УДК 517.9+530.1

Е. П. Белан (Тавр. нац. ун-т, Симферополь),
А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДИНАМИКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

We consider a scalar parabolic equation in the circle of radius r. This problem is a gasless combustion phenomenological model in the surface of a cylinder of r radius. We consider the problems of the existence, asymptotic form and stability of traveling waves and the nature of gaining, losing their stability.

Розглядається скалярне параболічне рівняння на колі радіуса r. Ця задача є феноменологічною моделлю безгазового горіння на циліндричній поверхні радіуса r. Вивчаються питання існування, асимптотичної форми та стійкості біжучих хвиль, а також характер набуття та втрати їх стійкості.

Введение. Спиновым режимам горения тонкостенного кругового цилиндра радиуса r феноменологически [1 – 3] соответствуют решения типа бегущих волн краевой задачи

$$\ddot{\xi}+\xi=2\varepsilon\left[\dot{\xi}\Big(1-\frac{4}{3}\dot{\xi}^2\Big)+\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{\xi}+\frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{\xi}\right],\quad \xi(t,x+2\pi r)=\xi(t,x). \tag{1}$$

Здесь ξ — координаты точек фронта горения в системе координат, в которой фронт в среднем покоится, $0<\varepsilon\ll 1$ — инкремент неустойчивости малых колебаний фронта, $\lambda>0$ — корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков искривленного фронта, точка означает дифференцирование по времени, Δ — одномерный оператор Лапласа.

Феноменологическое уравнение учитывает два основных факта, относящихся к нестационарным процессам распространения фронта: наличие автоколебательной неустойчивости плоского фронта, стабилизируемой нелинейными эффектами, и теплопроводностной связи соседних участков фронта. Взаимодействие тепловых слоев, примыкающих к зоне экзотермической реакции, определяется не только температурой и скоростью продвижения прилегающих участков реакционной поверхности, но и распределением температуры вдоль всего фронта реакции [2]. Нелокальность тепловой связи отражает в уравнении (1) нелокальный оператор $\sqrt{-\Delta}$.

Согласно работе [2], количество решений типа бегущих волн задачи (1)

$$\xi_k^{\pm}=\alpha_k^{1/2}\cos(t\mp k\theta)+O(\varepsilon),\qquad \theta=\frac{x}{r},\quad k=0,1,\ldots, \tag{2}$$

где $\alpha_k=\alpha_k(\rho)$, $\rho=2\pi r/\lambda$,

$$\alpha_k=1-\frac{k^2}{\rho^2}+\beta\frac{k}{\rho}>0,\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

неограниченно увеличивается при возрастании ρ. В [2] было получено необходимое условие устойчивости решений типа бегущих волн задачи (1). Вопросы о существовании, асимптотической форме и устойчивости бегущих волн задачи (1) рассмотрены в [4, 5] ($\beta=0$), [6] ($\beta\geq 0$).

В данной работе приводятся доказательства полученных в [6] результатов о существовании, асимптотической форме и устойчивости бегущих волн задачи (1). Доказывается также, с помощью метода квазинормальных форм Ю. С. Колесова, что от теряющей устойчивость бегущей волны ξ_1^+ ответвляется двумерный тор пространственно неоднородных периодических по времени решений. Заметим, что полученные здесь результаты представляют интерес в свете установленных экспериментально и численно режимов горения, отличных от спиновых (см. [7, 8] и приведенную в них библиографию).

Отметим теперь, что задача о бифуркации рождения и развития пространственно неоднородных режимов из пространственно однородного предельного цикла, бегущих волн в нелинейных средах представляет значительный интерес [5] (гл. 4), [9] (гл. 9).

1. Начально-краевая задача. Уравнение (1) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{\xi} = p, \qquad \xi(t, x + 2\pi r) = \xi(t, x),\\ \dot{p} = -\xi - 2\varepsilon\left[p\Big(1 - \frac{4}{3}p^2\Big) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta p + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}p\right], \qquad p(t, x + 2\pi r) = p(t, x).\end{gathered} \tag{4}$$

Уравнение (1) или (4) рассматривается при начальных условиях

$$\xi|_{t=0} = \xi_0, \qquad \dot{\xi}|_{t=0} = p_0 \quad \text{или} \quad \xi|_{t=0} = \xi_0, \quad p|_{t=0} = p_0. \tag{5}$$

Система (4) является системой спаренных „обыкновенного” и „параболического” уравнений. Следуя [10] (см. § 3.4), приходим к заключению о существовании и единственности решения задачи (4), (5) при $\xi_0 \in H^1$, $p_0 \in H^1$. Здесь $H^1 = H^1\big(]0, 2\pi r[\big)$ — соболевское пространство $2\pi r$-периодических функций.

Итак, уравнение (1) или, что то же самое, уравнение (4) в пространстве $H^1 \times H^1$ порождает локальную динамическую систему. Далее в качестве фазового пространства уравнения (1) примем пространство $E = H^1 \times H^1$. Заметим, что уравнение (1) является $O(2)$-эквивариантным, т. е. инвариантным относительно группы вращений окружности и отражения $x \to -x$.

Отметим, что методы и результаты качественной теории полулинейных параболических уравнений, развитые в монографии [10], применимы, разумеется, для исследования задачи (1), (4).

2. Асимптотические представления бегущих волн. Пусть при фиксированных ρ и целом $n > 0$ выполняется неравенство $\alpha_n = \alpha_n(\rho) > 0$. Следуя одночастотному методу [11], построим решения задачи (1) в виде

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_k\big(z\exp(-in\theta), \overline{z}\exp(in\theta)\big), \tag{6}$$

где $\sigma_0(z, \overline{z}) = z + \overline{z}$, а z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = iz + \varepsilon z\,\big(b(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)|z|^2 + \varepsilon c_2(\varepsilon)|z|^4 + \ldots\big). \tag{7}$$

При этом переменная $\overline{z}$ удовлетворяет комплексно-сопряженному уравнению.

Подставим (6), (7) в уравнение (1) и выполним преобразования $z\exp(-in\theta) \to z$, $\overline{z}\exp(in\theta) \to \overline{z}$. Приравняв теперь коэффициенты при одинаковых степенях ε и использовав при этом равенства

$$c_k(\varepsilon) = c_{k,0} + \varepsilon c_{k,1} + \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad b(\varepsilon) = \alpha_n + \varepsilon b_1 + \ldots, \tag{8}$$

получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений в виде

$$B\sigma_k = f_k(z, \overline{z}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где

$$B\sigma = -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}z^2 - 2\frac{\partial^2\sigma}{\partial z\partial\overline{z}}z\overline{z} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial\overline{z}^2}\overline{z}^2 + \frac{\partial\sigma}{\partial z}z + \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}\overline{z} - \sigma\right).$$

Оператор B, рассматриваемый на пространстве многочленов относительно $z, \overline{z}$, является диагональным, причем справедливы равенства

$$Bz^\alpha\overline{z}^\beta = \left(1 - (\alpha - \beta)^2\right) z^\alpha\overline{z}^\beta. \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение (9) при $k = 1$. В этом случае

$$f_1(z, \overline{z}) = \frac{8}{3}i(z - \overline{z})^3 - 2i|z|^2\left(c_{1,0}z - \overline{c_{1,0}z}\right).$$

В силу равенства (10) это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда коэффициенты при $|z^2|z$, $|z^2|\overline{z}$ в его неоднородности равны нулю. Отсюда следует $c_{1,0} = -4$. Тогда уравнению (9) при $k = 1$ удовлетворяет функция

$$\sigma_1 = -\frac{i}{3}(z^3 - \overline{z}^3). \tag{11}$$

Рассмотрим теперь уравнение (9) при $k = 2$. Несложно убедиться в том, что при $b_1 = -\dfrac{1}{2}i\alpha_n^2$ справедливо равенство

$$f_2(z, \overline{z}) = 8(z^2 + \overline{z}^2)\left[(\alpha_n(z + \overline{z}) + |z|^2c_{1,0}(z + \overline{z}) + i\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial z}z - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\overline{z}}\overline{z}\right)\right] -$$
$$-2i|z|^2(c_{1,1}z - \overline{c_{1,1}z}) - 2i|z|^4\left(c_{2,0}z - \overline{c_{2,0}z}\right). \tag{12}$$

Согласно (10) это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда коэффициенты при $z|z|^2$, $\overline{z}|z|^2$, $z|z|^4$, $\overline{z}|z|^4$ в его неоднородности равны нулю. Отсюда находим

$$c_{1,1} = -4i\alpha_n, \qquad c_{2,0} = 12i,$$

$$\sigma_2 = -(z^3 + \overline{z}^3)\left(\alpha_n - 4|z|^2\right) - \frac{1}{3}(z^5 + \overline{z}^5).$$

Несложно убедиться в том, что процесс последовательного построения разложений $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $\sigma_k(z, \overline{z})$ неограниченно продолжим. Итак, поставленная задача о построении разложений (6), (7) разрешима.

Рассмотрим теперь уравнение (7), в которое подставлены найденные $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$. Легко видеть, что при увеличении параметра ρ и его переходе через значение ρ_n, $\alpha(\rho_n) = 0$, из его нуля бифурцирует предельный цикл

$$z = z_n(t) = \frac{1}{2}\alpha_n^{1/2}\exp(i\omega_n t) + O(\varepsilon^3), \qquad \omega_n = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon^2\alpha_n^2 + O(\varepsilon^4). \tag{13}$$

Подставим теперь периодическое решение $z = z_n(t)$ в (6) и воспользуемся при этом равенством (11). В результате придем к заключению, что задача (1) имеет при $\rho > \rho_n$ приближенные по невязке порядка ε^2 периодические по t решения

$$\tilde{\xi}_n^{\pm}(\eta) = \alpha_n^{1/2}\cos\eta + \frac{\varepsilon}{12}\alpha_n^{3/2}\sin 3\eta, \qquad \eta = t \mp n\frac{x}{r}. \tag{14}$$

Здесь мы использовали инвариантность задачи (1) относительно преобразования $x \mapsto -x$.

