УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЦІЛИМИ ФУНКЦІЯМИ У ПРОСТОРІ $L_q(\mathbb{R}^d)$

Exact-order estimates are obtained for the best approximations of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of multivariable functions by entire functions of exponential type in the space $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Получены точные по порядку оценки наилучших приближений классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функций многих переменных целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_q(\mathbb{R}^d)$.

У роботі проводиться дослідження найкращих наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < q < \infty$ та $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, цілими функціями експоненціального типу. Одержані результати доповнюють оцінки відповідних величин, які отримано в [1] для іншого співвідношення між параметрами p та q.

Наведемо необхідні позначення, означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, а також апроксимативних характеристик, які будуть досліджуватися.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$. Через $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, позначимо простір вимірних функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$

$$\Delta^l_{h_j} f(x) := \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d)$$

— різниця l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, функції $f(x)$ з кроком h_j за змінною x_j.

Тоді кратна різниця l-го порядку з векторним кроком $h = (h_1, \ldots, h_d)$ визначається рівністю

$$\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_d} \big(\Delta^l_{h_{d-1}} \ldots (\Delta^l_{h_1} f(x)) \big)$$

і, відповідно,

$$\Omega_l(f, t)_q := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta^l_h f(x)\|_q$$

— мішаний модуль неперервності функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. Тут $t = (t_1, \ldots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$ (далі будемо писати $t \geq 0$), $|h| = (|h_1|, \ldots, |h_d|)$ і нерівність $|h| \leq t$ означає, що $|h_j| \leq t_j$, $j = \overline{1, d}$.

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто визначена на $\mathbb{R}^d_+$ функція, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t > 0$ і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає за кожною змінною;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$.

Також будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) та (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [2] і які полягають у наступному.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає з деяким $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), $l > 0$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає з деяким $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j за фіксованих t_i, $i \neq j$. Стверджуючи це (також і для функції $\omega(t)$ однієї змінної), будемо використовувати запис $\Omega \in \Psi_l$, $l > 0$.

Прикладом функції, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l), є функція

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^{r_j}}{\{\log(1/t_j)\}_+^{b_j}}, & \text{якщо} \ \ t_j > 0, \ \ j = \overline{1,d}, \\ 0, & \text{якщо} \ \ \prod_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log \tau\}_+ = \max\{1; \log \tau\}$, а $b_j \in \mathbb{R}$.

Нехай, далі, $e_d := \{1, 2, \ldots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e := \{j_1, \ldots, j_m\}$, $m \leq d$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq d$, $e \subset e_d$, $t^e = (t_{j_1}, \ldots, t_{j_m})$, $\bar{t}^e := (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_d)$, де

$$\bar{t}_i = \begin{cases} t_i, & i \in e, \\ 1, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Отже, для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і функції $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l покладемо

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \ \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} := \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \left(\int_0^2 \cdots \int_0^2 \left(\frac{\Omega_{l^e}(f, t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)} \right)^\theta \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, \tag{1}$$

якщо $1 \leq \theta < \infty$, та

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} := \|f\|_p + \sum_{e \subset e_d} \sup_{t^e > 0} \frac{\Omega_{l^e}(f, t^e)_p}{\Omega(\bar{t}^e)}. \tag{2}$$

Зазначимо також, що

$$\Omega_{l^e}(f,t^e)_q := \sup_{|h^e|\le t^e} \left\|\Delta^{l^e}_{h^e} f(x)\right\|_q, \qquad h^e := (h_{j_1},\ldots,h_{j_m}),$$

$$\Delta^{l^e}_{h^e} f(x) = \Delta^l_{h_{j_m}}\left(\Delta^l_{h_{j_{m-1}}}\ldots\left(\Delta^l_{h_{j_1}} f(\ldots,x_{j_1},\ldots,x_{j_m},\ldots)\right)\right).$$

Тепер наведемо означення апроксимативної характеристики, яка буде досліджуватись у роботі.

