме 2 $\psi(t)\equiv 1/t$, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть пространства* X *и* X' *компактные*, X *связно в точке* $x_0\in G$, *а* X' — *регулярное пространство Левнера. Если измеримая функция* $Q\colon\ G\to[0,\infty]$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} \;=\; o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right) \tag{20}$$

при $\varepsilon\to 0$, *где* $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(x_0,\partial G)$, *то любой* Q*-гомеоморфизм* $f\colon\ G\setminus\{x_0\}\to$ $\to G'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X',d').

***Следствие* 3.** *В частности, заключение теоремы* 1 *имеет место, если сходится сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} \tag{21}$$

в окрестности точки x_0 *в смысле главного значения.*

Комбинируя леммы 1, 2 и выбирая $\psi_{\varepsilon}(t)\equiv t\log\frac{1}{t}$, $t\in(0,\delta_0)$, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* X *и* X' — *регулярные компактные пространства Левнера*, G — *область в* G, *которая удовлетворяет условию* (13) *и связна в точке* $x_0\in G$. *Если* $Q\in FMO(x_0)$, *то любой* Q*-гомеоморфизм* f : $G\setminus\{x_0\}\to G'$ *продолжим в* x_0 *по непрерывности в* (X',d').

Комбинируя следствие 1 и теорему 2, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 4.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\; \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,d\mu(x) \;<\; \infty, \tag{22}$$

то любой Q*-гомеоморфизм* $f\colon\ G\setminus\{x_0\}\to\ G'\subset\ X'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X',d').

***Замечание* 3.** Согласно предложению 3 продолжение $\bar f$ отображения f в точку x_0 будет инъективным отображением и, таким образом, гомеоморфизмом на любой подобласти $G_*\subset G$, т. е. если $\overline{G_*}\subseteq G$ — компакт. Как показывают простые примеры, это, вообще говоря, неверно для самой области G. Однако это верно, если, к примеру, $G=X$ — компакт (см. [26]).

Кроме того, если семейство всех кривых в X', а точнее в G_*, проходящих через точку $y_0=\bar f(x_0)$, будет иметь нулевой модуль, то сужение отображения $g=\bar f\big|_{G_*}$ будет Q-гомеоморфизмом. Для регулярных пространств Левнера это всегда выполняется (см. лемму 7.18 в работе [22]). Таким образом, изолированная особая точка Q-гомеоморфизмов в регулярных пространствах Левнера локально устранима при условиях на Q, указанных выше.

5. О конформных и квазиконформных отображениях. Отметим, наконец, что в случае конформных и квазиконформных отображений в метрических пространствах с мерой, когда мажоранта $Q(x)$ является константой, аналитические условия непрерывного продолжения в изолированную точку сводятся к условиям на меру μ.

Именно, пусть, по-прежнему, G и G' — области конечных хаусдорфовых размерностей α и α' в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') с метриками d и d' и борелевскими мерами μ и μ' соответственно. Следуя геометрическому определению Вяйсяля (см. п. 1.3.1 в [23]), говорим, что гомеоморфизм f: $G \to G'$ называется K-квазиконформным, $K \in [1, \infty]$, если

$$K^{-1} M(\Gamma) \le M(f\Gamma) \le K M(\Gamma)$$

для любого семейства кривых Γ в G. Гомеоморфизм f: $G \to G'$ называется *квазиконформным*, если f является K-квазиконформным для некоторого $K \in$ $\in [1, \infty)$, т. е. если искажение модулей семейств кривых при отображении f ограничено. В частности, гомеоморфизм f: $G \to G'$ называется конформным, если

$$M(f\Gamma) = M(\Gamma)$$

для любых семейств кривых в G.

Теорема 3. *Пусть X связно в точке $x_0 \in G$ с компактной окрестностью, X' — регулярное компактное пространство Левнера, а f: $G \setminus \{x_0\} \to G'$ — квазиконформное отображение. Если μ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x_0, x) < \varepsilon_0} \psi^{\alpha}(d(x, x_0))\, d\mu(x) = o\left(I^{\alpha}(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{23}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$ и $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция на $(0, \infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{24}$$

то f продолжимо в точку x_0 по непрерывности в пространстве (X', d').

