УДК 519.21

Є. В. Карнаух (Київ. нац. торг.-екон. ун-т)

ПОВЕДІНКА МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНОГО ПРОЦЕСУ ПУАССОНА НА ЛАНЦЮЗІ МАРКОВА ПІСЛЯ ДОСЯГНЕННЯ РІВНЯ

Almost semicontinuous processes defined on a Markov chain are considered. The representations of moment generating functions for the absolute maximum after attaining a positive level and for the recovery time are obtained. Modified processes with two-step rate of negative jumps are investigated.

Рассматриваются почти полунепрерывные процессы на цепи Маркова. Получены представления для генератрис абсолютного максимума после достижения положительного уровня и времени восстановления. Исследованы модифицированные процессы с двухступенчатой интенсивностью отрицательных скачков.

1. Вступ. У даній роботі продовжено дослідження майже напівнеперервних процесів, заданих на скінченному ланцюзі Маркова, що розпочате в роботах [1, 2]. У першому пункті розглядаються аналоги функціоналів, досліджених у роботі [3] (§ 6.3), для скалярного випадку. В другому пункті вивчаються перестрибкові функціонали для модифікованого майже напівнеперервного процесу, що є аналогом модифікованого напівнеперервного процесу зі знесенням, яке змінюється в залежності від досягнутого рівня (див., наприклад, [4], гл. VII, та [5], для скалярного випадку — [6]).

Нехай $x(t)$ — скінченний незвідний ланцюг Маркова з множиною станів $E' = \{1, \ldots, m\}$ та інфінітезимальною матрицею Q. Визначимо процес $\xi(t)$ таким чином: $\xi(0) = 0$; якщо $x(t) = k$, $k = 1, ..., m$, та прирости $\xi(t)$ збігаються з приростами процесу

$$\xi_k(t) = \sum_{n \le \varepsilon_k(t)} \xi_n^k - \sum_{n \le \varepsilon'_k(t)} {\xi'_n}^k,$$

де $\varepsilon'_k(t)$, $\varepsilon_k(t)$ — процеси Пуассона з інтенсивностями λ_k^1 та λ_k^2 відповідно, ${\xi'_n}^k$ та ξ_n^k — незалежні додатні випадкові величини; ${\xi'_n}^k$ мають експоненціальний розподіл з параметром c_k, а ξ_n^k — деякий абсолютно неперервний розподіл зі скінченним сподіванням m_k. У даному випадку процес $Z(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ є майже напівнеперервним знизу процесом на ланцюзі Маркова (див. [1, с. 562]) з кумулянтою

$$\Psi(\alpha) = \Lambda F_0(0) \left(C\,(C + \imath\alpha I)^{-1} - I \right) + \int\limits_0^\infty (e^{\imath\alpha x} - I)\,\Pi(dx) + Q, \qquad (1)$$

де $\Lambda = \|\delta_{kr}(\lambda_k^1 + \lambda_k^2)\|$, $C = \|\delta_{kr} c_k\|$, $F_0(0) = \|\delta_{kr}\lambda_k^1/(\lambda_k^1 + \lambda_k^2)\|$, $\Pi(dx) = \Lambda \overline{F}_0(0) dF_0^1(x)$, $\overline{F}_0(0) = I - \overline{F}_0(0)$, $F_0^1(x) = \|\delta_{kr} \mathrm{P}\left\{\xi_n^k < x\right\}\|$, $x < 0$.

Позначимо екстремуми процесу $\xi(t)$

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \le u \le t} (\inf) \xi(u), \quad \xi^{\pm} = \sup_{0 \le u \le \infty} (\inf) \xi(u), \quad \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t),$$

та перестрибкові функціонали

$$\tau^+(x) = \inf\{t : \xi(t) > x\}, \quad x \ge 0,$$

$$\gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x, \gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0), \quad x \geq 0;$$
$$\tau^-(x) = \inf\{t : \xi(t) < x\}, \quad x \leq 0; \quad \tau^-(x) = 0, \quad x > 0.$$

Нехай θ_s — експоненціально розподілена випадкова величина з параметром $s > 0$, незалежна від $Z(t)$. Позначимо розподіли екстремумів та відповідні атомарні ймовірності

$$P_{\pm}(s,x) = \left\| \mathrm{P}\left\{\xi^{\pm}(\theta_s) < x, x(\theta_s) = r/x(0) = k\right\} \right\| = \mathrm{P}\left\{\xi^{\pm}(\theta_s) < x\right\}, \quad x > 0;$$

$P^-(s,x) = \mathrm{P}\left\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\right\}, x < 0; p_{\pm}(s) = \mathrm{P}\left\{\xi^{\pm}(\theta_s) = 0\right\} P_s^{-1}, P_s = s\,(sI - Q)^{-1}$, $p^-(s) = P_s^{-1}\mathrm{P}\left\{\overline{\xi}(\theta_s) = 0\right\}, q^-(s) = I - p^-(s)$.

