УДК 517.929

В. И. Борздыко (Ин-т математики АН Республики Таджикистан, Душанбе)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ „ХИЩНИК-ЖЕРТВА” С НЕПРЕРЫВНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

The existence of positive ω-periodic solutions for some predator-prey systems with distributed time delay of an argument is established for the case where parameters of these systems are defined by periodic continuous positive functions with period ω.

Встановлено існування додатних ω-періодичних розв'язків для деяких систем „хижак-жертва”, що містять неперервне запізнювання аргументу, у випадку, коли параметри цих систем визначаються ω-періодичними неперервними додатними функціями.

Многие математические модели в экологии записываются в виде систем функционально-дифференциальных уравнений с непрерывным запаздыванием [1, 2, 3, с. 386]. Если коэффициенты системы являются периодическими функциями от времени t, то это отражает тот факт, что при описании экологической системы учитываются периодические изменения внешней среды. В настоящей статье при исследовании вопроса о существовании положительных периодических решений такого вида математических моделей „хищник-жертва” применен в несколько уточненном виде метод, который ранее применялся автором для исследования систем с дискретным запаздыванием: модели „хищник-жертва” Вангерски и Каннингэма [4] и уравнения Хатчинсона [5].

1. Приведем краткое, несколько уточненное изложение метода, который в дальнейшем будет применен для исследования математико-экологических моделей. Этот метод является реализацией и модификацией для некоторого достаточно широкого класса функционально-дифференциальных уравнений „альтернативного принципа” М. А. Красносельского, предложенного им в общей форме для доказательства теорем о существовании периодических решений функционально-дифференциальных уравнений [6]. Более подробное изложение метода в применении к некоторому несколько более узкому классу функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием содержится в [4, 5, 7].

Обозначим через C_n пространство непрерывных на отрезке $[0,\omega]$ вектор-функций $x(t)$, имеющих значения в R^n с нормой $\|x\|_{C_n} = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|x(t)\|$, где через $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма элемента в R^n. Будем обозначать через $\widetilde{x}(t)$ ω-периодическое продолжение вектор-функции $x(t)\in C_n$ с полуинтервала $(0,\omega]$ на всю ось $(-\infty,+\infty)$. Вектор-функция $\widetilde{x}(t)$ кусочно-непрерывна и ее компоненты $\widetilde{x}_i(t)$, $i=1,\ldots,n$, могут иметь разрывы 1-го рода только в точках $s_k = k\omega$, $k=0,\pm1,\ldots$. Обозначим этот класс вектор-функций $\widetilde{x}(t)$ через L.

Рассмотрим в евклидовом пространстве R^n функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x_t). \tag{1}$$

Здесь символом x_t обозначена вектор-функция $x(s)$ со значениями в R^n, определенная при $-\infty < s \le t$ и принадлежащая некоторому классу вектор-функций D, содержащему L; $F(t,x_t)\colon R^1 \times D \to R^n$.

Для системы (1) основная начальная задача формулируется следующим образом. Наряду с (1) рассматривается начальное условие $x(t)=\varphi(t)$, $-\infty < t \le t_0$, где $\varphi(t)$ — некоторая ограниченная кусочно-непрерывная вектор-функция, называемая начальной вектор-функцией. Под решением основной начальной задачи понимается вектор-функция $x(t)$, $-\infty < t \le H$, $t_0 < H < \infty$, удовлетворяющая на $(-\infty, t_0]$ начальному условию, абсолютно непрерывная на $[t_0, H]$ и почти всюду на $[t_0, H]$ удовлетворяющая системе (1). Вопрос о разрешимости основной начальной задачи для (1) рассмотрен, например, в [8].

