УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

К ТЕОРИИ ГИПЕР Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ

We show that if a homeomorphism f of a domain $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, is a hyper Q-homeomorphism with $Q \in L^1_{\text{loc}}$, then $f \in ACL$. As a consequence, this homeomorphism has almost everywhere partial derivatives and an approximate differential.

Показано, що якщо гомеоморфізм f області $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, є гіпер Q-гомеоморфізмом з $Q \in L^1_{\text{loc}}$, то $f \in ACL$. Як наслідок, такий гомеоморфізм має майже скрізь частинні похідні й апроксимативний диференціал.

1. Введение. В последнее время появилось много исследований, посвященных отображениям с конечным искажением (см., например, [1, 2]). Настоящая статья восполняет имевшийся пробел в развитии метода модулей семейств поверхностей, который мало использовался даже в рамках квазиконформной теории вследствие его сложности (см., например, [3, 4]). Недавно [5] было показано, что так называемые отображения с конечным искажением площади в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяют аналогу известного модульного неравенства Полецкого для гиперповерхностей, т. е. поверхностей размерности $n-1$ [6]. Поэтому возникла необходимость изучать классы гипер $Q(x)$-гомеоморфизмов, выделяемых этим модульным неравенством. Для сравнения, имея в виду важную роль модульной техники в современных классах отображений, профессор Олли Мартио предложил к исследованию следующий класс отображений (см., например, [7, 8]).

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q\colon D \to [1,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\varrho^n(x)\,dm(x)$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Теория Q-гомеоморфизмов естественным образом связана с теорией модулей с весом (см., например, [9]).

Напомним, что борелева функция $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для Γ (пишем $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int\limits_\gamma \varrho\,ds \geqslant 1$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства Γ есть величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \varrho^n(x)\,dm(x)\,.$$

В работе [10] введен в рассмотрение следующий класс отображений. Гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ называется *гипер Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Sigma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\varrho^n(x)\,dm(x)$$

для любого семейства Σ $(n-1)$-мерных поверхностей S в D и любой допустимой функции ϱ. Борелева функция $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ является допустимой для Σ, если

© Д. А. КОВТОНЮК, 2010

$$\int\limits_S \varrho^{n-1}\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для всех $S \in \Sigma$, где $d\mathcal{A}$ соответствует мере площади на поверхности S.

В работе [11] доказана абсолютная непрерывность на линиях Q-гомеоморфизмов с локально интегрируемой функцией Q. В данной статье доказывается абсолютная непрерывность на линиях гипер Q-гомеоморфизмов при условии локальной суммируемости функции Q.

2. Предварительные замечания. Обозначим через H^k, $k = 1, \ldots, n-1$, *k-мерную хаусдорфову меру* в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Точнее, если E — множество из $\mathbb{R}^n$, то

$$H^k(E) = \sup_{\varepsilon > 0} H^k_\varepsilon(E)\,,$$

$$H^k_\varepsilon(E) = \Omega_k \inf \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\delta_i}{2}\right)^k \,,$$

где инфимум берется по всем счетным наборам чисел $\delta_i \in (0, \varepsilon)$ таким, что некоторые множества $E_i \subset \mathbb{R}^n$ с диаметрами $d(E_i) = \delta_i$ покрывают множество E. Здесь Ω_k — объем единичного шара в $\mathbb{R}^k$.

Пусть ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$, число прообразов

$$N(S, y) = N(S, y, \omega) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega :\ S(x) = y\}$$

— *функцией кратности* поверхности S в точке $y \in \mathbb{R}^n$. Известно, что функция кратности полунепрерывна снизу, т. е.

$$N(S, y) \ \geqslant\ \liminf_{m \to \infty} N(S, y_m)$$

для любой последовательности $y_m \in \mathbb{R}^n$ такой, что $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$ (см. [12, с. 160]). Таким образом, функция $N(S, y)$ является борелевской и поэтому измерима относительно любой меры Хаусдорфа H^k [13, с. 52].

k-Мерная хаусдорфова площадь в $\mathbb{R}^n$, или просто *площадь*, ассоциированная с поверхностью $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, определяется формулой

$$\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}^k_S(B) := \int\limits_B N(S, y)\, dH^k y$$

для произвольного борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^n$ и, более общо, для произвольного множества, измеримого относительно H^k в $\mathbb{R}^n$. Поверхность S называется *квадрируемой*, если $\mathcal{A}_S(\mathbb{R}^n) < \infty$.