3. Устойчивость синфазной и первой спиновой волн. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений $\tilde{\xi}_0$, $\tilde{\xi}_1^+$ задачи (1) при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 < 0$. С этой целью построим приближенные решения задачи (1) в виде

$$\xi = \sum_{s=0}^{1} \varepsilon^s p_s\big(z_1, z_2\exp(-i\theta), z_3\exp(i\theta), z_4\exp(-2i\theta), \text{к. с.}\big), \tag{15}$$

где $p_0(z,\overline{z}) = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + \text{к. с.}$ Переменная z_k, $k = 1,2,3,4$, в (15) удовлетворяет уравнению

$$\dot{z_k} = iz_k + \varepsilon\big(\gamma_k z_k + b_k(z,\overline{z})\big), \quad k = 1,2,3,4, \tag{16}$$

где $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = \alpha_1$, $\gamma_4 = \alpha_2$. Выберем формы третьей степени $b_k(z,\overline{z})$, $k = 1,2,3,4$, S^1-инвариантными:

$$b_k(z_1, z_2\exp\big(-i\theta), z_3\exp(i\theta), z_4\exp(-2i\theta), \text{к. с.}\big) =$$
$$= \exp\big(-is(k)\theta)b_k(z_1, z_2, z_3, z_4, \text{к. с.}\big), \quad k = 1,2,3,4, \tag{17}$$

где $s(1) = 0$, $s(2) = 1$, $s(3) = -1$, $s(4) = 2$. Подставим (15), (16) в уравнение (1) и затем в полученном равенстве выполним, использовав (17), преобразование $z_k\exp\big(-is(k)\theta\big) \to z_k$, $k = 1,2,3,4$. Далее в левой и правой частях полученного равенства приравняем коэффициент при ε. В результате для определения p_1, b_k, $k = 1,2,3,4$, получим линейное уравнение

$$Lp_1 = \frac{8}{3}i\left(\sum_{k=1}^{4}(z_k - \overline{z_k})\right)^3 - iM\left(\sum_{k=1}^{4}(b_k - \overline{b_k})\right), \tag{18}$$

где

$$Mb(z,\overline{z}) = b(z,\overline{z}) + \frac{\partial b}{\partial z}z - \frac{\partial b}{\partial \overline{z}}\overline{z}.$$

Оператор L является диагональным оператором в пространстве многочленов относительно z, $\overline{z}$, причем

$$Lz^\gamma\overline{z}^\beta = \big(1 - (\gamma-\beta, e_1)^2\big)z^\gamma\overline{z}^\beta,$$

где $z^\gamma = z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}z_3^{\gamma_3}z_4^{\gamma_4}$, $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$ — целочисленный вектор с неотрицательными компонентами, $e_1 = (1,1,1,1)$, а $(*,*)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. Выберем b_k, $k = 1,2,3,4$, так, чтобы в правой части (18) коэффициенты при $z^\gamma\overline{z}^\beta$, где $(\gamma-\beta, e_1)^2 = 1$ и моном $z^\gamma\overline{z}^\beta$ удовлетворяет одному из условий (17), были бы равны нулю. Этими требованиями формы b_k, $k = 1,2,3,4$, определяются однозначно. Оставшиеся резонансные мономы $z^\gamma\overline{z}^\beta$, т. е. те, для которых выполнено условие $(\gamma-\beta, e_1)^2 = 1$, в соответствии с методом Галеркина опустим. Полученное относительно p_1 уравнение (18) имеет решение того же вида, что и его неоднородность. Подставим найденные b_k, $k = 1,2,3,4$, в (16) и выполним затем замену $z_k = a_k\exp(it)$, $k = 1,2,3,4$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{a}_1 = \varepsilon a_1\left(1 - 4|a_1|^2 - 8|a_2|^2 - 8|a_3|^2 - 8|a_4|^2\right) - 4\varepsilon\overline{a}_2^2a_4,$$
$$\dot{a}_2 = \varepsilon a_2\left(\alpha_1 - 8|a_1|^2 - 4|a_2|^2 - 8|a_3|^2 - 8|a_4|^2\right) - 4\varepsilon a_1^2\overline{a}_3,$$

$$\dot{a}_3 = \varepsilon a_3 \left(\alpha_1 - 8|a_1|^2 - 8|a_2|^2 - 4|a_3|^2 - 8|a_4|^2\right) - 4\varepsilon a_1^2 \overline{a}_2,$$
$$\dot{a}_4 = \varepsilon a_4 \left(\alpha_2 - 8|a_1|^2 - 8|a_2|^2 - 8|a_3|^2 - 4|a_4|^2\right) - 4\varepsilon \overline{a}_2^2 a_1. \tag{19}$$

Исследуем теперь на устойчивость стационарное решение $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$, $k = 2, 3, 4$, системы (19). Ясно, что эта стационарная точка порождает окружность $a_1 = \frac{1}{2}\exp(ig)$, $a_k = 0$, $k = 2, 3, 4$, $g \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, стационарных точек. Матрица устойчивости этого семейства стационарных точек симметрична и блочно-диагональна. Она имеет два простых собственных значения 0, -2ε. Остальные ее собственные значения являются двукратными. Эти собственные значения отрицательны тогда и только тогда, когда $\alpha_1 < 1$. Следовательно, периодическое решение $\tilde{\xi}_0$ задачи (1) экспоненциально орбитально устойчиво при $\alpha_1 < 1$ и неустойчиво при $\alpha_1 > 1$. При этом синфазный устойчивый режим $\tilde{\xi}_0$ подавляется первыми спиновыми модами $\tilde{\xi}_1^{\pm}$ тогда, когда квадрат их общей амплитуды достигает единицы. Отметим, что этот результат был получен в [2].

Исследование на устойчивость семейства стационарных решений $a_2 = \frac{1}{2}\exp(ig)$, $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ системы (19) приводит к заключению, что оно экспоненциально орбитально устойчиво тогда и только тогда, когда $2\alpha_1 > 1$, $(2\alpha_1 - 1)(2\alpha_1 - \alpha_2) > \alpha_1^2$.

Учитывая (3), приходим к заключению, что эти условия имеют место тогда и только тогда, когда

$$\rho > 3\beta + \sqrt{4\beta^2 + 10} = \rho_1^s, \quad \beta^2 \leq 2,$$
$$\frac{5}{3\beta - \sqrt{4\beta^2 + 10}} > \rho > \frac{5}{3\beta + \sqrt{4\beta^2 + 10}}, \quad \beta^2 > 2. \tag{20}$$

Итак, при $\rho < \rho_1^s$ может реализоваться только синфазный режим колебаний. Существующие при $\rho > \dfrac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}} = \rho_1$ первые спиновые моды $\tilde{\xi}_1^{\pm}$ в интервале $\rho_1 < \rho < \rho_1^s$ неустойчивы. Включение спиновой моды $\tilde{\xi}_1^{+}$ в число устойчивых режимов происходит жестко, с конечной амплитудой, преодолевая воздействие давления спиновых мод $\tilde{\xi}_0$, $\tilde{\xi}_2^{+}$.

3. Существование и устойчивость бегущих волн. Рассмотрим вначале вопрос о характере устойчивости бегущей волны $\tilde{\xi}_n^{+}$ в связи с воздействием на нее бегущих волн $\tilde{\xi}_s^{-}$, $\tilde{\xi}_p^{+}$, $s \geq 0$, $s \neq n$, $p = 2n + s$. Построим с этой целью приближенные решения задачи (1) в виде

$$\xi = \sum_{k=0}^{1} \varepsilon^k q_k\big(z_1 \exp(-in\theta), z_2 \exp(is\theta), z_3 \exp(-ip\theta), \text{к. с.}\big), \tag{21}$$

где $q_0(z_1, z_2, z_3, \text{к. с.}) = (z_1 + z_2 + z_3) + \text{к. с.}$ Рассуждая, как и выше, относительно $a_k = z_k \exp(-it)$, $k = 1, 2, 3$, получаем систему

$$\dot{a}_1 = \varepsilon a_1\big(\alpha_n - 4|a_1|^2 - 8|a_2|^2 - 8|a_3|^2\big),$$
$$\dot{a}_2 = \varepsilon a_2\big(\alpha_s - 8|a_1|^2 - 4|a_2|^2 - 8|a_3|^2\big) - 4\varepsilon a_1^2 \overline{a}_3, \tag{22}$$
$$\dot{a}_3 = \varepsilon a_3\big(\alpha_p - 8|a_1|^2 - 8|a_2|^2 - 4|a_3|^2\big) - 4\varepsilon a_1^2 \overline{a}_2.$$

Приближенному решению $\tilde{\xi}_n^+$ задачи (1) соответствует семейство стационарных точек $a_1 = \dfrac{\alpha_n^{1/2}}{2}\exp(ig), a_2 = a_3 = 0,\ g \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, этой системы. Указанное семейство экспоненциально орбитально устойчиво тогда и только тогда, когда $2\alpha_n > \alpha_s$, $(2\alpha_n - \alpha_s)(2\alpha_n - \alpha_p) > \alpha_n^2$. Здесь, напомним, $p = 2n + s$.

Для анализа характера устойчивости бегущей волны $\tilde{\xi}_n^+$ в связи с воздействием бегущих волн $\tilde{\xi}_s^+$, $\tilde{\xi}_p^+$, $0 \le s < n$, $p = 2n - s$, построим приближенные решения задачи (1) в виде (21). Как и выше, получим систему уравнений (22), в которой $p = 2n - s$.

Приведенный выше анализ приводит к заключению, что на выделенную бегущую волну $\tilde{\xi}_n^+$ воздействуют упорядоченные пары бегущих волн. Эти воздействия описываются системами вида (22), в которых p принимает значения $2n + s$, $2n - s$. Итак, есть основания предполагать, что для экспоненциальной орбитальной устойчивости бегущей волны $\tilde{\xi}_n^+$ необходимо, чтобы для каждого $s \ge 0$, $p \ne n$

$$2\alpha_n > \alpha_s, \qquad (2\alpha_n - \alpha_s)(2\alpha_n - \alpha_p) > \alpha_n^2,$$

где p принимает значения $2n + s$, $2n - s$.

Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_m = \alpha_m(\rho) > 0$ для некоторого целого $m \ge 0$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача* (1) *имеет периодические по t решения $\xi_m^{\mp}(\eta, \varepsilon)$, $\eta = \omega_m(\varepsilon)t \mp m\dfrac{x}{r}$, где*

$$\begin{gathered}\xi_m^{\pm} = \alpha_m^{1/2}\cos\eta + \frac{\varepsilon}{12}\alpha_m^{3/2}\sin 3\eta + O(\varepsilon^2),\\ \omega_m(\varepsilon) = 1 + O(\varepsilon^2).\end{gathered} \tag{23}$$

Решения $\xi_m^{\pm}\Big(\omega_m(\varepsilon)t \mp m\dfrac{x}{r}\Big)$ экспоненциально орбитально устойчивы тогда и только тогда, когда:

i) $2\alpha_m - \alpha_s > 0, (2\alpha_m - \alpha_s)(2\alpha_m - \alpha_{2m+s}) > \alpha_m^2$ *для всех целых* $s \ge 0$;

ii) $2\alpha_m - \alpha_s > 0, (2\alpha_m - \alpha_s)(2\alpha_m - \alpha_{2m-s}) > \alpha_m^2$ *для всех целых* $0 < s < m$.