Для $s=(s_1,\ldots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{Z}_+$, $j=\overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(s) := \left\{k=(k_1,\ldots,k_d)\colon\ \eta(s_j)2^{s_j-1}\le |k_j| < 2^{s_j}, \quad k_j\in\mathbb{Z}, \quad j=\overline{1,d}\right\}$$

і

$$Q_{2^s} := \left\{\lambda\in\mathbb{R}^d\colon\ \eta(s_j)2^{s_j-1}\le|\lambda_j|<2^{s_j}, \quad j=\overline{1,d}\right\},$$

де $\eta(0)=0$ і $\eta(t)=1$, $t>0$.

Для $n\in\mathbb{N}$ введемо позначення

$$Q^1_n = \bigcup_{\|s\|_1<n} Q_{2^s},$$

де $\|s\|_1 = s_1+\ldots+s_d$. Множина Q^1_n породжує в $\mathbb{R}^d$ так званий східчастий гіперболічний хрест.

Нехай, далі, $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1<q<\infty$. Позначимо через $\mathfrak{F}f$ перетворення Фур'є функції f, а через $\mathfrak{F}^{-1}f$ її обернене перетворення. Покладемо

$$G_q(Q^1_n) := \left\{f\in L_q(\mathbb{R}^d)\colon\ \mathfrak{F}f\subseteq Q^1_n\right\}.$$

Множина $G_q(Q^1_n)$ є підпростором в $L_q(\mathbb{R}^d)$, а її елементами є цілі функції експоненціального типу.

Величина

$$E_n(f)_q := E\big(f, G_q(Q^1_n)\big)_q := \inf_{g\in G_q(Q^1_n)} \|f-g\|_q$$

називається найкращим наближенням функції $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$ функціями із $G_q(Q^1_n)$.

Покладемо

$$E_n(F)_q = \sup_{f\in F} E_n(f)_q, \qquad F\subset L_q(\mathbb{R}^d). \tag{3}$$

Отримані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1\ll\mu_2$ означає, що існує стала $C>0$ така, що $\mu_1(N)\le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1\asymp\mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1\ll\mu_2$ та $\mu_1\gg\mu_2$.

Всі сталі C_i, $i=1,2,\ldots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати лише від параметрів, що входять в означення класу і метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Для подальшого викладу нам знадобляться наступні відомі твердження.

Нехай $A\subset\mathbb{R}^d$ — деяка множина. Позначимо через χ_A характеристичну функцію множини A і для $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$ запишемо

$$\delta_s^*(f,x) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}f \cdot \chi_{Q_{2^s}}).$$

Теорема A (Літтлвуда – Пелі) (див., наприклад, [3, с. 81])**.** *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_3, C_4 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_3\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{s \geq 0} |\delta_s^*(f,\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_4\|f\|_p.$$

Як наслідок з теореми А легко отримують співвідношення (див., наприклад, [4, с. 17])

$$\|f\|_p \ll \left(\sum_{s \geq 0} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{p_0} \right)^{1/p_0}, \quad p_0 = \min\{p, 2\}. \tag{4}$$

У подальшому нам буде зручно користуватися еквівалентними до (1) та (2) зображеннями норми функцій із просторів $B_{p,\theta}^{\Omega}$, $1 \leq \theta < \infty$, та $B_{p,\infty}^{\Omega}$. Має місце наступне твердження.

Теорема Б [1]**.** *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $\Omega(t)$ — *функція типу мішаного модуля неперервності порядку* l, $\Omega \in \Psi_l$, $l \in \mathbb{N}$. *Функція* f *належить класу* $B_{p,\theta}^{\Omega}$, $1 \leq \theta < \infty$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\{ \sum_{s \geq 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right\}^{1/\theta} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} \asymp \left\{ \sum_{s \geq 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right\}^{1/\theta},$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$.