Зауважимо, що якщо позначити $R_-(s) = Cp_-(s)$ та $R^-(s) = p^-(s)C$, то для $x \leq 0$ (див. [2])

$$P_-(s,x) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^-(x)}, \tau^-(x) < \infty\right] P_s = q_-(s)e^{R_-(s)x}P_s, \qquad (2)$$
$$P^-(s,x) = P_s e^{R^-(s)x}q^-(s).$$

Враховуючи, що $\lim_{x\to-\infty} P^-(s,x) = \lim_{x\to-\infty} P_-(s,x) = 0$, одержуємо, що спектр матриць $R_-(s)$, $R^-(s)$ ($\sigma\left(R_-(s)\right)$ та $\sigma\left(R^-(s)\right)$) складається з додатних елементів.

Для перестрибкових функціоналів з [2, с. 48] випливає наступне твердження.

Лема 1. *Для процесу* $Z(t)$ *з кумулянтою* (1)

$$f_s(dx, dy/u) = \mathrm{E}\Big[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma_+(u) \in dx, \gamma^+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty\Big] =$$
$$= s^{-1}d_x P_+(s, u-x)p^-(s)\Pi(dy + x)I\{x < u\} +$$
$$+ s^{-1}\int\limits_{0\vee(u-x)}^{u} dP_+(s,z)R^-(s)e^{R^-(s)(u-x-z)}q^-(s)\Pi(dx + y)dy, \qquad (3)$$

$$g_s(dy/u) = \mathrm{E}\Big[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty\Big] = s^{-1}\int\limits_0^u dP_+(s,z)\times$$
$$\times\left(p^-(s)\Pi(dy + u - z) + R^-(s)\int\limits_{u-z}^{\infty} e^{R^-(s)(u-x-z)}q^-(s)\Pi(dx + y)dy\right), \qquad (4)$$

$$g(dy/u) = \lim_{s\to 0} g_s(dy/u) =$$
$$= \int\limits_0^u dM_+(z)\left(\Pi(dy + u - z) + C\int\limits_{u-z}^{\infty} e^{R^-(0)(u-x-z)}\left(I - p^-(0)\right)\Pi(dx + y)dy\right), \qquad (5)$$

де $M_+(x)$: $\int_0^{\infty} e^{\imath\alpha x}dM_+(x) = -\Psi^{-1}(\alpha)\left(C + \imath\alpha I\right)^{-1}\left(Cp^-(0) + i\alpha I\right)$.

Зауважимо, що $dM_+(x) = \lim\limits_{s\to 0} s^{-1}dP_+(s,x)p^-(s)$, а матриці $p_-(0), p^-(0)$ задовольняють відповідно рівняння

$$(\Lambda - Q)\,(I - p_-(0)) = \Lambda F_0(0) + \int_0^\infty \Pi(dz)\,(I - p_-(0))\,e^{-Cp_-(0)z},$$

$$\left(I - p^-(0)\right)(\Lambda - Q) = \Lambda F_0(0) + \int_0^\infty e^{-p^-(0)Cz}\left(I - p^-(0)\right)\Pi(dz).$$

2. Червоний період. У цьому пункті розглянемо функціонали, пов'язані з поведінкою $\xi(t)$ після досягнення додатного рівня. Позначимо

$$z^+(u) = \sup_{\tau^+(u)\le t<\infty} \xi(t) - u,\ \tau'(u) = \inf\{t > \tau^+(u), \xi(t) < u\},$$

$$T'(u) = \begin{cases} \tau'(u) - \tau^+(u), & \tau^+(u) < \infty, \\ \infty, & \tau^+(u) = \infty. \end{cases}$$

Необхідно зауважити, що процес $Z(t)$ можна розглядати як надлишковий процес ризику зі стохастичною функцією премій (розмір премій має експоненціальний розподіл) у марковському середовищі, а функціонали $z^+(u)$, $\tau'(u)$, $T'(u)$ — як загальний дефіцит після банкрутства, час відновлення та „червоний період" відповідно (див. [7]).