Доказательство. Центральный момент доказательства теоремы состоит в исследовании свойств устойчивости в пространстве E уравнения

$$\ddot{v} + v = 2\varepsilon\left[\dot{v} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{v} + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{v} - 4\alpha_m\sin^2\Big(t - m\frac{x}{r}\Big)\dot{v}\right], \tag{24}$$

полученного линеаризацией уравнения (1) на приближенном решении $\alpha_m^{1/2}\cos\Big(t - m\dfrac{x}{r}\Big)$.

Введем в пространстве E ортопроектор

$$P(v,\dot{v}) = \left(\sum_{-k_0}^{k_0} P_s v, \sum_{-k_0}^{k_0} P_s\dot{v}\right), \qquad P_s(v,\dot{v}) = \Big(v_s\exp\Big(is\frac{x}{r}\Big), \dot{v}_s\exp\Big(is\frac{x}{r}\Big)\Big),$$

$$v_s = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{2\pi r} v\exp\Big(-is\frac{x}{r}\Big)\,dx, \qquad \dot{v}_s = \frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{2\pi r} \dot{v}\exp\Big(-is\frac{x}{r}\Big)\,dx,$$

выбор k_0 осуществим позже. Обозначим $v = h + w$, $h = Pv$, $w = (I - P)v$, где I — единичный оператор. Перейдем от уравнения (24) к системе уравнений относительно h, w и положим в ней $w = 0$. В результате получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\ddot{h}_k + h_k = 2\varepsilon\big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\dot{h}_k + \alpha_m(e^{2it}\dot{h}_{2m+k} + e^{-2it}\dot{h}_{k-2m})\big],$$
$$\ddot{h}_k + h_k = 2\varepsilon\big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\dot{h}_k + \alpha_m e^{-2it}\dot{h}_{k-2m}\big], \quad 2m + k > k_0.$$

Следуя методу замен переменных Боголюбова – Штокало, выполним в этой системе преобразование

$$h_k = \eta_k + \eta_{-k} + \frac{i}{4}\varepsilon\alpha_m \begin{cases} e^{-2it}\overline{\eta}_{2m-k} - e^{2it}\eta_{2m+k}, & 0 \le k \le 2m, \\ e^{-2it}\eta_{2m-k} - e^{2it}\eta_{2m+k}, & 2m < k \le k_0, \\ e^{-2it}\eta_{k-2m}, & 2m + k > k_0. \end{cases}$$

Переменная $\overline{h}_k$ преобразуется согласно операции комплексного сопряжения к преобразованию переменной h_k. В результате получим систему, которая членами порядка ε^2 отличается от системы

$$\dot{\eta}_k = i\eta_k + \varepsilon\Big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\eta_k - \alpha_m e^{2it}\eta_{-(2m+k)}\Big],$$
$$\dot{\eta}_{-k} = -i\eta_{-k} + \varepsilon\Big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\eta_{-k} - \alpha_m e^{-2it}\overline{\eta}_{-(2m-k)}\Big],$$
$$\dot{\eta}_{-k} = -i\eta_{-k} + \varepsilon\Big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\eta_{-k} - \alpha_m e^{-2it}\eta_{(k-2m)}\Big], \quad k > 2m,$$
$$\dot{\eta}_k = i\eta_k + \varepsilon(\alpha_k - 2\alpha_m)\eta_k, \quad 2m + k > k_0,$$

где $0 \le k \le k_0$. Эта система заменой

$$\eta_k = e^{it}\zeta_k, \quad \eta_{-k} = e^{-it}\zeta_{-k}$$

сводится к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_k &= \varepsilon\Big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\zeta_k - \alpha_m\zeta_{-(2m+k)}\Big], \quad 2m + k < k_0, \\ \dot{\zeta}_{-k} &= \varepsilon\Big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\zeta_{-k} - \alpha_m\overline{\zeta}_{-(2m-k)}\Big], \quad 0 \le k \le 2m, \\ \dot{\zeta}_{-k} &= \varepsilon\Big[(\alpha_k - 2\alpha_m)\zeta_{-k} - \alpha_m\zeta_{(k-2m)}\Big], \quad k > 2m, \\ \dot{\zeta}_k &= \varepsilon(\alpha_k - 2\alpha_m)\zeta_k, \quad 2m + k > k_0. \end{aligned} \tag{25}$$

Матрица коэффициентов этой системы является блочно-диагональной и состоит из двумерных и одномерных блоков. Если $2m + k > k_0$, то одномерными, повторяющимися дважды блоками этой матрицы являются $\varepsilon(\alpha_k - 2\alpha_m)$. Собственными значениями системы (25) являются 0 и $-2\varepsilon\alpha_m$. Выберем теперь k_0 так, чтобы $2\alpha_m - \alpha_k > 0$, $(2\alpha_m - \alpha_k)(2\alpha_m - \alpha_{2m+k}) > \alpha_m^2$ для всех $k \ge k_0$. В силу (3) этот выбор реализуем. При указанном выборе k_0 двумерные блоки матрицы системы (25) устойчивы тогда и только тогда, когда выполнены условия i), ii) теоремы.

Следуя [12], приходим к заключению, что свойства устойчивости уравнения (24) совпадают с теми, о которых речь идет в теореме.

Для доказательства существования решения типа бегущей волны ξ_m^+ задачи (1) положим $\xi = v(\eta,\varepsilon) = v\left(\omega t - m\dfrac{x}{r}, \varepsilon\right)$, где $\omega = \omega(\varepsilon)$ — некоторая, пока неизвестная, гладкая функция ε, причем $\omega(0) = 1$. Очевидно, функция $v(\eta,\varepsilon)$ является решением задачи

$$\begin{gathered}\omega^2 v'' + v = 2\varepsilon\left[\omega v'\Big(1 - \frac{4}{3}\omega^2 (v')^2\Big) + \frac{\lambda^2 m^2}{4\pi^2 r^2}\omega v''' + \frac{\beta\lambda m}{2\pi r}\omega\sqrt{-\Delta}v'\right],\\ v(\eta + 2\pi) = v(\eta),\end{gathered} \tag{26}$$

где штрих означает дифференцирование по η. В силу (14) задача (26) при $\omega = 1$ имеет приближенное по невязке порядка ε^2 решение

$$\widehat{v} = \alpha_m^{1/2}\Big(1 + \varepsilon\frac{3}{8}\alpha_m\Big)\cos\eta + \frac{\varepsilon}{12}\alpha_m^{3/2}\sin 3\eta. \tag{27}$$

Замена $v = \widehat{v} + y$ приводит уравнение (26) к виду

$$B(\varepsilon)y = F(y,\eta,\omega,\varepsilon), \qquad y(\eta + 2\pi) = y(\eta), \tag{28}$$

где

$$B(\varepsilon)y = y'' + y - 2\varepsilon\left[y'\Big(1 - 4(\widehat{v'})^2\Big) + \frac{\lambda^2 m^2}{4\pi^2 r^2}y''' + \frac{\beta\lambda m}{2\pi r}\sqrt{-\Delta}y'\right],$$

а

$$F(y,\eta,\omega,\varepsilon) = (1-\omega^2)y'' - 2\varepsilon\left[(1-\omega)y' - \frac{4}{3}(1-\omega^3)(\widehat{v'})^2 y' + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 r^2}(1-\omega)y'' + +\beta\frac{\lambda n}{2\pi r}(1-\omega)\sqrt{-\Delta}y'\right] + \varepsilon f_0(\eta,\omega,\varepsilon) + \varepsilon f_2(y',\eta,\omega,\varepsilon).$$

Обозначим через $H^l = H^l\big(]0,2\pi[\big)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, пространство Соболева 2π-периодических функций. Положим $\|\cdot\|_{H^l} = \|\cdot\|_l$, $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|$.

Несложно убедиться в справедливости оценки

$$\big\|f_0(\cdot,\omega,\varepsilon)\big\| \le d\varepsilon \tag{29}$$

для всех ω таких, что $|1-\omega| \le d\varepsilon$. Здесь и далее символом d будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от ω, ε и точные значения которых несущественны. Функция $f_2(\cdot,\eta,\omega,\varepsilon)\colon H^1 \to H$, $f_2(0,\eta,\omega,\varepsilon) = 0$, удовлетворяет неравенству

$$\big\|f_2(y_1,\cdot) - f_2(y_2,\cdot)\big\| \le d\max\big(\|y\|_1, \|y_2\|_1\big)\|y_1 - y_2\| \tag{30}$$

для всех $\|y_k\|_1 \le d\varepsilon$, $k = 1,2$.

Доказательство разрешимости уравнения (28) при соответствующем выборе ω в пространстве H^3 следует развитой в работе [12] методике. Рассмотрим вопрос о разрешимости в пространстве H^3 уравнения

$$B(\varepsilon)y = g, \quad g \in H. \tag{31}$$

С этой целью спектральную задачу

$$B(\varepsilon)y = \lambda y, \quad y \in H, \tag{32}$$

рассмотрим как возмущение спектральной стационарной задачи

$$y'' + y - 2\varepsilon\Big[y'(1 - 2\alpha_m) + \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 r^2} y''' + \frac{\beta\lambda n}{2\pi r}\sqrt{-\Delta}y'\Big] = \lambda y. \tag{33}$$

Ясно, что эта задача имеет в пространстве H полную ортонормированную систему собственных функций $\exp(ik\eta)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. При этом ее собственной функции $\exp(ik\eta)$ соответствует собственное значение $-k^2 + 1 + O(\varepsilon)$. Следовательно, для анализа уравнения (31) достаточно рассмотреть задачу (32) для малых λ. Перейдем теперь к исследованию задачи (32) для малых λ. Учтем, что с точностью порядка ε^2 имеет место равенство $B(\varepsilon)h^0 = 0$, где

$$h^0(\eta, \varepsilon) = \sin\eta - \frac{\varepsilon}{4}\alpha_m \cos 3\eta.$$

Для анализа задачи (32) применим метод возмущений. Положим

$$y = a_1 \cos\eta + a_2 \sin\eta + \varepsilon y_1(\eta) + \varepsilon^2 y_2(\eta) + \ldots,$$

$$\lambda = \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots$$

и подставим эти равенства в (32). В результате относительно y_1 получим линейное неоднородное уравнение. Легко видеть, что оно разрешимо тогда и только тогда, когда λ_1 является собственным значением матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4\alpha_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $a^1 = (0, 1)^T$ является собственным вектором матрицы S, а $\lambda_1 = 0$ — соответствующее собственное значение.