Функція f *належить класу* $B_{p,\infty}^{\Omega}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{s \geq 0} \frac{\|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^{\Omega}} \asymp \sup_{s \geq 0} \frac{\|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}.$$

Таким чином, далі класи $B_{p,\theta}^{\Omega}$ — це множина функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, для якої $\|f\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} \leq 1$.

Зазначимо, що для $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, класи $B_{p,\theta}^{\Omega}$ збігаються з класами $S_{p,\theta}^{r}B$, які були розглянуті Т. І. Амановим [5]; подальші їх дослідження отримали розвиток у роботах П. І. Лізоркіна, С. М. Нікольського [6], Sun Yongsheng, Wang Heping [7] та ін. Відзначимо також роботи [8, 9], в яких досліджувалися аналоги величини (3) для класів $B_{p,\theta}^{r}$ та $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\Omega(t) \in \Psi_l$ *з деяким* $\alpha > \beta$, *де* $\beta = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$. *Тоді якщо* f *належить класу* $B^{\Omega}_{p,\theta}$, *то* f *належить класу* $B^{\Omega_1}_{q,\theta}$, $\Omega_1(t) = \Omega(t)t^{-\beta}$ *і*

$$\|f\|_{B^{\Omega_1}_{q,\theta}} \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Зауважимо, що доведення даної теореми проводиться аналогічно доведенню відповідної теореми в періодичному випадку [9] (теорема 4).

Лема А [1]**.** *Нехай* $\Lambda(t) = \lambda(t_1 \dots t_d)$, *де* $\lambda(\tau)$ — *задана функція типу модуля неперервності порядку* l, *що задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$, *тоді*

$$\left(\sum_{\|s\|_1 \ge n} \Lambda^a(2^{-s}) \right)^{1/a} \asymp \lambda(2^{-n}) n^{(d-1)/a}, \quad a > 0.$$

У подальших міркуваннях ми використаємо лему, яка отримана в [7] і є аналогом відповідної леми у періодичному випадку [10, с. 25].

Лема Б. *Нехай задано* $1 < p < q < \infty$ *і* $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$. *Тоді*

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_{s \ge 0} \|\delta^*_s(f, \cdot)\|_p^q \, 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q) q} \right)^{1/q}.$$

Тепер перейдемо до встановлення оцінок величини (3), коли в якості F використовують класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Попередньо зробимо наступне зауваження.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$S_n(f, x) := S_n f = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta^*_s(f, x).$$

Тоді якщо $1 < q < \infty$ і $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, то (див., наприклад, [6])

$$\|f - S_n f\|_q \asymp E_n(f)_q. \tag{5}$$

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < q < \infty$ *і задано* $\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^d t_j\Big)$, *де* $\omega \in \Psi_l$ *з деяким* $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$. *Тоді для* $1 \le \theta \le \infty$ *мають місце порядкові співвідношення*

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_n f\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p - 1/q)} n^{(d-1)(1/q - 1/\theta)_+},$$

де $a_+ = \max\{a;\ 0\}$.

Доведення. Спочатку отримаємо оцінки зверху. Згідно з означенням величин $E_n(f)_q$ і $\|f - S_n f\|_q$ необхідну оцінку зверху достатньо встановити для $\|f - S_n f\|_q$, $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Нехай $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, тоді, використавши лему Б, отримаємо

$$\|f - S_n f\|_q = \left\| \sum_{\|s\|_1 \ge n} |\delta^*_s(f, \cdot)| \right\|_q \ll \left(\sum_{\|s\|_1 \ge n} \|\delta^*_s(f, \cdot)\|_p^q \, 2^{\|s\|_1 (1/p - 1/q) q} \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^q \Omega^{-q}(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1 (1/p-1/q)q} \Omega^q(2^{-s}) \right)^{1/q} =: J_1.$$