В дальнейшем предполагается, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям: а) $F(t+\omega, x_{t+\omega}) = F(t,x_t)$ для любой $x(s)\in L$; б) при любой $x(s) \in L$ вектор-функция $F(t,x_t)$ суммируема на $[0,\omega]$; в) для любого $r>0$ существует такая суммируемая функция $P_r(t) \in L_1[0,\omega]$, что $\|F(t,y_t)\| \le P_r(t)$, $t\in[0,\omega]$, если $y(s)\in L$ и $\sup\limits_{0\le s\le\omega} \|y(s)\| \le r$; г) если $x^{(n)}(s)$, $x(s)\in L$, $n=1,2,\ldots$, и $\sup\limits_{0\le s\le\omega} \|x^{(n)}(s)-x(s)\| \to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\int\limits_0^t F(\tau, x_\tau^{(n)})d\tau \to \int\limits_0^t F(\tau, x_\tau)d\tau$$

при $n\to\infty$ равномерно на отрезке $[0,\omega]$, т. е. имеет место интегральная непрерывность оператора $F(t,x_t)$; д) $F_i(t,x_t)\ge 0$, $i=1,2,\ldots,n$, если $x_j(s)\ge 0$, $-\infty < s\le t$, $j=1,2,\ldots,n$, и $x_i(t)=0$.

Отметим, что в [4] через L в аналогичных условиях был обозначен более широкий класс вектор-функций, т. е. на $F[t,x_t]$ накладывались более жесткие ограничения.

Пусть $\psi(t,x)\colon (-\infty,+\infty)\times R^n \to R^n$ — некоторая непрерывная и ω-периодическая по t вектор-функция, причем

$$\psi_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\ge 0, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

для любых $x_j\ge 0$, $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$. Здесь $\psi_i(t,x)$ — i-я компонента вектор-функции $\psi(t,x)$.

Построим по уравнению (1) семейство уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = F\big[t, \lambda x_t + (1-\lambda)\overline{x}_t\big] + (1-\lambda)\psi(t,x), \tag{3_λ}$$

где параметр $\lambda\in[0,1]$, а вектор-функция $\overline{x}(s)$ определяется по вектор-функции $x(s)$ равенством $\overline{x}(s)=x(t)$, $-\infty < s\le t$. Уравнение (3_1) совпадает с уравнением (1). Уравнение (3_0) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которое легко определить, зная конкретный вид уравнения (1).

Рассмотрим в пространстве R^nконус K векторов с неотрицательными компонентами $K=\big\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n;\, x_i\ge 0,\, i=1,\ldots,n\big\}$ [9].

Определим в пространстве C_n оператор

$$A(\lambda, x) = Qx(\omega) + \int_0^t \Big\{ F\big[\tau, \lambda Q\widetilde{x_\tau} + (1-\lambda)Q\overline{x}_\tau\big] +$$

$$+ (1-\lambda)\psi\big[\tau, Qx(\tau)\big] + \rho\big[x(\tau), K\big]u_0 \Big\} d\tau. \tag{4}$$

Здесь u_0 — внутренний элемент конуса K, Q — оператор в пространстве R^n, определенный равенством $Qx = z$, $x \in R^n$ где z — такой элемент из K, что $\|x - z\| = \rho(x, K)$; $\rho(x, K)$ — расстояние от x до конуса K.

В силу условий б) – г) для оператора $F(t, x_t)$ оператор (4) вполне непрерывен на топологическом произведении $[0, 1] \times C_n$ так же, как это было при более жестких ограничениях на $F(t, x_t)$, определенных в [4]. Этот факт лежит в основе метода и обеспечивает его применимость [4].

Пусть $x, y \in R^n$. Записывают $x \geq y$ или $y \leq x$, если $x - y \in K$, т. е. $x_i \geq y_i$, $i = 1, \ldots, n$, и $x \overline{\geq} y$ или $y \overline{\leq} x$, если $x - y \overline{\in} K$. Оператор B, действующий в R^n, называется положительным, если $B(K) \subset K$. Говорят [9, с. 145], что положительный оператор B „сжимает” конус K, если существуют такие числа $M > m > 0$, что

$$Bx \overline{\leq} x, \qquad x \in K, \quad \|x\| \leq m, \tag{5}$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$Bx \overline{\geq} (1+\varepsilon)x, \quad x \in K, \ \|x\| \geq M; \qquad Bx \neq x, \quad x \in K, \quad \|x\| = M. \tag{6}$$

Говорят [9, с. 157], что положительный оператор B „растягивает” конус K, если существуют такие числа $M > m > 0$, что $Bx \overline{\leq} x$, $x \in K$, $\|x\| \geq M$, и для любого $\varepsilon > 0$ $Bx \overline{\geq} (1+\varepsilon)x$, $x \in K$, $\|x\| \leq m$; $Bx \neq x$, $x \in K$, $\|x\| = m$.