Теорема 1. *Для процесу* $Z(t)$ *з кумулянтою* (1)

$$\mathrm{P}\left\{z^+(u) < x, \tau^+(u) < \infty\right\} = \int_0^x g(dy/u)\mathrm{P}\left\{\xi^+ < x - y\right\}, \tag{6}$$

$$s\mathrm{E}\left[e^{-s\tau'(u)}, \tau'(u) < \infty\right] = \int_0^u dP_+(s,x)p^-(s)\left(\int_{u-x}^\infty \Pi(dz)q_-(s)e^{R_-(s)(u-x-z)} + \right.$$

$$\left. + C\int_{-\infty}^0 e^{R^-(s)y}q^-(s)\int_{u-x-y}^\infty \Pi(dz)q_-(s)e^{R_-(s)(u-x-y-z)}dz\right), \tag{7}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty\right] = \int_0^u dM_+(x)\left(\int_0^\infty \Pi(dy + u - x)q_-(s)e^{-R_-(s)y} + \right.$$

$$\left. + C\int_{u-x}^\infty e^{R^-(0)(u-x-z)}q^-(0)\int_0^\infty \Pi(dy + z)q_-(s)e^{-R_-(s)y}dz\right). \tag{8}$$

Доведення. Беручи до уваги, що при умові $\gamma^+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty$ функціонал $z^+(u)$ є стохастично еквівалентним $y + \xi^+$, отримуємо

$$\mathrm{P}\left\{z^+(u) < x, \tau^+(u) < \infty\right\} = \int_0^x \mathrm{P}\left\{\gamma^+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty\right\}\mathrm{P}\left\{y + \xi^+ < x\right\}.$$

З допомогою міркувань, аналогічних використаним при доведенні теореми 5.1 у [8], для генератриси часу відновлення виводимо

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau'(u)}, \tau'(u) < \infty\right] = \int\limits_0^u dP_+(s,x) \int\limits_{-\infty}^0 P_s^{-1} P^-(s,y) \times$$

$$\times \int\limits_{u-x-y}^{\infty} \Pi(dz) \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^-(u-x-y-z)}, \tau^-(u-x-y-z) < \infty\right].$$

Поєднуючи останнє співвідношення з (2), одержуємо (7). Використовуючи строго марковську властивість, маємо

$$\mathrm{E}\left[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty, x(T'(u)) = r/x(0) = k\right] =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mathrm{E}\Big[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty, \gamma^+(u) \in dy, x(T'(u)) = r/x(0) = k\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^m \int\limits_0^\infty \mathrm{E}\left[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty, \gamma^+(u) \in dy, x(T'(u)) = r, x(\tau^+(u)) = j/x(0) =\right.$$

$$\left. = k\right] = \sum_{j=1}^m \int\limits_0^\infty \mathrm{P}\left\{x(\tau^+(u)) = j, \gamma^+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty/x(0) = k\right\} \times$$

$$\times \mathrm{E}\Big[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty, x(T'(u)) = r/\gamma^+(u) \in dy, x(\tau^+(u)) = j, \tau^+(u) < \infty,$$

$$x(0) = k\Big] = \sum_{j=1}^m \int\limits_0^\infty \mathrm{E}\Big[e^{-s\tau^-(-y)}, \tau^-(-y) < \infty, x(\tau^-(-y)) = r/x(0) = j\Big] \times$$

$$\times \mathrm{P}\left\{x(\tau^+(u)) = j, \gamma^+(x) \in dy, \tau^+(u) < \infty/x(0) = k\right\}.$$

При одержанні останньої рівності використано той факт, що за умови $\gamma^+(u) \in$ $\in dy, \tau^+(u) < \infty$ функціонал $T'(u)$ є стохастично еквівалентним моменту досягнення рівня $-y$. У матричній формі

$$\mathrm{E}\left[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty, \tau^+(u) < \infty\right] =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mathrm{P}\left\{\gamma^+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty\right\} \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^-(-y)}, \tau^-(-y) < \infty\right].$$

Використовуючи (2) та (5), одержуємо (8).