Для оцінки J_1 розглянемо кілька випадків. Нехай $q < \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до J_1 нерівність Гельдера з показником $\dfrac{\theta}{q}$, одержимо

$$J_1 \ll \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \left(2^{\|s\|_1 (1/p-1/q)}\ \Omega(2^{-s}) \right)^{q\theta/(\theta-q)} \right)^{1/q-1/\theta} \leq$$

$$\leq \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \left(2^{\|s\|_1 (1/p-1/q)}\ \Omega(2^{-s}) \right)^{q\theta/(\theta-q)} \right)^{1/q-1/\theta}.$$

Далі, якщо покласти

$$2^{\|s\|_1 (1/p-1/q)} \Omega(2^{-s}) = \Lambda(2^{-s}),$$

де $\Lambda(t) = \lambda(t_1 \ldots t_d)$ і

$$\lambda(\tau) = \omega(\tau)\tau^{-1/p+1/q},$$

то $\Lambda(2^{-s})$ задовольнятиме умову (S) з деяким $\overline{\alpha} = \alpha - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 0$. Тоді на підставі леми A отримаємо оцінку

$$J_1 \ll \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/q)} n^{(d-1)(1/q-1/\theta)} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/q)} n^{(d-1)(1/q-1/\theta)}.$$

У випадку $\theta = \infty$ для $f \in B^\Omega_{p,\infty}$ згідно з співвідношенням

$$\|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p \ll \Omega(2^{-s})$$

та лемою A можемо записати

$$J_1 \ll \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \left(2^{\|s\|_1 (1/p-1/q)} \Omega(2^{-s}) \right)^q \right)^{1/q} \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/q)} n^{(d-1)/q}.$$

Насамкінець розглянемо випадок $1 \leq \theta \leq q$. Використовуючи нерівність [11, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{v_2} \right)^{1/v_2} \leq \left(\sum_k |a_k|^{v_1} \right)^{1/v_1}, \quad 0 < v_1 \leq v_2 < \infty,$$

та беручи до уваги, що $\omega \in \Psi_l$ з $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, одержуємо оцінку

$$J_1 \ll \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)\theta} \Omega^{\theta}(2^{-s}) \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{1/\theta} \sup_{\|s\|_1 \geq n} 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)} \Omega(2^{-s}) \leq$$

$$\leq \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \sup_{\|s\|_1 \geq n} 2^{\|s\|_1(1/p-1/q)} \Omega(2^{-s}) \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/q)}.$$

Оцінки зверху встановлено.

Перейдемо до встановлення відповідних оцінок знизу. Зауважимо, що згідно з (5) оцінки знизу достатньо також отримати лише для величини $\|f - S_n f\|_q$, $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Для $k \in \mathbb{N}^d$ розглянемо функцію

$$D_k(x) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j),$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j + 1}{2} x_j \right) x_j^{-1}$$

та

$$D_{\frac{1}{2}}(x_j) := D_0(x_j) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Тоді для перетворення Фур'є функції $D_k(x)$ можемо записати [7]

$$\mathfrak{F} D_k(x) = \chi_k(x) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j + 1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x_j| = k_j \ \text{ або } \ |x_j| = k_j + 1, \\ 0 & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x_j| = 1, \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1} \chi_k(t) = D_k(x).$$

Нехай спочатку $\theta = \infty$. Розглянемо функцію

$$f_{p,n}(x) = C_5 \sum_{\|s\|_1 \geq n} \Omega(2^{-s}) 2^{-\|s\|_1/p'} \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x),$$

де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, і покажемо, що для певного вибору сталої $C_5 > 0$ дана функція належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Використавши відому оцінку [7]

$$\left\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(\cdot) \right\|_q \ll 2^{\|s\|_1/q'}, \tag{6}$$

можемо записати

$$\|\delta_s^*(f_{p,n}, \cdot)\|_p \asymp \left\| \Omega(2^{-s}) 2^{-\|s\|_1/p'} \sum_{k \in \rho(s)} D_k(\cdot) \right\|_p =$$

$$= \Omega(2^{-s}) 2^{-\|s\|_1/p'} \left\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(\cdot) \right\|_p \ll \Omega(2^{-s}).$$

Звідси отримуємо

$$\|f_{p,n}\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{s \geq 0} \frac{\|\delta_s^*(f_{p,n}, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq C_6, \quad C_6 > 0,$$

і тому $f_{p,n}$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\infty}$ з деякою сталою $C_5 > 0$.