Перейдем теперь к вопросу о разрешимости уравнения

$$Sa = \beta.$$

Ясно, что это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $(b, \beta) = 0\Big((b, \beta) = \sum_{k=1}^{2} b_k\beta_k\Big)$ для всех b таких, что $S^T b = 0$. Если указанное условие выполнено, то существует единственное решение $a = G\beta$ такое, что $(G\beta, a^1) = 0$. Очевидно, $\|G\beta\| \le (4\alpha_m)^{-1}\|\beta\|$.

Преобразуем теперь задачу (28). Добавим в ее левую часть слагаемое $-\langle y, h^0\rangle\|h^0\|^{-2}B(\varepsilon)h^0$. В результате получим спектральную задачу

$$\widehat{B}(\varepsilon)y = \lambda y, \quad y \in H.$$

По определению $\widehat{B}(\varepsilon)h^0 = 0$, причем спектральные свойства оператора $\widehat{B}(\varepsilon)$ аналогичны таковым для оператора $B(\varepsilon)$. Пусть $\widehat{B}^*(\varepsilon)q^0 = 0$ и $\langle h^0, q^0\rangle = 1$. Отсюда следует, что $q^0(\eta, \varepsilon) = 2\sin\eta + O(\varepsilon)$. Следовательно, уравнение

$$\widehat{B}(\varepsilon)y = g, \quad \langle q^0, g\rangle = 0, \quad g \in H,$$

имеет единственное решение $\mathcal{R}g$ такое, что $\langle \mathcal{R}g, h^0\rangle = 0$.

Обозначим $M(\varepsilon) = \{y \in H\colon \langle y, q^0\rangle = 0\}$. Очевидно, существует функция $g_1(\cdot, \varepsilon) \in H^3$, $g_1(\eta, \varepsilon) = \cos\eta + O(\varepsilon)$, такая, что

$$M(\varepsilon) = M_1(\varepsilon) \oplus M_2(\varepsilon), \qquad M_1(\varepsilon) = \mathrm{Span}\{g_1(\cdot, \varepsilon)\}.$$

Здесь $M_2(\varepsilon)$ — инвариантное пространство оператора $\widehat{B}(\varepsilon)$. Из наших рассуждений следует, что имеют место неравенства

$$\varepsilon\|\mathcal{R}g\|_3 + \|\mathcal{R}g\|_2 \le \frac{d}{\varepsilon\alpha_m}\|g\|_H, \quad g \in M_1(\varepsilon),$$

$$\varepsilon\|\mathcal{R}g\|_3 + \|\mathcal{R}g\|_2 \le d\|g\|_H, \quad g \in M_2(\varepsilon).$$

Обозначим через $\widehat{P}$ проектор в пространстве H на $\mathrm{Ker}\,\widehat{B}(\varepsilon) \oplus M_1(\varepsilon)$. Согласно определению f_0 выполняется неравенство

$$\left\|\widehat{P}f_0(\cdot, \omega, \varepsilon)\right\| \le d\varepsilon^2.$$

Рассмотрим теперь уравнение (28). Заменим в нем B на $\widehat{B}$. Эту замену учтем и в правой части, обозначив ее $\widehat{F}$. В пространстве H^3 рассмотрим уравнение

$$w - \mathcal{R}\Big(\widehat{F}(w, \cdot, \varepsilon, \omega) - \Big\langle q^0, \widehat{F}(w, \cdot, \varepsilon, \omega) > h^0\Big\rangle\Big) = 0. \tag{34}$$

Ясно, что метод последовательных приближений с нулевой начальной точкой, примененный к этому уравнению, приводит к сходящейся в H^3 последовательности равномерно по ε, ω в области $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $|1 - \omega| < d\varepsilon$. Предел этой последовательности $w^*(\varepsilon, \omega)$ — решение уравнения (34). Имеет место следующее неравенство:

$$\varepsilon\big\|w^*(\varepsilon, \omega)\big\|_3 + \big\|w^*(\varepsilon, \omega)\big\|_2 \le \frac{d}{\alpha_m}\varepsilon^2. \tag{35}$$

Согласно (30) существует единственное решение (34), удовлетворяющее этому неравенству и условию $\langle w^*, h^0\rangle = 0$. Функция $w^*(\varepsilon, \omega) \in H^3$ при $\varepsilon > 0$ непрерывно дифференцируема по ε, ω и удовлетворяет уравнению

$$B(\varepsilon)w = F(w, \eta, \varepsilon, \omega) - D(\varepsilon, \omega)h^0, \tag{36}$$

где

$$D(\varepsilon, \omega) = \Big\langle q^0, \widehat{F}(w^*(\varepsilon, \omega), \eta, \varepsilon, \omega)\Big\rangle.$$

Итак, вопрос о разрешимости задачи (28) в пространстве H^3 сводится к вопросу о разрешимости относительно ω уравнения

$$D(\varepsilon, \omega) = 0. \tag{37}$$

Несложно убедиться в том, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$(1 - \omega^3) + \varepsilon^2\gamma(\omega, \varepsilon) = 0,$$

где $\gamma(\omega, \varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемая функция по ω, ε в окрестности точек 1, 0 соответственно. Отсюда следует существование непрерывно дифференцируемого при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решения $\omega = \omega^*(\varepsilon)$ уравнения (32) такого, что

$$\big\|1 - \omega^*(\varepsilon)\big\| \le d\varepsilon^2.$$

Следовательно, $w^*\big(\varepsilon, \omega^*(\varepsilon)\big)$ — 2π-периодическое решение уравнения при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и такое, что

$$\varepsilon\Big\|w^*\big(\varepsilon,\omega^*(\varepsilon)\big)\Big\|_3+\Big\|w^*\big(\varepsilon,\omega^*(\varepsilon)\big)\Big\|_2\le d\varepsilon^2.$$

Теорема доказана.

4. Высокомодовая буферность. Рассмотрим вопрос о количестве устойчивых бегущих волн задачи (1) при фиксированном значении параметра ρ. Рассмотрим вначале случай $\beta=0$. Тогда из теоремы 1 следует легко проверяемый критерий устойчивости бегущих волн.

Теорема 2. *Предположим, что в уравнении* (1) $\beta=0$. *Для того чтобы определенные в теореме* 1 *периодические по* t *решения* $\xi_m^{\mp}(\eta,\varepsilon)$, $m\ge 1$, *задачи* (1) *были экспоненциально орбитально устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_m>\frac{4m^2-1}{6m^2-1},\quad m=1,2,\ldots. \tag{38}$$

Пространственно однородное периодическое решение $\xi_0\big(\omega_0(\varepsilon)t,\varepsilon\big)$ *задачи* (1) *экспоненциально орбитально устойчиво.*

Из этой теоремы следует, что спиновые моды $\xi_m^{\pm}$, $m=1,2,\ldots$, устойчивы тогда и только тогда, когда

$$m^2<\frac{1}{6}\left(2r^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2+1\right).$$

Перейдем теперь к случаю $\beta>0$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Предположим, что* $\beta>0$. *Для того чтобы выполнялось условие* i) *теоремы* 1, *достаточно, чтобы*

$$\alpha_m>\frac{3\beta^2+16}{4\beta^2+16}\left(1+\frac{\beta^2}{4}\right). \tag{39}$$

Доказательство. Рассмотрим $\alpha_n=1-\dfrac{\lambda^2n^2}{4\pi^2r^2}+\dfrac{\beta\lambda n}{2\pi r}$ как функцию формально непрерывного переменного n. Максимальным значением α_n является $1+\dfrac{\beta^2}{4}$. Обозначим $\dfrac{\lambda n}{\pi r}=y$, $g(y)=1-\dfrac{y^2}{4}+\beta\dfrac{y}{2}$. Рассмотрим уравнение

$$g(y)=q\left(1+\frac{\beta^2}{4}\right),$$

где $0<q<1$. Корнями этого уравнения являются

$$y^{\pm}(\beta,q)=\beta\pm\sqrt{(\beta^2+4)(1-q)}.$$

Из уравнения

$$3y^-=y^+ \tag{40}$$

находим

$$q(\beta)=\frac{3\beta^2+16}{4\beta^2+16}.$$

Легко видеть, что

$$y^-\big(\beta,q(\beta)\big)=\frac{\beta}{2},\qquad y^+\big(\beta,q(\beta)\big)=3\frac{\beta}{2}. \tag{41}$$

Пусть выполнено неравенство (39). Рассмотрим

$$A_{m,s-}=(2\alpha_m-\alpha_s)(2\alpha_m-\alpha_{s+2m})-\alpha_m^2$$

как функцию α_s, α_{s+2m}. Докажем, что эта функция принимает положительные значения. Очевидно, достаточно ограничиться случаем

$$\max(\alpha_s,\alpha_{s+2m})>q(\beta)\left(1+\frac{\beta^2}{4}\right).$$

Из свойств задачи

$$g(y_1)+g(y_2)\to\max,\quad y_1-y_2\geq\beta,$$

где $y_1=\dfrac{\lambda s}{\pi r}$, $y_2=\dfrac{\lambda(s+2m)}{\pi r}$, следует, что

$$\alpha_s+\alpha_{s+2m}\leq 2q(\beta)\left(1+\frac{\beta^2}{4}\right).$$

Следовательно, $A_{m,s-}>0$. Очевидно, что $2\alpha_m>\alpha_s$. Таким образом, условие i) теоремы 1 выполнено.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для того чтобы выполнялось условие* ii) *теоремы* 1, *достаточно*, *чтобы*

$$0\leq m<\frac{2\pi r}{\lambda}\frac{3\beta+\sqrt{3\beta^2+12}}{3},\quad 0<\beta^2\leq 2,$$

$$\frac{2\pi r}{\lambda}\frac{3\beta-\sqrt{3\beta^2+12}}{3}<m<\frac{2\pi r}{\lambda}\frac{3\beta+\sqrt{3\beta^2+12}}{3},\quad \beta^2>2. \tag{42}$$

Доказательство. Докажем, что при выполнении условия (42) величина

$$A_{m,(m-s)+}=(2\alpha_m-\alpha_{m-s})(2\alpha_m-\alpha_{m+s})-\alpha_s^2,\quad 1\leq s\leq m,$$

принимает положительные значения. Действительно, полагая $\dfrac{\lambda}{2\pi r}=y$, имеем $\alpha_s(y)=1-{}$ $-sy^2+\beta sy$. Справедливо равенство

$$A_{m,(m-s)+}=s^2y^2\big((-6m^2+s^2)y^2+6m\beta y+2-\beta^2\big).$$

Переходя далее от неравенства

$$\big(-6m^2+s^2\big)y^2+6m\beta y+2-\beta^2>0 \tag{43}$$

к более сильному неравенству

$$-6m^2y^2+6m\beta y+2-\beta^2>0 \tag{44}$$

и решая его, убеждаемся в справедливости леммы.