3. Модифікований процес. У даному пункті окрім результатів для перестрибкових функціоналів використовуються співвідношення для двограничних функціоналів. Позначимо момент виходу з інтервалу $(u-b, u)$:

$$\tau(u,b) = \{t > 0 : \xi(t) \notin (u-b, u)\}.$$

Розглянемо події, що визначають момент виходу через верхню та нижню межу інтервалу,

$$A_+(u) = \{\omega : \xi(\tau(u,b)) \geq u\}, \quad A_-(u) = \{\omega : \xi(\tau(u,b)) \leq u-b\},$$

та відповідні перестрибки

$$\gamma_b^+(u) = \xi(\tau(u,b)) - u, \quad \gamma_+^b(u) = u - \xi(\tau(u,b)-0) \quad \text{на } A_+(u),$$
$$\gamma_b^-(u) = (u-b) - \xi(\tau(u,b)), \quad \gamma_-^b(u) = \xi(\tau(u,b)-0) - (u-b) \quad \text{на } A_-(u).$$

З результатів роботи [1, с. 559] випливає, що

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau(u,b)}, \gamma_b^-(u) \in dy, A_-(u)\right] =$$
$$= \mathrm{E}\left[e^{-s\tau(u,b)}, A_-(u)\right] Ce^{-Cy}dy = B_b(s,u)Ce^{-Cy}dy, \tag{9}$$
$$f_{b,s}^+(dx, dy/u) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau(u,b)}, \gamma_+^b(u) \in dx, \gamma_b^+(u) \in dy, A_+(u)\right] =$$
$$= \left\| \mathrm{P}\left\{u - \xi(\theta_s) \in dx, \tau(u,b) > \theta_s, x(\theta_s) = r/x(0) = k\right\}\right\| \Pi(dy+x) I\{0 < x < b\} =$$
$$= d_x H_s(b,u,u-x)\Pi(dy+x)I\{0<x<b\}.$$

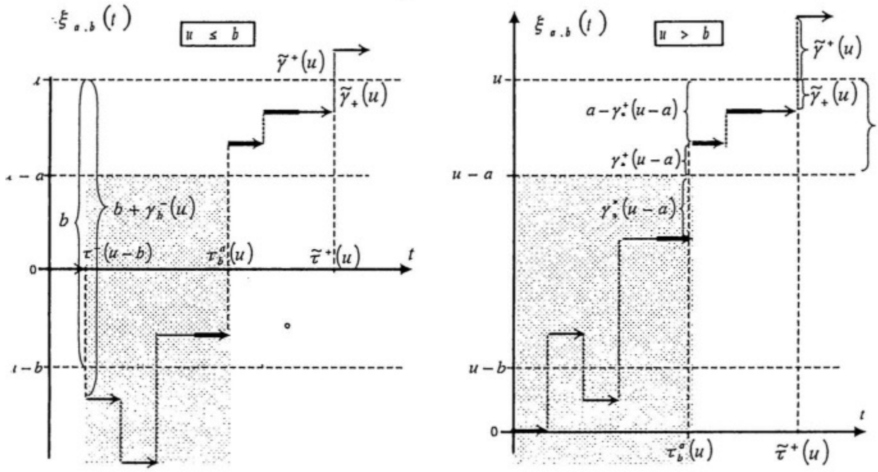
Зазначимо, що зображення для $B_b(s,u)$ та $d_xH_s(b,u,x)$ було одержано в роботі [1] для майже напівнеперервних зверху процесів. Для даного випадку можна застосувати той факт, що якщо $\{\xi(t), x(t)\}$ є майже напівнеперервним зверху процесом, то $\{-\xi(t), x(t)\}$ — майже напівнеперервний знизу процес.

Визначимо модифікований процес $\xi_{a,b}(t)$, $0 < a \leq b < \infty$. Припустимо, що інтенсивності експоненціально розподілених від'ємних стрибків $\xi_{a,b}(t)$ залежать від порогових рівнів a та b (див. [6]). В теорії ризику даний процес має наступну інтерпретацію. При досягненні резервом страхової компанії деякого рівня вона може зменшити величину премій для залучення додаткових клієнтів. Тобто розподіл величини премій має параметр $\tilde{C} = C(r)$, якщо резерв компанії дорівнює r. Будемо припускати, що $\tilde{C}$ набуває лише двох значень C та C_*, відповідно початкова та знижена величина премій. При цьому вважатимемо, що зміна між ними відбувається після проходження інертної зони (a,b).