Будем говорить, что решение $x(t) = \big\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\big\}$ системы (3_λ) положительно, если $x(t) \in K$, т. е. $x_i(t) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, при любом t.

Предположим, что на конусе K определен оператор сдвига по траекториям системы (3_0) за период ω, заданный равенством $Ux_0 = p(\omega, 0, x_0)$, $x_0 \in K$, где $p(t, 0, x_0)$ — решение системы (3_0), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$ [10, с. 12]. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [5]. *Пусть существуют такие положительные числа d_1 и D_1, что если $x(t)$ — ненулевое положительное ω-периодическое решение системы (3_λ) при каком-либо $\lambda \in [0, 1]$, то $d_1 < \|x\|_{C_n} < D_1$. При этом существует такое число $d_2 > 0$, что для любого ненулевого положительного ω-периодического решения $x(t)$ системы (3_0) имеет место неравенство $\|x(0)\| > d_2$. Пусть оператор сдвига U системы (3_0) „сжимает” или „растягивает” конус K. Тогда система (1) имеет по крайней мере одно нетривиальное положительное ω-периодическое решение.*

Справедливость теоремы 1 для системы (1) обеспечивают условия а) – д) для оператора $F(t, x_t)$ и свойства функции $\psi(t, x)$, что доказывается так же, как в [4].

2. Рассмотрим модели „хищник-жертва”, являющиеся обобщением подобных моделей Кашинга [2]:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a(t)x_1(t) - b_1(t)x_1(t)\int_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_1(t,h) -$$

$$-c_1(t)\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_2(t,h)\int\limits_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_3(t,h)+f(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-e(t)x_2(t)-b_2(t)x_2^2(t)+ \tag{7^1}$$

$$+c_2(t)\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_4(t,h)\int\limits_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_5(t,h)+g(t)$$

при $b_2(t)>0,\ -\infty<t<+\infty$,

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=a(t)x_1(t)-b_1(t)x_1(t)\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_1(t,h)-$$

$$-\,c_1(t)x_1(t)\int\limits_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_2(t,h)+f(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-e(t)x_2(t)-b_2(t)x_2^2(t)\,+ \tag{7^2}$$

$$+\,c_2(t)\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_3(t,h)\int\limits_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_4(t,h)+g(t)$$

при $b_2(t)>0,\ -\infty<t<+\infty$, и при $b_2(t)\equiv 0,\ -\infty<t<+\infty$, и

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=a(t)x_1(t)-b_1(t)x_1(t)\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_1(t,h)-$$

$$-\,c_1(t)x_1(t)\int_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_2(t,h)+f(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-e(t)x_2(t)-b_2(t)x_2(t)\int\limits_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_0(t,h)\,+ \tag{7^3}$$

$$+\,c_2(t)x_2(t)\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_3(t,h)+g(t)$$

при $b_2(t)\geq 0,\ -\infty<t<+\infty$. Здесь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — плотности в момент времени t популяций жертвы и хищника соответственно; интегралы Стильтьеса отражают при $j=0,1$ влияние лимитирования ресурсов у популяций хищника и жертвы соответственно, а при $j=2,3,4,5$ влияние контактов в прошедшие времена между хищником и жертвой на скорости роста плотностей обоих видов.