Из неравенств (43), (44) следует, что при $m\gg 1$ условие (42) в сущности является необходимым условием выполнения требования ii) теоремы 1, а следовательно, и необходимым условием устойчивости бегущей волны $\xi_m^{\pm}$. Отметим, что условие (42) было получено в работе [2] как необходимое условие устойчивости спиновой моды с номером m в соответствии со следующим принципом.

Принцип максимума амплитуды. *Бегущая волна задачи* (1) *неустойчива, если квадрат ее амплитуды меньше двух третьих максимального значения квадрата амплитуды.*

Итак, в силу теорем 1, 2 и согласно неравенствам (39), (42) при $\beta = 0$, $r \to \infty$ и фиксированном λ в задаче (1) имеет место феномен буферности, т. е. неограниченно увеличивается количество сосуществующих экспоненциально орбитально устойчивых периодических по t решений типа бегущих волн.

В задаче (1) при $\beta > 0$ реализуется так называемая высокомодовая буферность [5]. Действительно, пусть $\dfrac{n\lambda}{\pi\beta} < r < \dfrac{(n+1)\lambda}{\pi\beta}$. Тогда в силу условия i) теоремы 1 и леммы 1 все моды $\xi_m^{\pm}$ такие, что $3m < n-1$, неустойчивы. Устойчивыми же являются те бегущие волны, номера которых удовлетворяют неравенствам (39), (42). Ясно, что количество номеров, удовлетворяющих неравенствам (39), (42), неограниченно увеличивается, причем, как это обычно бывает при высокомодовой буферности (см., например, [5]), их состав постоянно обновляется. Отметим, что согласно [2] любая мода с фиксированным номером становится неустойчивой на достаточно больших радиусах, если $\beta^2 > 2$. Мы показали, что это свойство спиновых мод имеет место, если $\beta^2 > 0$.

Как уже отмечалось, при $\beta = 0$ синфазная волна ξ_0 устойчива при любом r, что, как указано в [3], противоречит экспериментальным фактам. При $\beta > 0$ синфазная волна ξ_0 устойчива при любом $r < \lambda/2\pi\beta$. Синфазная мода в соответствии с [2, 3] разрушается первыми спиновыми модами ξ_1^+, ξ_1^- тогда, когда их амплитуды достигают значения 1. Бифурцирующие из нулевого состояния спиновые моды $\xi_1^{\mp}$ обретают устойчивость, преодолевая давление пары спиновых мод $\xi_0, \xi_2^{\pm}$. Начиная с $r = r_1^{\max} = \dfrac{\lambda}{\pi\beta}$ амплитуда спиновых мод $\xi_1^{\pm}$ при увеличении r монотонно убывает, оставаясь при этом больше единицы. Несложный анализ приводит к заключению, что спиновая мода ξ_1^+ подавляется парой спиновых мод ξ_2^+, ξ_4^+ при некотором значении r из промежутка $(3r_1^{\max}, 4r_1^{\max})$. Соответственно спиновая мода ξ_1^- подавляется парой спиновых мод ξ_2^-, ξ_4^-.

В ходе проведенного здесь анализа была выявлена следующая принципиальная особенность динамики бегущих волн задачи (1).

Принцип 1:2 взаимодействия бегущих волн. *Характер устойчивости бегущей волны* $\xi_n^{\pm}$ *определяется воздействиями на нее следующих пар бегущих волн*: $\xi_s^{\mp}$, $\xi_{2n+s}^{\pm}$, $s \geqslant 0$; $\xi_s^{\pm}$, $\xi_{2n-s}^{\pm}$, $0 \leqslant s \leqslant n$.

5. Квазинормальная форма и ее простые структуры. Для дальнейшего анализа автоколебаний задачи (1) воспользуемся, следуя [4, 5], методом квазинормальных форм.

Автоколебательные режимы задачи (1) будем искать в виде ряда

$$\xi = u_0(t,\tau,\theta) + \varepsilon u_1(t,\tau,\theta) + \ldots, \qquad \tau = \varepsilon t, \quad \theta = \frac{x}{r}, \tag{45}$$

где $u_j(t,\tau,\theta+2\pi) = u_j(t,\tau,\theta)$, $u_j(t+2\pi,\tau,\theta) = u_j(t,\tau,\theta)$, $j = 1,2,\ldots$, а

$$u_0(t,\tau,\theta) = v(\tau,\theta)\exp(it) + \overline{v}(\tau,\theta)\exp(-it). \tag{46}$$

Подставляя равенства (45), (46) в (1) и приравнивая коэффициенты при ε, для нахождения v получаем уравнение

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2\left[\dot{u}_0\Big(1 - \frac{4}{3}\dot{u}_0^2\Big) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{u}_0 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{u}_0 - \frac{\partial u_0^2}{\partial\tau\partial t}\right], \tag{47}$$

где точка означает дифференцирование по t, а переменные τ, θ рассматриваются как параметры.

Из условия разрешимости уравнения (47) в классе 2π-периодических по t функций следует, что v — решение краевой задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}v + v - 4|v|^2 v,\\ v(\tau, x + 2\pi r) = v(\tau, x), \qquad \overline{v}(\tau, x + 2\pi r) = \overline{v}(\tau, x),\end{gathered} \tag{48}$$

которая и является искомой квазинормальной формой.

Уравнение (48) при $\beta = 0$ является нелинейным уравнением с диффузией для комплексного параметра порядка [13]. Это уравнение среди потенциальных уравнений, т. е. имеющих при $\tau \to \infty$ лишь статистические, стационарные решения, является простейшим, каноническим.

Уравнение (48) будем далее рассматривать в пространстве $H^{1,c} \times H^{1,c}$, где $H^{1,c}$ — соболевское пространство $2\pi r$-периодических комплекснозначных функций.

Пусть $v(\tau, \theta)$ — некоторое решение задачи (48). Тогда относительно u_1 приходим к уравнению

$$\ddot{u}_1 + u_1 = i\frac{8}{3}\Big(v^3\exp(3it) - \overline{v}^3\exp(-3it)\Big), \tag{49}$$

решением которого является

$$u_1 = A_1\exp(it) +_1\exp(-it) - i\frac{1}{3}\Big(v^3\exp(3it) - \overline{v}^3\exp(-3it)\Big). \tag{50}$$

Здесь A_1 — гладкая по переменной τ функция, принимающая значения в пространстве $H^{1,c}$. Эта функция определяется на следующем этапе построения разложения (45), т. е. при построении $u_2(t, \tau, \theta)$. Функция $u_2(t, \tau, \theta)$ удовлетворяет уравнению вида (47), из условия разрешимости которого в классе периодических по t функций определяются A_1, B_1. Отметим теперь, что процесс последовательного построения разложения (45) неограниченно продолжим.

Анализ стационарных решений задачи (48) начнем с ее простейших решений

$$v = v_n^{\pm} = \alpha_n^{1/2}\exp\Big(\mp in\frac{x}{r}\Big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \alpha_n = \alpha_n(\rho) > 0, \tag{51}$$

где $\alpha_n(\rho)$ удовлетворяет равенству (3). Отметим, что решения $v_n^{\pm}$ порождает окружности $\big\{v_n^{\pm}\exp i\varphi, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big\}$ стационарных решений.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\alpha_n = \alpha_n(\rho) > 0$ для некоторого целого $n \geq 0$. Тогда для устойчивости решений $v_n^{\pm}(x, \rho)$ (48), удовлетворяющих равенству (51), необходимо и достаточно, чтобы:*

i) $2\alpha_n(\rho) - \alpha_s(\rho) > 0$, $\big(2\alpha_n(\rho) - \alpha_s(\rho)\big)\big(2\alpha_n(\rho) - \alpha_{2n+s}(\rho)\big) > \alpha_n^2(\rho)$ *для всех* $s \geq 0$;

ii) $2\alpha_n(\rho) - \alpha_s(\rho) > 0$, $\big(2\alpha_n(\rho) - \alpha_s(\rho)\big)\big(2\alpha_n(\rho) - \alpha_{2n-s}(\rho)\big) > \alpha_n^2(\rho)$ *для всех* $0 \leq s < n$.

Доказательство. Для анализа на устойчивость решения v_n^{+} задачи (48) рассмотрим линеаризованную задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta} + v - 2\alpha_n v - \alpha_n\exp(-2in\theta)\overline{v}, \quad \theta = \frac{x}{r},\\ v(\tau, x + 2\pi r) = v(\tau, x), \qquad \overline{v}(\tau, x + 2\pi r) = \overline{v}(\tau, x).\end{gathered} \tag{52}$$

Обратимся теперь к соответствующей ей спектральной задаче

$$\begin{gathered}\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta v+\frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}+v-2\alpha_n v-\alpha_n\exp(-2in\theta)\overline{v}=\mu v,\\ v(\tau,x+2\pi r)=v(\tau,x),\qquad \overline{v}(\tau,x+2\pi r)=\overline{v}(\tau,x).\end{gathered}\tag{53}$$

Рассматривая v и $\overline{v}$ как независимые переменные, приходим к заключению, что для целого $s\geq 0$ ее собственной функцией является

$$\mathrm{colon}(v,\overline{v})=\mathrm{colon}(\exp(i(s+n)\theta)a_s,\exp(i(s-n)\theta)b_s).\tag{54}$$

Здесь при $s>n$ вектор $\mathrm{colon}(a_s,b_s)$ — собственный вектор матрицы

$$B_s=\begin{pmatrix}\alpha_{s+n}-2\alpha_n & -\alpha_n\\ -\alpha_n & \alpha_{s-n}-2\alpha_n\end{pmatrix}.\tag{55}$$

Если $0\leq s<n$, то вектор $\mathrm{colon}(a_s,b_s)$ является собственным вектором матрицы

$$B_s=\begin{pmatrix}\alpha_{s+n}-2\alpha_n & -\alpha_n\\ -\alpha_n & \alpha_{n-s}-2\alpha_n\end{pmatrix}.\tag{56}$$

Пусть теперь $s<0$ целое. Тогда, используя равенство $\alpha_{-k}=\alpha_k$, $k>0$, приходим к заключению, что собственной функцией спектральной задачи (53) является

$$\mathrm{colon}(v,\overline{v})=\mathrm{colon}\big(\exp(i(s+n)\theta\big)b_s,\exp\big(i(s-n)\theta)a_s\big),\tag{57}$$

где $\mathrm{colon}(b_s,a_s)$ — собственный вектор матрицы B_{-s}.