Прирости процесу $\xi_{a,b}(t)$ збігаються з приростами процесу $\xi(t)$ (з інтенсивностями C) між останнім перетином знизу рівня $u-a$ та наступним перетином зверху рівня $u-b$. Прирости $\xi_{a,b}(t)$ збігаються з приростами $\xi_*(t)$ (з інтенсивностями C_*) між останнім перетином зверху рівня $u-b$ та наступним перетином знизу рівня $u-a$. Будемо використовувати позначення генератрис із $*$, що відповідатиме процесу $\xi_*(t)$. Якщо $x(t) = k$, то

$$d\xi_{a,b}(t) = d\xi_k(t)I\{0 \leq t \leq \tau^-(u-b)\} + d\xi_k^*(t)I\{\tau^-(u-b) < t \leq \tau_b^a(u)\} +$$
$$+ d\xi_{a,b}(t - \tau_b^a(u))I\{t > \tau_b^a(u)\},$$

де $\tau_b^a(u) = \inf\{t > \tau^-(u-b) \colon \xi_{a,b}(t) \geq u-a\}$.



Будемо позначати через $\tilde{\tau}^+(u)$, $\tilde{\gamma}_+(u)$, $\tilde{\gamma}^+(u)$ перестрибкові функціонали для модифікованого процесу $\xi_{a,b}(t)$ (див. рисунок). Позначимо

$$f_s^{a,b}(dx, dy/u) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tilde{\tau}^+(u)}, \tilde{\gamma}_+(u) \in dx, \tilde{\gamma}^+(u) \in dy, \tilde{\tau}^+(u) < \infty\right],$$

тоді функцію штрафу Гербера – Шіу можна визначити таким чином (див. [9]):

$$\Phi_s^{a,b}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y) f_s^{a,b}(dx, dy/u),$$

де $w(x,y)$, $x, y > 0$, — невід'ємна функція (штраф). Якщо параметр s розглядати як норму відсотка, то $\Phi_s^{a,b}(u)$ можна розглядати як дисконтований очікуваний штраф у момент банкрутства.

Припустимо, що процес $e^{u-\xi_{a,b}(t)}$ описує ціну деякої акції, що може змінюватись випадковими стрибками. Розглянемо довічний американський пут опціон зі страйковою ціною K. Виплата в момент t буде дорівнювати $(K - e^{u-\xi_{a,b}(t)})_+$. Оптимальною стратегією є $\tau_\beta = \inf\{t > 0 : e^{u-\xi_{a,b}(t)} < e^\beta\}$, де межа виконання β: $e^\beta \leq \min(e^u, K)$. Нехай ринок є нейтральним до ризику, тоді ціна опціону визначається як очікувана дисконтована виплата $\mathrm{E}\left[e^{-s\tau_\beta}(K - e^{u-\xi_{a,b}(\tau_\beta)})_+\right]$ або, з урахуванням того, що $\tau_\beta \doteq \tilde{\tau}^+(u-\beta)$, як $\mathrm{E}\left[e^{-s\tilde{\tau}^+(u-\beta)}(K - e^{\beta-\tilde{\gamma}^+(u-\beta)})_+\right]$. Тобто $\Phi_s^{a,b}(u-\beta)$ з $w(x,y) = (K - e^{\beta-y})_+$ можна також розглядати як ціну довічного американського пут опціону [10, с.12].

Теорема 2. *Для модифікованого процесу* $\{\xi_{a,b}(t), x(t)\}$:

1) *якщо* $0 < u \leq b$, *то*

$$f_s^{a,b}(dx, dy/u) = f_{b,s}^+(dx, dy/u) + B_b(s,u) \int_0^\infty Ce^{-Cz} f_s^{a,b}(dx, dy/z+b)dz; \quad (10)$$

2) *якщо* $b < u$, *то*

$$f_s^{a,b}(dx, dy/u) = f_s^*(dx-a, dy+a/u-a)I\{x > a\} + \int_0^a g_s^*(dz/u-a) \times$$

$$\times\left(f^+_{b,s}(dx,dy/a-z)+B_b(s,a-z)\int\limits_0^\infty Ce^{-Cv}f_s^{a,b}(dx,dy/v+b)dv\right), \tag{11}$$