Если $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — борелевская функция, то ее *интеграл по* S определяется равенством

$$\int\limits_S \varrho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\, N(S, y)\, dH^k y\,.$$

Борелевская функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Σ k-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$ (пишем $\varrho \in \operatorname{adm}\Sigma$), если

$$\int\limits_S \varrho^k \, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для всех поверхностей $S \in \Sigma$. *Конформным модулем* семейства Σ называется величина

$$M(\Sigma) = \inf_{\varrho \in \mathrm{adm}\,\Sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^n(x)\, dm(x)\,.$$

3. Обобщенные производные и ACL-отображения. Рассмотрим два различных подхода к введению одного класса отображений в $\mathbb{R}^n$. Первый подход связан с понятием обобщенных производных в смысле С. Л. Соболева. Говорят, что вещественная функция v в области $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет компактный носитель, если $v(x) \equiv 0$ вне некоторого компакта $C \subset D$. Обозначим через $C^l(D)$, где l — натуральное число, класс функций $v\colon D \to \mathbb{R}$, l раз непрерывно дифференцируемых в D, а через $C_0^l(D)$ подкласс функций в $C^l(D)$ с компактным носителем.

Известно, что если $u \in C^l(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int\limits_D \left(u \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{l+1} v \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) dx = 0\,,$$

где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = l$, для любой вещественной функции $v \in C_0^l(D)$. Если же о существовании частных производных функции u, локально интегрируемой в D, ничего не известно и существует функция $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, удовлетворяющая равенству

$$\int\limits_D \left(u \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{l+1} v \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \right) dx = 0$$

для любой функции $v \in C_0^l(D)$, то функция $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ называется *обобщенной производной в смысле Соболева* порядка l функции u в области D, которая также обозначается как $\dfrac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение. Говорят, что f *принадлежит классу* $W^{1,p}$, $p \geqslant 1$, если координатные функции $f_1, \ldots, f_n$ вектор-функции f имеют обобщенные производные в смысле Соболева, интегрируемые со степенью p в области D.

Рассмотрим теперь второй подход к введению отображений класса $W^{1,p}$, чаще используемый в зарубежной литературе. Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n\colon a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ — открытый n-мерный интервал. Говорят, что отображение $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL (или *абсолютно непрерывно на линиях*), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I, параллельных координатным осям. Более точно, пусть $P_i(x) = x - x_i e_i$ — ортогональная проекция. Тогда для множества E_i всех точек $x \in P_i(I)$ таких, что отображение $t \to f(x + te_i)$ не абсолютно непрерывно на интервале (a_i, b_i), $m_{n-1}(E_i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Если D — область в $\mathbb{R}^n$, то говорят, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACL, когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала $I, \overline{I} \subset D$. Если D и D' — области в $\overline{\mathbb{R}^n}$, то гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ *принадлежит классу* ACL, когда сужение $f|_{D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}}$ принадлежит классу ACL.

Известно, что если отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ непрерывно в D и $f \in ACL$, то частные производные отображения f существуют почти всюду в D и являются борелевскими функциями.

Говорят, что отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ класса ACL *принадлежит классу* ACL^p, $p \geqslant 1$, если частные производные f интегрируемы в D со степенью p. Известно (см., например, [14]), что классы ACL^p и $W^{1,p}$ отображений $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ совпадают.