Отсюда следует, что спектр задачи (53) состоит из собственных значений матриц B_s, $s=$ $=0,1,\ldots$. Ясно также, что все точки спектра задачи (53), кроме простых 0, $-2\alpha_n$, двукратны. Таким образом, согласно [10], устойчивость решения v_n^+ задачи (48) эквивалентна устойчивости семейства симметричных матриц B_s, $s=0,1,\ldots$. Условия i), ii) теоремы являются условиями устойчивости симметричных матриц B_s, $s=0,1,\ldots$.

Теорема доказана.

Критерий устойчивости стационарного решения $v_n^\pm$ задачи (48) допускает следующую интерпретацию.

Принцип 1:2 взаимодействия стационарных решений. *Характер устойчивости стационарного решения $v_n^\pm$ задачи* (48) *определяется воздействиями на нее следующих пар стационарных решений: $v_s^\mp$, $v_{2n+s}^\pm$, $s\geqslant 0$; $v_s^\pm$, $v_{2n-s}^\pm$, $0\leqslant s\leqslant n$.*

Заметим, что критерий устойчивости решений типа бегущих волн задачи (1), установленный в работе [6], такой же, как и доказанный здесь критерий устойчивости стационарных решений задачи (48). Следовательно, в данной работе установлено соответствие между решениями типа бегущих волн исходной задачи и стационарными решениями $v_n^\pm$ ее квазинормальной формы.

6. Двумерные торы квазинормальной формы. Рассмотрим вопрос о характере бифуркаций из окружности стационарных решений задачи (48), порожденной решением v_1^+. Указанная окружность рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 2. В силу теоремы 3 для устойчивости $v_1^+(x,\rho)$ необходимо, чтобы выполнялось условие $d_{1,0}(\rho)>0$. Здесь

$$d_{1,0}(\rho)=\big(2\alpha_1(\rho)-\alpha_0(\rho)\big)\big(2\alpha_1(\rho)-\alpha_2(\rho)\big)-\alpha_1^2(\rho).\tag{58}$$

Согласно формуле (3) условие $d_{1,0}(\rho) > 0$ приводит к неравенству

$$-5\mu^2 + 6\beta\mu + 2 - \beta^2 > 0, \quad \mu = \frac{1}{\rho}.$$

Отсюда следует, что индекс неустойчивости [14] стационарного решения v_1^+, т. е. размерность его неустойчивого многообразия, уменьшается на два порядка тогда, когда параметр ρ, возрастая, проходит через значение $\rho_{1,0}$, где

$$\rho_{1,0} = \frac{5}{3\beta + \sqrt{4\beta^2 + 10}}. \tag{59}$$

Таким образом, стационарное решение $v_1^+(x, \rho)$ задачи (48) при $\rho_{1,0} = \rho_{1,0}(\beta)$ обретает устойчивость.

Перейдем теперь к вопросу о потере устойчивости стационарного решения v_1^+ задачи (48). В силу теоремы 3 для устойчивости решения $v_1^+(x, \rho)$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $d_{1,2}(\rho) > 0$. Здесь

$$d_{1,2} = d_{1,2}(\rho) = \big(2\alpha_1(\rho) - \alpha_2(\rho)\big)\big(2\alpha_1(\rho) - \alpha_4(\rho)\big) - \alpha_1^2(\rho). \tag{60}$$

Используя, как и выше, формулу (3), приходим к следующему заключению. Уравнение $d_{1,2}(\rho) = 0$ имеет простой положительный корень $\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(\beta)$. Следовательно, стационарное решение v_1^+ задачи (48) теряет устойчивость тогда, когда параметр ρ проходит значение $\rho_{1,2}$, возрастая. При этом максимальная точка спектра геометрической кратности 2 решения v_1^+ проходит, убывая, через нуль.

Итак, существуют такие $\rho_{1,0}(\beta) < \rho_{1,2}(\beta)$, что: 1) если параметр ρ проходит через $\rho_{1,0}$, возрастая, то решение v_1^+ обретает устойчивость; 2) в точке $\rho_{1,2}$ решение v_1^+ устойчивость теряет.

Остановимся вначале на характере устойчивости решения v_1^+. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Предположим, что выполняется неравенство*

$$c_{1,0} = \big[(3\alpha_1^4 + 8\alpha_1^3(\alpha_0 - 2\alpha_1) + 8\alpha_1^2(\alpha_0 - 2\alpha_1)^2 + \\ + 8\alpha_1(\alpha_0 - 2\alpha_1)^3 + 3(\alpha_0 - 2\alpha_1)^4)(\alpha_1^2 + (\alpha_0 - 2\alpha_1)^2)^{-1}\big]_{\rho=\rho_{1,0}} > 0. \tag{61}$$

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < \rho - \rho_{1,0} < \delta$ задача (48) *имеет двумерный тор стационарных решений*

$$\mathcal{T}_{1,0}^+(\rho) = \big\{\exp(i\psi)v_{1,0}^+(\theta + \varphi, \rho), \psi, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big\}, \quad \theta = \frac{x}{r},$$

где

$$2v_{1,0}^+ = \alpha_1^{1/2}\exp(-i\theta) + \left(\frac{-d_{1,0}(\rho)}{-(4\alpha_1 - \alpha_0 - \alpha_2)c_{1,0}}\right)^{1/2} \times \\ \times (\alpha_1 + (\alpha_0 - 2\alpha_1)\exp(-2i\theta)) + O\big(|\rho - \rho_{1,0}|\big). \tag{62}$$

Здесь $d_{1,0}(\rho)$ удовлетворяет равенству (58).

Двумерный тор $\mathcal{T}_{1,0}^+(\rho)$ неустойчив.

Доказательство этой теоремы опустим. Отметим, что ее доказательство следует той же схеме, что и доказательство следующей теоремы.

Теорема 5. *Предположим, что выполняется неравенство*

$$c_{1,2} = \Big[(3\alpha_1^4 + 8\alpha_1^3(\alpha_2 - 2\alpha_1) + 8\alpha_1^2(\alpha_2 - 2\alpha_1)^2 +$$

$$+8\alpha_1(\alpha_2 - 2\alpha_1)^3 + 3(\alpha_2 - 2\alpha_1)^4)(\alpha_1^2 + (\alpha_2 - 2\alpha_1)^2)^{-1}\Big]_{\rho=\rho_{1,2}} < 0. \qquad (63)$$

Тогда существует $\delta > 0$ *такое, что при* $0 < \rho_{1,2} - \rho < \delta$ *задача* (48) *имеет двумерный тор стационарных решений*

$$\mathcal{T}_{1,2}^{+}(\rho) = \big\{ \exp(i\psi) v_{1,2}^{+}(\theta + \varphi, \rho), \psi, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \big\}, \quad \theta = \frac{x}{r},$$

где

$$2v_{1,2}^{+} = \alpha_1^{1/2} \exp(i\theta) +$$

$$+ \left(\frac{-d_{1,2}(\rho)}{-(4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4)c_{1,2}} \right)^{1/2} \Big(\alpha_1 \exp(-2i\theta) + (\alpha_2 - 2\alpha_1) \exp(4i\theta) \Big) + O(\rho_{1,2} - \rho). \qquad (64)$$

Здесь $d_{1,2}(\rho)$ *удовлетворяет равенству* (60).

Двумерный тор $\mathcal{T}_{1,2}^{+}(\rho)$ *стационарных решений экспоненциально орбитально устойчив.*

Доказательство. Воспользуемся методом центральных многообразий [10, 15, 16], проведя его в несколько этапов. На первом этапе построим решения задачи (48) в виде

$$v = \frac{1}{2} \sum_{k=1,-2,4} z_k \exp(ik\theta) + \sigma_3(z, \overline{z}, \theta) + \sigma_5(z, \overline{z}, \theta) + \ldots . \qquad (65)$$

Здесь $z = (z_1, z_{-2}, z_4)$, $\sigma_s(z, \overline{z}, \theta)$, $s = 3, 5, \ldots,$ — формы степени s относительно z, $\overline{z}$ такие, что

$$\mathcal{P}_k \sigma_s = 0, \qquad k = 1, -2, 4, \quad s = 3, 5, \ldots . \qquad (66)$$

При этом z — решение системы

$$z_k' = \alpha_k z_k + g_{k,3}(z, \overline{z}) + g_{k,5}(z, \overline{z}) + \ldots, \quad k = 1, -2, 4, \qquad (67)$$

где штрих означает производную по τ. Подставим (65), (67) в уравнение (48). Приравняв затем формы третьей степени, относительно σ_3 получим уравнение

$$\sum_{s=1,-2,4} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial z_s} z_s + \frac{\partial \sigma_3}{\partial \overline{z_s}} \overline{z_s} \right) \alpha_s + \sum_{k=1,-2,4} g_{k,3} \exp(ik\theta) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta\sigma_3 + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta}\sigma_3 + \sigma_3 - \left| \sum_{k=1,-2,4} z_k \exp(ik\theta) \right|^2 \sum_{k=1,-2,4} z_k \exp(ik\theta). \qquad (68)$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $\exp(ik\theta)$, $k = 1, -2, 4$, были равны. Этот критерий приводит к однозначному определению $g_{k,3}$, $k = 1, -2, 4$. Далее, находим σ_3 из уравнения (68) в том виде, какова его неоднородность.