Теорема 4. *Пусть X связно в точке $x_0 \in G$ с компактной окрестностью, X' — регулярное компактное пространство Левнера, а f: $G \setminus \{x_0\} \to G'$ — квазиконформное отображение. Если μ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} \frac{d\mu(x)}{d(x, x_0)^{\alpha}} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right) \tag{25}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$, то f продолжимо в точку x_0 по непрерывности в пространстве (X', d').

Известно, что если метрическое пространство с мерой (X, d, μ) α-регулярно сверху в точке x_0 с $\alpha > 1$, то

$$\int\limits_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} \frac{d\mu(x)}{d(x, x_0)^{\alpha}} = O\left(\log \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \tag{26}$$

при $\varepsilon \to 0$ [22, с. 54], т. е. (25) имеет место при $\alpha > 1$. Таким образом (см. также замечание 3), справедливо следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть* X *и* X' *— регулярные компактные пространства Левнера и* X *связно в точке* x_0. *Тогда любое квазиконформное отображение* $X \setminus \{x_0\}$ *в* X' *продолжимо до квазиконформного отображения* X *в* X'.

1. *Brakalova M., Jenkins J.* On the local behavior of certain homeomorphisms // Kodai Math. J. – 1994. – **17**, № 2. – P. 201 – 213.
2. *Brakalova M., Jenkins J.* On the local behavior of certain homeomorphisms // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1997. – **337**. – C. 11 – 20.
3. *Гутлянский В., Рязанов В.* К теории локального поведения квазиконформных отображений // Изв. АН России. Сер. мат. – 1995. – **59**, № 3. – С. 31 – 58.
4. *Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On boundary correspondence under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math. – 1996. – **21**, № 1. – P. 167 – 178.
5. *Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M.* Infinitesimal geometry of quasiregular mappings // Ibid. – 2000. – **25**, № 1. – P. 101 – 130.
6. *Gutlyanskii V., Vuorinen M.* On maps almost conformal at the boundary // Complex Variables Theory Appl. – 1997. – **34**. – P. 445 – 464.
7. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**, № 3. – P. 403 – 424.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Contemp. Math. – 2004. – **364**. – P. 193 – 203.
10. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math. – 2005. – **30**. – P. 49 – 69.
11. *Миклюков В. М.* Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. – 1969. – **188**, № 3. – С. 525 – 527.
12. *Ryazanov V. I., Sevost'yanov E. A.* On normal families of Q-homeomorphisms // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 2004. – **9**. – С. 161 – 176.
13. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On the theory of BMO-quasiregular mappings // Докл. РАН. 1999. – **369**, № 1. – С. 13 – 15.
14. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation // Sib. Adv. Math. – 2001. – **11**, № 2. – P. 94 – 130.
15. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solution of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117 – 150.
16. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Finite mean oscillation and Beltrami equation // Isr. J. Math. – 2006. – **153**. – P. 247 – 266.
17. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To the theory of the Beltrami equation // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1571 – 1583.
18. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Критерий устранимости множеств для пространств L_p^1 квазиконформных и квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 1. – С. 630 – 633.
19. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math. Dissertationes. – 1976. – № 11. – 44 p.
20. *Vuorinen M.* Lower bounds for the moduli of path families with applications to nontangential limits of quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math. – 1979. – **2**. – P. 279 – 291.
21. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
22. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001.
23. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta math. – 1998. – **181**, № 1. – P. 1 – 61.
24. *Martio O.* Modern tools in the theory of quasiconformal maps // Texts Math. B. – 2000. – **27**. – P. 1 – 43.
25. *Салимов Р. Р.* О граничном поведении вложений метрических пространств в евклидово // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 8. – С. 1068 – 1074.
26. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир., 1969. – Т. 2.
27. *Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. – New York: Clarendon Press, 1993.
28. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1942.
29. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
30. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta math. – 1957. – **98**. – P. 171 – 219.
31. *Federer H.* Geometric measure theory. – Berlin etc.: Springer, 1969.

Получено 21.12.06