Покладемо

$$\Delta(s) = \left\{ x\colon\ 2^{-s_j - 1} \leq x_j < 2^{-s_j}, \ \ j = \overline{1, d} \right\}$$

і зауважимо, що $\Delta(s) \cap \Delta(s') = \varnothing$, якщо $s \neq s'$. Таким чином, беручи до уваги, що $S_n f_{p,n} = 0$, і використовуючи теорему А, маємо

$$E_n(f_{p,n})_q \asymp \left\| f_{p,n} - S_n f_{p,n} \right\|_q = \left\| f_{p,n} \right\|_q \gg \left\| \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} |\delta_s^*(f_{p,n}, \cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \gg$$

$$\gg \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \int_{\Delta(s)} \left| \delta_s^*(f_{p,n}, x) \right|^q dx \right)^{1/q}. \tag{7}$$

Далі, оскільки

$$\int_{\Delta(s)} \left| \delta_s^*(f_{p,n}, x) \right|^q dx = \Omega^q(2^{-s}) 2^{-\|s\|_1 q/p'} \int_{\Delta(s)} \left| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x) \right|^q dx =: J_2,$$

оцінимо спочатку підінтегральний вираз

$$\left| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x) \right| = \left| \sum_{k \in \rho(s)} \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j) \right| = \left| \prod_{j=1}^{d} \sum_{k = \eta(s_j) 2^{s_j - 1}}^{2^{s_j} - 1} D_{k_j}(x_j) \right| =$$

$$= \left| \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2^{s_j} x_j - \sin \eta(s_j) 2^{s_j - 1} x_j}{x_j} \right| \gg$$

$$\gg \left| \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin 2^{s_j - 2} x_j}{x_j} \right| \gg 2^{\|s\|_1}. \tag{8}$$

Тоді для J_2 з використанням оцінки (8) можемо записати

$$J_2 \gg \Omega^q(2^{-s})\, 2^{-\|s\|_1 q/p'} \int\limits_{\Delta(s)} 2^{\|s\|_1 q} dx = \Omega^q(2^{-s})\, 2^{-q\|s\|_1(1/p'-1)} \int\limits_{\Delta(s)} dx \gg$$

$$\gg \Omega^q(2^{-s})\, 2^{\|s\|_1 q/p}\, 2^{-\|s\|_1} = \Omega^q(2^{-s})\, 2^{-q\|s\|_1(1/q-1/p)}. \tag{9}$$

Підставляючи оцінку (9) в (7) та використовуючи лему А, отримуємо

$$E_n(f_{p,n})_q \gg \left(\sum_{\|s\|_1 \geq n} \left(\Omega(2^{-s}) 2^{-\|s\|_1(1/q-1/p)} \right)^q \right)^{1/q} \asymp \omega(2^{-n})\, 2^{n(1/p-1/q)} n^{(d-1)/q}. \tag{10}$$

Нехай тепер $1 \leq \theta \leq q$. У цьому випадку розглянемо функцію

$$g_{p,n}(x) = C_7 \omega(2^{-n}) 2^{-n/p'} \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x),$$

де $s = (n, 0, \ldots, 0)$, $C_7 > 0$ — деяка стала.