де

$$\left(I-\int\limits_0^\infty Ce^{-Cz}\int\limits_0^a g_s^*(dv/b-a+z)B_b(s,a-v)dz\right)\int\limits_0^\infty Ce^{-Cz}f_s^{a,b}(dx,dy/z+b)dz=$$

$$=\int\limits_0^\infty Ce^{-Cz}\Bigg(f_s^*(dx-a,dy+a/b-a+z)I\{x>a\}+$$

$$+\int\limits_0^a g_s^*(dv/b-a+z)f^+_{b,s}(dx,dy/a-v)\Bigg)dz. \tag{12}$$

Доведення. Співвідношення (10) є аналогом результату роботи [6]. Використовуючи формулу повної ймовірності та строго марковську властивість, для випадку $u>b$ виводимо

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tilde\tau^+(u)},\tilde\gamma_+(u)\in dx,\tilde\gamma^+(u)\in dy,\tilde\tau^+(u)<\infty\right]=$$

$$=\mathrm{E}\Bigg[e^{-s\tau^+_*(u-a)},\gamma^*_+(u-a)+a\in dx,\gamma^+_*(u-a)-a\in dy,$$

$$\gamma^+_*(u-a)>a,\tau^+_*(u-a)<\infty\Bigg]+$$

$$+\int\limits_0^a \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+_*(u-a)},\gamma^+_*(u-a)\in dz,\tau^+_*(u-a)<\infty\right]\times$$

$$\times\mathrm{E}\left[e^{-s\tilde\tau^+(a-z)},\tilde\gamma_+(a-z)\in dx,\tilde\gamma^+(a-z)\in dy,\tilde\tau^+(a-z)<\infty\right]. \tag{13}$$

Звідси випливає (11). Після інтегрального перетворення з (11) отримуємо (12).

Теорему доведено.

Зауважимо, що для скалярного випадку ($m=1$) матричні співвідношення дещо спрощуються. Якщо покласти $w(x,y)=1$, то $\Phi_0^{a,b}(u)$ визначає ймовірність банкрутства для модифікованого процесу.

***Наслідок* 1.** *Для скалярного модифікованого процесу* $\xi_{a,b}(t)$:

1) *якщо* $0<u\le b$, *то*

$$\Phi_0^{a,b}(u)=1-B_b(u)\left(1-\int\limits_0^a g_*(dz/b-a+\theta_c')B_b(a-z)\right)^{-1}P^*_+(b-a+\theta_c'); \tag{14}$$

2) *якщо* $b<u$, *то*

$$\Phi_0^{a,b}(u)=P^*_+(u-a)-\int\limits_0^a g_*(dz/u-a)B_b(a-z)\times$$

$$\times \left(1 - \int_0^a g_*(dz/b - a + \theta_c')B_b(a-z)\right)^{-1} P_+^*(b - a + \theta_c'), \qquad (15)$$

де $P_+^*(b-a+\theta_c') = \int_0^\infty ce^{-cx}\mathrm{P}\{\xi_*^+ < b - a + x\}dx$, $g_*(dz/b - a + \theta_c') = = \int_0^\infty ce^{-cx}\{\gamma_*^+(b-a+x) \in dz,\, \tau_*^+(b-a+x) < \infty\}dx.$

Приклад. Припустимо, що для скалярного процесу ризику премії ξ_n' мають показниковий розподіл з параметром $\tilde{c}$, а величини вимог ξ_n мають розподіл Ерланга (2)

$$\mathrm{P}\{\xi_n < x\} = \delta^2 x e^{-\delta x}, x > 0.$$

Знайдемо відповідну ймовірність банкрутства при $u \leq b$.