Теорема. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f\colon D \to D'$ — гипер Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда $f \in ACL$.*

Доказательство. Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n\colon a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — n-мерный интервал в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{I} \subset D$. Тогда $I = I_0 \times J$, где $J = (a_n, b_n)$, $I_0 = P_n(I)$, $P_n(x) = x - x_n e_n$ — ортогональная проекция. Положим $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, тогда $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$. Необходимо доказать, что для почти всех $x' \in I_0$ отображение $t \to f(x' + te_n)$ абсолютно непрерывно по $t \in (a_n, b_n)$.

Действительно, пусть r_l и ρ_l, $l = 1, 2, \ldots,$ — любая перенумерация всех пар рациональных чисел таких, что $a_n < r_l < \rho_l < b_n$, и

$$\varphi_l(x') := \int\limits_{r_1}^{\rho_1} Q(x', x_n)\, dx_n\,.$$

По теореме Фубини (см., например, утверждение III.8.1 в [13]) функция $\varphi_l(x')$ почти всюду конечна и интегрируема по $x' \in I_0$. Следовательно, по теореме Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла (см., например, утверждение IV.6.3 в [13]) получаем, что почти всюду

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi_l(x'; h)}{h^{n-1}} = \varphi_l(x')\,, \tag{1}$$

где

$$\Phi_l(x'; h) = \int\limits_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \ldots \int\limits_{x_{n-1} - h/2}^{x_{n-1} + h/2} \varphi_l(y')\, dm(y').$$

Заметим также, что по теореме о дифференцируемости неотрицательной субаддитивной функции множеств (см., например, утверждение III.2.4 в [12]) существует конечный предел

$$L(x') := \lim_{h \to 0} \frac{|f\, I(x'; h)|}{h^{n-1}} \tag{2}$$

для почти всех $x' \in I_0$, где

$$I(x'; h) = \left\{(z', z_n) \in I : x_i - \frac{h}{2} < z_i < x_i + \frac{h}{2},\ i = 1, \ldots, n-1,\ a_n < z_n < b_n\right\}.$$

Здесь объем $|f(B \times J)|$ соответствует каждому борелевскому множеству B в I_0.

Докажем, что отображение f абсолютно непрерывно на каждом интервале $x' \times J$, $x' \in I_0$, где существуют конечные пределы (1) и (2). Для этого покажем, что для всех таких x' сумма

$$\sum_{k=1}^{s} |f(x' + \beta_k e_n) - f(x' + \alpha_k e_n)|$$

стремится к нулю вместе с суммой $\sum_{k=1}^{s}|\beta_k-\alpha_k|$, где (α_k,β_k), $k=1,2,\ldots,s,$ — произвольная система непересекающихся интервалов в J. Вследствие непрерывности отображения f на каждом из указанных интервалов $x'\times J$ достаточно доказать этот факт только для рациональных α_k и β_k.

Выберем $h>0$ такое, что $a_i<x_i-\dfrac{h}{2}<x_i+\dfrac{h}{2}<b_i$, $i=1,\ldots,n-1$, и положим для всех $k=1,2,\ldots,s$

$$I_k=I_k(x';h)=\left\{(z',z_n)\in I\colon x_i-\frac{h}{2}<z_i<x_i+\frac{h}{2},\ \alpha_k<z_n<\beta_k\right\}.$$

Обозначим через Γ_k семейство всех кривых, соединяющих грани $z_n=\alpha_k$ и $z_n=\beta_k$ в $\overline{I_k}$. Используя обобщенное неравенство Ренгеля [15, с. 70], получаем

$$M(f\Gamma_k)\leqslant\frac{m_k}{d_k^n},\tag{3}$$

где $d_k=d_k(h)$ — евклидово расстояние между образами граней $z_n=\alpha_k$ и $z_n=\beta_k$, а $m_k=|fI_k|$. Заметим, что при $h\to 0$ эти грани стягиваются в точки $f(x'+\alpha_ke_n)$ и $f(x'+\beta_ke_n)$ соответственно.