Подставим теперь найденные $g_{k,3}$, $k = 1, -2, 4$, в систему (67) и опустим слагаемые, порядок малости которых выше третьего. Положим затем $z_{-2} = z_2$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1\big(\alpha_1 - |z_1|^2 - 2|z_2|^2 - 2|z_4|^2\big) - 2\overline{z_1}z_2z_4, \\ z_2' &= z_2\big(\alpha_2 - 2|z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_4|^2\big) - z_1^2\overline{z_4}, \\ z_4' &= z_4\big(\alpha_4 - 2|z_1|^2 - 2|z_2|^2 - |z_4|^2\big) - z_1^2\overline{z_2}. \end{aligned} \tag{69}$$

Эта система имеет гладкую по параметру ρ ветвь стационарных решений $(\alpha_1^{1/2}, 0, 0)$, которая в силу S^1-эквивариантности системы (69) порождает окружность стационарных решений $\big\{(\exp i\varphi\alpha_1^{1/2}, 0, 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big\}$. Ее матрица устойчивости является блочно-диагональной:

$$A_{1,2} = \mathrm{diag}(B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,2}).$$

Здесь

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \qquad B_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 - 2\alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_4 - 2\alpha_1 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Спектр матрицы $A_{1,2}$ содержит простую нулевую точку. Легко видеть, что одно собственное значение матрицы $A_{1,2}$ геометрической кратности два проходит слева направо через нуль, если параметр ρ проходит значение $\rho_{1,2}$, возрастая. Для исследования характера ветвления решения $(\alpha_1^{1/2}, 0, 0)$ системы (69) обратимся к соответствующей ей овеществленной системе. Затем в ней выполним преобразование $z_1 = \alpha_1^{1/2} + x_1$, $z_k = x_k$, $k = 2, 4$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} x_1' &= -2\alpha_1x_1 - 3\alpha_1^{1/2}x_1^2 - 2\alpha_1^{1/2}\big(x_2^2 + x_4^2 + x_2x_4\big) + O\big(|x|^3\big), \\ x_2' &= x_2(\alpha_2 - 2\alpha_1) - \alpha_1x_4 + x_2\big(-4\alpha_1^{1/2}x_1 - 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_4^2\big) - 2\alpha_1^{1/2}x_1x_4 - x_1^2x_4, \\ x_4' &= -\alpha_1x_2 + x_4(\alpha_4 - 2\alpha_1) + x_4\big(-4\alpha_1^{1/2}x_1 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - x_4^2\big) - 2\alpha_1^{1/2}x_1x_2 - x_1^2x_2. \end{aligned} \tag{71}$$

Нулевое решение этой системы при увеличении ρ и его прохождении через значение $\rho_{1,2}$ теряет устойчивость. При этом его простое максимальное собственное значение проходит с ненулевой скоростью через нуль. Несложный анализ приводит к следующему заключению. Существует инвариантное многообразие системы (71), представимое в виде

$$\alpha_1^{1/2}x_1 = -x_2^2 - x_4^2 - x_2x_4 + O\big(|(x_2, x_4)|^3\big). \tag{72}$$

Рассмотрим ограничение системы (71) на этом инвариантном многообразии:

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2(\alpha_2 - 2\alpha_1) - \alpha_1x_4 + x_2\big(3x_2^2 + 2x_4^2 + 4x_2x_4\big) + 2\big(x_2^2 + x_4^2 + x_2x_4\big)x_4 + o\big(|(x_2, x_4)|^3\big), \\ x_4' &= -\alpha_1x_2 + x_4(\alpha_4 - 2\alpha_1) + x_4\big(2x_2^2 + 3x_4^2 + 4x_2x_4\big) + 2\big(x_2^2 + x_4^2 + x_2x_4\big)x_2 + o\big(|(x_2, x_4)|^3\big). \end{aligned} \tag{73}$$

Построим теперь центральное многообразие системы (73) при $\rho = \rho_{1,2}$, касательное в нуле к критическому пространству $\mathrm{Span}\{h^{(1)}\}$, где

$$h^{(1)} = \mathrm{colon}(\alpha_1, \alpha_2 - 2\alpha_1)_{\rho=\rho_{1,2}}, \tag{74}$$

в виде

$$\mathrm{colon}(x_2, x_4) = sh^{(1)} + s^3 h^{(3)} + s^5 h^{(5)} + \ldots . \tag{75}$$

Ограничение системы (73) при $\rho = \rho_{1,2}$ на ее центральном многообразии приводит к уравнению

$$s' = c_1 s^3 + c_3 s^5 + \ldots . \tag{76}$$

Здесь $c_k,\ k = 1, 3, \ldots,$ — подлежащие определению постоянные. Подставим ряды (75), (76) в (73) и приравняем затем коэффициенты при одинаковых степенях s. В результате относительно $h^{(3)}$ получим уравнение

$$B_{1,2}(\rho_{1,2})h^{(3)} = -c_1 h^{(1)} + b^{(3)}, \tag{77}$$

в котором матрица $B_{1,2}$ удовлетворяет равенству (70), а $b^{(3)}$ — равенству

$$b^{(3)} = \mathrm{colon}((3\alpha_1^3 + 6\alpha_1^2(\alpha_2 - 2\alpha_1) + 4\alpha_1(\alpha_2 - 2\alpha_1)^2 + 2(\alpha_2 - 2\alpha_1)^3,$$

$$2\alpha_1^3 + 4\alpha_1^2(\alpha_2 - 2\alpha_1) + 6\alpha_1(\alpha_2 - 2\alpha_1)^2 + 3(\alpha_2 - 2\alpha_1)^3)_{\rho=\rho_{1,2}}. \tag{78}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (77) является ортогональность его неоднородности вектору $h^{(1)}$. Отсюда следует равенство $c_1 = c_{1,2}$, где постоянная $c_{1,2}$ определена формулой (63). При этом уравнение (77) имеет единственное ортогональное вектору $h^{(1)}$ решение $h^{(3)}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$B_{1,2}(\rho_{1,2})h^{(5)} = c_3 h^{(1)} - b^{(5)}. \tag{79}$$

Условие его разрешимости приводит к однозначному определению постоянной c_3. Затем находим вектор $h^{(5)}$, ортогональный вектору $h^{(1)}$.

Как известно [10], процесс последовательного построения коэффициентов разложений (75), (76) неограниченно продолжим. Полученные при этом ряды являются асимптотически сходящимися.

Обратимся теперь к однопараметрическому семейству уравнений (73). В силу принципа сведения [10, 15, 16] динамика указанного семейства в окрестности точки бифуркации определяется семейством уравнений на прямой

$$s' = -d_{1,2}(\rho)(4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4)^{-1}(\rho_{1,2})s + c_{1,2}s^3. \tag{80}$$

В этом семействе уравнений реализуется суперкритическая бифуркация типа вилки и от его нулевого решения при $\rho = \rho_{1,2}$ ответвляются два стационарных решения

$$s^{\pm}(\rho) = \pm\left(\frac{-d_{1,2}(\rho)}{-(4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4)(\rho)c_1}\right)^{1/2}. \tag{81}$$

Следовательно, в однопараметрическом семействе уравнений (73) при $\rho = \rho_{1,2}$ от нулевого решения ответвляются два устойчивых стационарных решения

$$s^{\pm} = \pm\left(\frac{-d_{1,2}}{-c_{1,2}}\right)^{1/2} h^{(1)} + O\big((\rho - \rho_{1,2})^{1/2}\big). \tag{82}$$

Для системы (69) это означает, что от окружности стационарных решений $\big\{\exp(i\psi)(\alpha_1^{1/2}, 0, 0), \psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big\}$ при $\rho = \rho_{1,2}$ ответвляется двумерный тор стационарных решений

$$\Big\{\exp(i\psi)(\exp(i\varphi)(\alpha_1^{1/2}+O\big((\rho-\rho_{1,2})\big),\ \exp(-2i\varphi)\left(\frac{-d_{1,2}}{-c}\right)^{1/2}\alpha_1+O((\rho-\rho_{1,2}^{3/2}),$$

$$\exp(4i\varphi)\left(\frac{-d_{1,2}}{-c}\right)^{1/2}(\alpha_2-\alpha_1)+O\big((\rho-\rho_{1,2})^{3/2}\big),\ \psi,\varphi\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\Big\}. \qquad (83)$$

Перейдем теперь к исследованию устойчивости этого тора стационарных решений системы (69). С этой целью построим двупараметрическое семейство решений системы (69) при критическом значении параметра $\rho=\rho_{1,2}$ в виде

$$\mathrm{colon}(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_4},\overline{z_2},z_4)=\alpha_1^{1/2}(\rho_{1,2})h_{(0)}+sh_{(1)}+\overline{s}h_{(2)}+g_2\big((s,\overline{s})\big)+g_3\big((s,\overline{s})\big)+\ldots. \qquad (84)$$

Здесь $h_{(0)}=\mathrm{colon}(1,1,0,0,0,0)$, $h_{(1)}=\mathrm{colon}(0,0,\alpha_1(\rho_{1,2}),(\alpha_2-2\alpha_1)(\rho_{1,2}),0,0)$, $h_{(2)}=$ $=\mathrm{colon}(0,0,0,0,\alpha_1(\rho_{1,2}),(\alpha_2-2\alpha_1)(\rho_{1,2}))$, $g_k(s,\overline{s})$, $k=2,3,\ldots,$ — формы степени k относительно $(s,\overline{s})$, а переменная s удовлетворяет уравнению

$$s'=f_2(s,\overline{s})+f_3(s,\overline{s})+\ldots. \qquad (85)$$

В этом уравнении $f_k(s,\overline{s})$ $k=2,3,\ldots,$ — формы степени k. Переменная $\overline{s}$ удовлетворяет, разумеется, комплексно-сопряженному уравнению. Подставим ряды (84), (85) в (69) и приравняем затем коэффициенты при одинаковых степенях s. В результате относительно g_2 получим уравнение

$$A_{1,2}g_2=$$
$$=-h_{(1)}f_2-h_{(2)}\overline{f_2}+s\overline{s}\big(\alpha_1^{1/2}(\alpha_1^2+(\alpha_2-2\alpha_1)^2+\alpha_1(\alpha_2-2\alpha_1))\big)(\rho_{1,2})\big(\mathrm{colon}(1,1,0,0,0,0,0)\big), \qquad (86)$$

где $hf_2=h_{(1)}f_{2,1}+h_{(1)}f_{2,2}$, $f_2=(f_{2,1},f_{2,2})$. Уравнению (86) при $f_2=0$ удовлетворяет квадратичная форма

$$g_2=-s_1s_2\alpha_1^{-1/2}(\alpha_1^2+(\alpha_2-2\alpha_1)^2+\alpha_1(\alpha_2-2\alpha_1))\big(\mathrm{colon}(1,1,0,0,0,0,0)\big). \qquad (87)$$

Здесь, разумеется, $\alpha_k=\alpha_1(\rho_{1,2})$, $k=1,2$. Рассмотрим теперь уравнение относительно g_3:

$$A_{1,2}g_3=-h_{(1)}f_3-h_{(2)}\overline{f_3}+G_3. \qquad (88)$$

Условием разрешимости этого уравнения является ортогональность его неоднородности вектору $h_{(1)}$. Отсюда следует равенство

$$f_3(s,\overline{s})=\mathrm{colon}\big(F_3(s,\overline{s}),\overline{F_3}(s,\overline{s})\big), \qquad (89)$$

где

$$F_3(s)=c_{1,2}s^3\overline{s}. \qquad (90)$$

Возвращаясь теперь к однопараметрическому семейству уравнений (69), приходим к заключению, что ее нормальной формой в окрестности точки бифуркации $(\rho_{1,2},\alpha_1^{1/2},0,0)$ является система

$$s'=-d_{1,2}(\rho)(4\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4)^{-1}(\rho_{1,2})s+c_{1,2}s^2\overline{s}. \qquad (91)$$

Пусть параметр ρ проходит через значение $\rho_{1,2}$, возрастая. Тогда, очевидно, одно собственное значение геометрической кратности для нулевого решения системы (91) переходит с ненулевой скоростью с отрицательной на положительную ось. При этом от нулевого решения системы (91) ответвляется экспоненциально орбитально устойчивая окружность стационарных точек $|s|^2 = \dfrac{-d_{1,2}}{-(4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4)(\rho_{1,2})c_{1,2}}$. Учтем теперь равенство (73). В результате убеждаемся в справедливости теоремы.