Згідно з прикладом 5.2 [3], при $\mathrm{E}\xi(1) < 0$ та $\mathrm{E}\xi_*(1) < 0$

$$\mathrm{P}\left\{\xi_*^+ < u\right\} = P_+^*(u) = 1 - a_1^* e^{-r_1^* u} - a_2^* e^{-r_2^* u};$$

$$M_+^*(0+) = \frac{1}{\lambda}, \quad dM_+^*(x) = \frac{1}{c_*|\mathrm{E}\xi_*(1)|}dP_+^*(x), \quad R^-(0) = p^-(0) = 0,$$

$$B_b(u) = \left(1 - a_1 e^{-r_1 u} - a_2 e^{-r_2 u}\right)\left(1 - b_1 e^{-r_1 b} - b_2 e^{-r_2 b}\right)^{-1},$$

де величини a_i, a_i^*, b_i не залежать від u та b; r_i та r_i^* — додатні корені рівняння Лундберга для процесів $\xi(t)$ та $\xi_*(t)$ відповідно. Використовуючи (5), з (14) одержуємо $(u \leq b)$

$$\mathrm{P}\left\{\tilde{\tau}^+(u) < \infty\right\} = 1 - \frac{(1 - a_1 e^{-r_1 u} - a_2 e^{-r_2 u})(1 - f_1^* e^{-r_1^*(b-a)} - f_2^* e^{-r_2^*(b-a)})}{P(u,a,b)}, \qquad (16)$$

$$P(u,a,b) = 1 - f_2 e^{-r_1 b} - f_3 e^{-r_2 b} + (g_{11} + g_{12}(b-a))e^{-\delta(b-a)} +$$

$$+ (g_{21} + g_{22}(b-a))e^{-\delta(b-a) - r_1 a} + (g_{31} + g_{32}(b-a))e^{-\delta(b-a) - r_2 a},$$

де f_i, f_i^* та g_{ij} не залежать від u, a та b.

Припустимо, що $c = 1$, $c_* = 4$, $\delta = 20$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, тоді $\mathrm{E}\,\xi(1) = -19/10$, $\mathrm{E}\,\xi_*(1) = -2/5$. Відповідними коренями Лундберга є $r_1 = 8$, $r_2 = 95/3$ та $r_1^* = = 20/3$, $r_2^* = 32$.

Крім того, розподіл абсолютного максимуму процесу $\xi_*(t)$ та ймовірність виходу процесу $\xi(t)$ з інтервалу $(u - b, b)$ через нижню межу мають відповідно зображення

$$\mathrm{P}\left\{\xi_*^+ < u\right\} = 1 - \left(\frac{32}{57}e^{-20x/3} - \frac{9}{95}e^{-32x}\right),$$

$$B_b(u) = \mathrm{P}\left\{\xi(\tau(u,b)) \leq u - b\right\} = \frac{1 + \dfrac{49}{426}e^{-95u/3} - \dfrac{171}{355}e^{-8u}}{1 + \dfrac{1}{284}e^{-95b/3} - \dfrac{19}{355}e^{-8b}}.$$

Якщо $a = b$, то з (16) для ймовірності банкрутства одержуємо

$$P\left\{\tilde{\tau}^{+}(u) < \infty\right\} = 1 - \frac{1 + \dfrac{49}{426}e^{-95u/3} - \dfrac{171}{355}e^{-8u}}{1 - \dfrac{45}{111328}e^{-95b/3} + \dfrac{19}{852}e^{-8b}}.$$

1. *Карнаух Є. В.* Двограничні задачі для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 4. – С. 555 – 565.
2. *Карнаух Є. В.* Перестрибкові функціонали для майже півнеперервних процесів на ланцюгу Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2007. – **76**. – С. 45 – 53.
3. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – 460 с.
4. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: World Sci., 2000. – 385 p.
5. *Jasiulewicz H.* Probability of ruin with variable premium rate in a Markovian environment // Insurance: Math. and Econ. – 2001. – **29**. – P. 291 – 296.
6. *Bratiychuk M. S., Derfla D.* On a modification of the classical risk process // Ibid. – 2007. – **41**. – P. 156 – 162.
7. *Rolsky T., Shmidly H., Shmidt V., Teugels J.* Stochastic processes for insurance and finance. – New York: John Wiley, 1999. – 654 p.
8. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами, заданими на ланцюгу Маркова, та напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
9. *Gerber H. U., Shiu S. W.* On the time value of ruin // North Amer. Actuar. J. – 1998. – **2**, № 1. – P. 48 – 78.
10. *Gerber H. U., Shiu S. W.* From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put optoins // Insurance: Math. and Econ. – 1999. – **24**. – P. 3 – 14.

Одержано 04.04.08,
після доопрацювання — 19.02.09