Легко переконатися, що за певного вибору сталої $C_7 > 0$ функція $g_{p,n}$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Оскільки $\|s\|_1 = n$, то згідно з (6)

$$\|g_{p,n}\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \omega(2^{-n}) 2^{-n/p'} \left(\left\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(\cdot) \right\|_p^{\theta} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{-n/p'} \omega^{-1}(2^{-n}) 2^{n/p'} = 1.$$

Отже, з отриманого співвідношення випливає, що $g_{p,n}$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Беручи до уваги, що $S_n g_{p,n} = 0$, знаходимо

$$E_n(g_{p,n})_q \asymp \|g_{p,n} - S_n g_{p,n}\|_q = \|g_{p,n}\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n/p'} \left\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(\cdot) \right\|_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-n/p'} 2^{n/q'} = \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/q)}.$$

Насамкінець, нехай $q \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$\varphi_{p,\theta,n}(x) = C_8 \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)/\theta} 2^{-n/p'} \sum_{\|s\|_1 = n} \sum_{k \in \rho(s)} D_k(x)$$

і покажемо, що за певного вибору сталої $C_8 > 0$ функція $\varphi_{p,\theta,n}$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Використовуючи співвідношення (6), отримуємо

$$\|\varphi_{p,\theta,n}\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)/\theta} 2^{-n/p'} \left(\sum_{\|s\|_1 = n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \left\| \sum_{k \in \rho(s)} D_k(\cdot) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)/\theta} 2^{-n/p'} \omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{\|s\|_1 = n} 2^{-\|s\|_1 \theta / p'} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll 2^{-n/p'} 2^{n/p'} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{\|s\|_1 = n} 1 \right)^{1/\theta} \asymp 1.$$

Отже, $\varphi_{p,\theta,n} \in B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Враховуючи, що $S_n \varphi_{p,\theta,n} = 0$, та проводячи міркування, аналогічні до тих, що використовувалися при встановленні оцінки (10), одержуємо

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \geq E_n(\varphi_{p,\theta,n})_q \asymp \|\varphi_{p,\theta,n}\|_q \gg \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/q)} n^{(d-1)(1/q-1/\theta)}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Оцінку з теореми 2 у випадку $\Omega(t) = t^r := t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_1}$, $r = (r_1, \ldots, r_1) > 0$, тобто коли класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з класами $S^r_{p,\theta}B$, встановлено в [7].

Теорема 3. *Нехай* $1 < q < p < \infty$, $p \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega \in \Psi_l$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді мають місце порядкові співвідношення*

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_n f\|_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Доведення. Оцінки зверху, внаслідок нерівності $\|\cdot\|_q < \|\cdot\|_p$, $q < p$, зводяться до оцінки зверху величини $\sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_n f\|_p$ (див. [1]), тобто

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q < E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_p \leq \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_n f\|_p \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Для одержання оцінок знизу скористаємося співвідношенням, яке встановлене в [7].

Лема В. *Нехай* $1 < p < \infty$. *Тоді для функції*

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} c_k \prod_{j=1}^{d} D_{2^{k_j - 1}}(x_j)$$

виконується співвідношення

$$\|f\|_p \asymp \left(\sum_{k \geq 0} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Для одержання відповідної оцінки знизу у випадку $2 \leq \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$\psi_{\theta,n}(x) = C_9 n^{-(d-1)/\theta} \omega(2^{-n}) \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j).$$

Покажемо, що функція $\psi_{\theta,n}$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ з деякою сталою $C_9 > 0$.

Оскільки

$$\left\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j) \right\|_p \ll \left\| \prod_{j=1}^{d} \left| \frac{\sin(x_j/2)}{x_j} \right| \right\|_p \ll 1,$$

то

$$\|\psi_{\theta,n}\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\|s\|_1=n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \left\| \delta^*_s(\psi_{\theta,n}, \cdot) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_{\|s\|_1=n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \left\| n^{-(d-1)/\theta} \omega(2^{-n}) \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(\cdot) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} =$$

$$= n^{-(d-1)/\theta} \omega(2^{-n}) \left(\sum_{\|s\|_1=n} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \left\| \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(\cdot) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll n^{-(d-1)/\theta} \omega(2^{-n}) \omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{\|s\|_1=n} 1 \right)^{1/\theta} \asymp 1.$$