Кроме того, обозначим через Σ_k семейство всех $(n-1)$-мерных поверхностей, отделяющих те же грани в $\overline{I_k}$. Тогда функция

$$\varrho_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & x\in I_k\,,\\[2mm] 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus I_k,\end{cases}$$

является допустимой для Σ_k. Следовательно, из определения гипер Q-гомеоморфизма получаем

$$M(f\Sigma_k)\leqslant\frac{1}{h^n}\int\limits_{I_k}Q(x)\,dm(x)=\frac{1}{h}\,\frac{\Phi_k(x';h)}{h^{n-1}}\,.\tag{4}$$

По формуле Циммера (см. [16]) имеем

$$M(f\Gamma_k)=\frac{1}{M^{n-1}(f\Sigma_k)}\,,$$

и, таким образом, комбинируя (3) и (4), находим

$$\left(\frac{d_k^n}{m_k}\right)^{1/(n-1)}\leqslant\frac{1}{h}\,\frac{\Phi_k(x';h)}{h^{n-1}}\,.\tag{5}$$

Далее, из дискретного неравенства Гельдера (см., например, формулу (17.3) в [17]) с $p=n/(n-1)$ и $q=n$, $x_k=d_k/m_k^{1/n}$ и $y_k=m_k^{1/n}$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{s}d_k\leqslant\left[\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{d_k^n}{m_k}\right)^{1/(n-1)}\right]^{(n-1)/n}\left(\sum_{k=1}^{s}m_k\right)^{1/n},$$

т. е.

$$\left(\sum_{k=1}^{s}d_k\right)^{n}\leqslant m\left[\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{d_k^n}{m_k}\right)^{1/(n-1)}\right]^{n-1},$$

где $m = m(h) = |fI(x';h)|$. Теперь, учитывая (5), получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{s} d_k\right)^n \leqslant \frac{m}{h^{n-1}} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\Phi_k(x';h)}{h^{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Устремляя h к нулю, имеем

$$\left\{\sum_{k=1}^{s} |f(x'+\beta_k e_n) - f(x'+\alpha_k e_n)|\right\}^n \leqslant L(x') \left(\sum_{k=1}^{s} \varphi_k(x')\right)^{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant L(x') \left(\sum_{k=1}^{s} \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} Q(x',x_n)\,dx_n\right)^{n-1},$$

и абсолютная непрерывность отображения f на интервале $\{x'\} \times J$ следует из абсолютной непрерывности неопределенного интеграла Лебега от Q на том же интервале.

Следствие. *При условиях теоремы f имеет почти всюду частные производные и аппроксимативный дифференциал.*

1. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and nonlinear analysis. – Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 2001.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009.
3. *Шабат Б. В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 5. – С. 1045 – 1048.
4. *Шабат Б. В.* Метод модулей в пространстве // Там же. – **130**, № 6. – С. 1210 – 1213.
5. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – **104**. – P. 291 – 306.
6. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. – 1970. – **83** (**125**), № 2. – С. 261 – 272.
7. *Мартио О., Рязанов В., Сребро У., Якубов Э.* К теории Q-гомеоморфизмов // Докл. РАН. – 2001. – **381**, № 1. – С. 20 – 22.
8. *Bishop C., Gutlyanskii V., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
9. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1388 – 1398.
10. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* To the theory of mappings with finite area distortion // Repts Dep. Math. Univ. Helsinki. – 2004. – **403**. – P. 1 – 11.
11. *Salimov R. R.* ACL and differentiability of Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2008. – **33**. – P. 295 – 301.
12. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. – Berlin etc.: Springer, 1955.
13. *Saks S.* Theory of the integral. – New York: Dover Publ. Inc., 1964.
14. *Maz'ya V.* Sobolev classes. – Berlin; New York: Springer, 1985.
15. *Caraman P.* n-Dimensional quasiconformal mappings. – Tunbridge Wells, Kent: Abacus Press, 1974.
16. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **126**, № 3. – P. 460 – 473.
17. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Наука, 1965.

Получено 27.11.07,
после доработки — 22.06.09