Остановимся на условии теоремы 4 о величине $c_{1,0} = c_{1,0}(\beta)$. Проведенные численные расчеты дают основания для следующего заключения: $c_{1,0}(\beta) > 0$ — монотонно возрастающая функция β. Критическое же значение $\alpha_1\big((\rho_{1,0}(\beta)\big)$ — монотонно убывающая функция β, которая при $\beta \to \infty$ стремится к $\dfrac{1}{2}$. Приведем несколько примеров: 1) $\beta = 1$, $\rho_{1,0} = 0{,}741658$, $\alpha_1(\rho_{1,0}) = 0{,}53033$, $c_{1,0} = 0{,}604694$; 2) $\beta = 3$, $\rho_{1,0} = 0{,}31681$, $\alpha_1(\rho_{1,0}) = 0{,}50612$, $c_{1,0} = 0,719662$.

Итак, включение окружности стационарных решений v_1^+ в класс устойчивых режимов сопровождается ветвлением из нее двумерного неустойчивого тора стационарных решений.

Перейдем теперь к вопросу о реализуемости условия теоремы 5 о знаке c_{12}. Согласно численным расчетам $c_{1,2} = c_{1,2}(\beta) < 0$, причем $-c_{12}(\beta)$ — монотонно возрастающая функция β. Функция $\rho_{12} = \rho_{12}(\beta)$ монотонно убывает. Критическое же значение $\alpha_1\big((\rho_{12})(\beta)\big)$ — монотонно возрастающая функция β. Приведем несколько результатов численных расчетов: 1) $\beta = 0,5$, $\rho_{1,2} = 8,98653$, $c_{1,2} = -1,06825$; 2) $\beta = 1$, $\rho_{1,2} = 4,4753$, $c_{1,2} = -1,27713$; 3) $\beta = 3$, $\rho_{1,2} = 1,46139$, $c_{1,2} = -3,94639$.

Итак, в силу теоремы 4 от теряющей устойчивость окружности v_1^+ стационарных решений ответвляется двумерный устойчивый тор стационарных решений.

Заметим, что интервал устойчивости стационарного решения $v_1^+(\beta)$ с ростом β сужается.

7. Автомодельные периодические структуры. Проведенный в двух предыдущих пунктах анализ позволяет ответить на вопрос о характере бифуркаций из бегущей волны $\tilde{\xi}_1^+$ задачи (1). В силу теоремы 1 решение ξ_1^+ обретает устойчивость при увеличении параметра ρ и его прохождении через значение $\rho_{1,0}$. На промежутке $(\rho_{1,0}, \rho_{1,2})$ периодическое решение ξ_1^+ экспоненциально орбитально устойчиво. Решение ξ_1^+ теряет устойчивость в точке $\rho_{1,2}$.

Для ответа на вопрос о характере бифуркации ξ_1^+ при увеличении параметра ρ и его прохождении через значение $\rho_{1,0}$ рассмотрим разложение (45), в котором положим $v(\tau,\theta) = v_{1,0}^+(\theta)$, где $v_{1,0}^+(\theta)$ удовлетворяет (64). В результате заключаем, что функция

$$\xi_{1,0}^+(t,\theta) = \alpha_1^{1/2}\cos(t-\theta) + \left(\frac{-d_{1,0}(\rho)}{-(4\alpha_1 - \alpha_0 - \alpha_2)c_{1,0}}\right)^{1/2}(\alpha_1 + \cos(t-2\theta)$$

удовлетворяет исходной задаче с точностью порядка ε, $\rho - \rho_{1,0}$ по невязке.

Можно, разумеется, построить приближенное, бифурцирующее из ξ_1^+ решение с точностью порядка ε^2 по невязке. Последнее позволяет использовать для доказательства существования периодического решения развитую в [12] методику (см. также [5]) и доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Предположим, что выполняется неравенство* $c_{1,0} > 0$, *где* $c_{1,0}$ *удовлетворяет равенству* (63). *Тогда существуют* $\delta > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < \rho - \rho_{1,0} < \delta$ *задача* (1) *имеет двумерный тор периодических решений*

$$T^+_{1,0}(\rho) = \left\{\xi^+_{1,0}(\omega_{1,0}(t+s), (\theta+\varphi), \rho),\ s, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right\}, \quad \theta = \frac{x}{r},$$

где

$$\xi^+_{1,0}(t,\theta) = \alpha_1^{1/2}\cos(t-\theta) + \left(\frac{-d_{1,0}(\rho)}{-(4\alpha_1-\alpha_0-\alpha_2)c_{1,0}}\right)^{1/2}(\alpha_1 + \cos(t-2\theta) + O(\epsilon, |\rho-\rho_{1,0}|),$$

$$\omega_{1,0} = 1 + O(\epsilon^2, |\rho-\rho_{1,0}|).$$

Здесь $d_{1,0}(\rho)$ *удовлетворяет равенству* (58).

Тор $T^+_{1,0}(\rho)$ *неустойчив.*

Рассуждая, как и выше, приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Предположим, что выполняется неравенство* $c_{1,2} < 0$, *где* $c_{1,0}$ *удовлетворяет равенству* (63.) *Тогда существуют* $\delta > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < \rho - \rho_{1,0} < \delta$ *задача* (1) *имеет двумерный тор периодических решений*

$$T^+_{1,2}(\rho) = \left\{\xi^+_{1,2}(\omega_{1,2}(t+s), (\theta+\varphi), \rho),\ s, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right\}, \quad \theta = \frac{x}{r},$$

где

$$\xi^+_{1,2}(t,\theta) = \alpha_1^{1/2}\cos(t-\theta) + \left(\frac{-d_{1,2}(\rho)}{-(4\alpha_1-\alpha_0-\alpha_2)c_{1,2}}\right)^{1/2}(\alpha_1\cos(t-2\theta)+$$

$$+(\alpha_2 - 2\alpha_1)\cos(t+4\theta) + O(\epsilon, |\rho-\rho_{1,0}|), \omega_{1,2} = 1 + O(\epsilon^2, |\rho-\rho_{1,0}|).$$

Здесь $d_{1,2}(\rho)$ *удовлетворяет равенству* (60).

Тор $T^+_{1,2}(\rho)$ *экспоненциально орбитально устойчив.*

Заключение. Высокомодовая буферность уравнения была установлена в работе авторов [6]. Выявлена и причина зтого феномена — особый тип взаимодействия бегущих волн, сформулированный в форме принципа 1:2. Напомним, что вопрос о взаимодействии бегущих волн в исходной задаче был поставлен в работе [2] для решения задачи об устойчивости бегущей волны с волновым числом n. Ответом на указанный вопрос можно считать установленное в [2] необходимое условие устойчивости n-бегущей волны. Отметим теперь, что принцип 1:2 взаимодействия бегущих волн для случая синфазной волны соответствует утверждению из обзорной работы [3] о том, что синфазная волна подавляется первыми, вторыми и т. д. спиновыми волнами. Таким образом, есть основания рассматривать этот принцип в качестве распространения на общий случай приведенного утверждения из работы [3].

Полученные в данной работе результаты исследования на устойчивость пространственно неоднородных решений уравнения (48), результаты по исследованию на устойчивость бегущих волн в [17 – 19] дают основания для следующего заключения. Принцип 1:2 взаимодействия бегущих волн отражает универсальное свойство бегущих волн параболических уравнений с малой диффузией.

Согласно теореме 7 от теряющей устойчивость первой бегущей волны ответвляется устойчивый 2-тор автомодельных периодических решений. Есть основания предполагать, что и от каждой теряющей устойчивость бегущей волны ответвляется устойчивый 2-тор автомодельных периодических решений. В отличие от бегущих волн, сохраняющих квазигармоническую форму при увеличении параметра ρ, автомодельные периодические решения представляют значительно более сложные по форме структуры. Вопрос о судьбе этих устойчивых при рождении структур при отходе параметра ρ от соответствующего бифуркационного значения представляет значительный интерес.

Задача о характере потери устойчивости бегущих волн в системах параболических уравнений с малыми коэффициентами диффузии рассматривалась в монографии [5] (см. гл. 4, 20.4). В ней построена квазинормальная форма исходной задачи в окрестности бегущей волны. В соответствии с теоремой 20.3 [5] грубому состоянию равновесия (циклу) ее квазинормальной формы соответствует двумерный (трехмерный) инвариантный тор исходной задачи. В предложенном в данной работе подходе по анализу бифуркаций из бегущих волн использован универсальный характер взаимодействия бегущих волн.

1. *Алдушин А. П., Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.* К феноменологической теории спинового горения // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 5. – С. 1102 – 1106.
2. *Алдушин А. П., Маломед Б. А.* Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения // Физика горения и взрыва. – 1981. – **17**, № 1. – С. 3 – 12.
3. *Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.* Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах // Изв. вузов. Радиофизика. – 1982. – **15**, № 6. – С. 591 – 618.
4. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в теории горения // Докл. АН. – 2004. – **396**, № 2. – С. 170 – 173.
5. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.
6. *Самойленко А. М., Белан Е. П.* Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения // Докл. АН. – 2006. – **406**, № 6. – С. 738 – 741.
7. *Bayliss A., Matkowsky B. J., Aldushin A. P.* Dynamics of hot spots in solid fuel combustion // Physica D. – 2002. – **166**. – P. 114 – 130.
8. *Ивлева Т П., Мержанов А. Г.* Представление о режимах распространения твердого пламени // Докл. АН. – 2003. – **378**, № 1. – С. 62 – 64.
9. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: Наука, 2007. – 484 с.
10. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
12. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 4. – С. 488 – 499.
13. *Гапонов-Грехов А. В. , Ломов А. С. , Осипов Г. В., Рабинович М. И.* Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных системах // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. – 1989. – С. 61 – 73.
14. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 296 с.
15. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 4. – С. 1297 – 1324.
16. *Марсден Дж, Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
17. *Белан Е. П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. мат. физики, анализа, геометрии. – 2005. – **1**, № 1. – С. 3 – 34.
18. *Шиян О. В.* О динамике бегущих волн в системе уравнений Ван-дер-Поля с малой диффузией // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 27 – 32.
19. *Шиян О. В.* О динамике бегущих волн в системе уравнений вандерполевского типа с малой диффузией // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2008. – **16**. – С. 208 – 222.

Получено 21.12.12