Далі, зважаючи на те, що $S_n \psi_{\theta,n} = 0$, та використовуючи лему B, одержуємо

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_n f\|_q \geq \|\psi_{\theta,n} - S_n \psi_{\theta,n}\|_q = \|\psi_{\theta,n}\|_q \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \omega(2^{-n}) \left\| \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j) \right\|_q \asymp$$

$$\asymp n^{-(d-1)/\theta} \omega(2^{-n}) \left(\sum_{\|s\|_1=n} 1 \right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}.$$

Якщо $\theta = \infty$, то розглянемо функцію

$$\widetilde{\psi}_n(x) = C_{10} \omega(2^{-n}) \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} D_{2^{s_j-1}}(x_j),$$

де $C_{10} > 0$ — деяка стала.

Оскільки

$$\|\widetilde{\psi}_n\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\|s\|_1=n} \frac{\|\delta_s^*(\widetilde{\psi}_n,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} = \sup_{\|s\|_1=n} \frac{\omega(2^{-n})\left\|\prod_{j=1}^d D_{2^{s_j-1}}(x_j)\right\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le C_{11},$$

то функція $\widetilde{\psi}_n$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\infty}$ з деякою сталою $C_{10} > 0$.

Беручи до уваги, що $S_n\widetilde{\psi}_n = 0$, та використовуючи лему В, отримуємо

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\infty})_q \ge \|\widetilde{\psi}_n - S_n\widetilde{\psi}_n\|_q = \|\widetilde{\psi}_n\|_q \asymp \omega(2^{-n})\left\|\sum_{\|s\|_1=n}\prod_{j=1}^d D_{2^{s_j-1}}(x_j)\right\|_q \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})\left(\sum_{\|s\|_1=n} 1\right)^{1/2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)/2}.$$

Насамкінець, для встановлення оцінки знизу величини $E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ у випадку $1 \le \theta < 2$ розглянемо функцію

$$\tilde{\varphi_n}(x) = C_{12}\omega(2^{-n})\prod_{j=1}^d D_{2^{s_j-1}}(x_j),$$

де $s_1 + \ldots + s_d = n$, $C_{12} > 0$ — деяка стала.

Для функції $\tilde{\varphi_n}$ будемо мати

$$\|\tilde{\varphi_n}\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\Omega^{-\theta}(2^{-s})\left\|\omega(2^{-n})\prod_{j=1}^d D_{2^{s_j-1}}(x_j)\right\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-n})\omega(2^{-n})\left(\left\|\prod_{j=1}^d D_{2^{s_j-1}}(x_j)\right\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \le C_{13}.$$

Отже, $\tilde{\varphi_n}$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ з деякою сталою $C_{12} > 0$.

Оскільки $S_n\tilde{\varphi_n} = 0$, то

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - S_nf\|_q \ge \|\tilde{\varphi_n} - S_n\tilde{\varphi_n}\|_q = \|\tilde{\varphi_n}\|_q \asymp \omega(2^{-n}).$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему доведено.

На завершення сформулюємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $1 < q < p < \infty$, $p \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = t^r = t_1^{r_1}\ldots t_d^{r_1}$, $r = (r_1,\ldots,r_1) > 0$. *Тоді має місце співвідношення*

$$E_n(S^r_{p,\theta}B)_q \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}, \tag{11}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Зауважимо, що оцінка (11) доповнює результати, встановлені в роботі [7].

1. *Стасюк С. А., Янченко С. Я.* Найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функцій багатьох змінних в просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 367 – 384.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
4. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic function. – New York: Nova Sci. Publ., Inc., 1993. – 419 p.
5. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leq x_j \leq 2\pi,\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
6. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Там же. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
7. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with a certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. – 1995. – **11(4)**. – P. 454 – 466.
8. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
9. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
10. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
11. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

Одержано 12.02.09