В дальнейшем предполагается, что функции $\alpha_j(t,h),\ j=0,1,\ldots,5$, в системах ($7^i$), $i=1,2,3$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $\alpha(t,h)$ является монотонно неубывающей функцией по h, т. е. $d_h\alpha(t,h) \geq 0$ при любых $t \in [0,\infty)$, $h \in [0,\infty)$;

2) $\alpha(t+\omega,h) \equiv \alpha(t,h)$ при любых $t \in [0,\infty)$, $h \in [0,\infty)$;

3) $0 < l_j^{(0)} \leq \int_0^\infty d_h\alpha_j(t,h) = l_j(t) \leq \bar{l}_j < +\infty$, где $l_j^{(0)}$, $\bar{l}_j$ — постоянные, $j = 0,1,\ldots,5$, $t \in [0,\omega]$;

4) $\alpha(t,0) \equiv 0$ при $t \in [0,\omega]$.

Системы (7^i), $i = 1,2,3$ (в общем, индекс i будем опускать), являются частными случаями уравнения (1) при $R^n = R^2$. Введем обозначения для интегралов Стильтьеса

$$I(t) = \int_0^\infty \widetilde{x}(t-h)d_h\alpha(t,h) \quad \text{и} \quad I_0(t) = \int_0^A \widetilde{x}(t-h)d_h\alpha(t,h),$$

где $0 < A < +\infty$, функция $x(t) \in C$. Здесь C — пространство непрерывных на $[0,\omega]$ функций с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{0\leq t\leq\omega} |x(t)|$; $\widetilde{x}(s)$ — ω-периодическое продолжение функции $x(t)$ с промежутка $(0,\omega]$ на всю ось; функция $\alpha(t,h)$ удовлетворяет условиям 1 – 4.

Лемма 1. *Пусть функция $\alpha(t,h)$ непрерывна по h при $h \in [0,\infty)$ равномерно относительно $t \in [0,\omega]$. Тогда интегралы $I_0(t)$, $I(t)$ существуют и являются непрерывными ω-периодическими функциями при $t \in [0,\infty)$.*

Доказательство. Поскольку функция $\widetilde{x}(t-h)$ ограничена и при каждых фиксированных $t \in [0,\omega]$ и $A > 0$ может иметь разрывы 1-го рода только в точках конечного множества

$$G = \big\{h_k \in [0,A], \quad h_k = t - k\omega, \quad k = 1,0,-1,\ldots,-k_A\big\}, \tag{8}$$

из условий леммы следует,что интегралы $I_0(t), I(t)$ существуют [11, с. 317, 323]. Пусть $t \in [0,\omega]$ фиксировано. При фиксированном $A > 0$ рассмотрим разность интегралов

$$\big|I_0(t+\Delta t) - I_0(t)\big| =$$
$$= \left|\int_0^A \widetilde{x}(t+\Delta t-h)d_h\alpha(t+\Delta t,h) - \int_0^A \widetilde{x}(t-h)d_h\alpha(t,h)\right| \tag{9}$$

и соответствующую разность интегральных сумм

$$\big|S(t+\Delta t) - S(t)\big| =$$
$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \big[\widetilde{x}(t+\Delta t-\xi_i) - \widetilde{x}(t-\xi_i)\big]\big[\alpha(t+\Delta t,h_{i+1}) - \alpha(t+\Delta t,h_i)\big] + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{x}(t-\xi_i)\Big\{\alpha(t+\Delta t,h_{i+1}) - \alpha(t,h_{i+1}) - \big[\alpha(t+\Delta t,h_i) - \alpha(t,h_i)\big]\Big\}\right| \tag{10}$$

при некотором разбиении отрезка $[0,A]$: $0 \leq h_0 < h_1 < \ldots < h_n = A$ и произвольном выборе точек $\xi_i \in [h_i,h_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. Оцениваем разность (10), если шаг разбиения $\lambda > 0$ достаточно мал. При этом учитываем, что $\widetilde{x}(s)$ равномерно непрерывна на множестве $\big\{s = t - h;\ h \in [0, A] - G\big\}$ и количество элементов множества индексов в (10), при которых $\xi_i \in G$, ограничено числом $k_A + 2$. Поэтому в силу условий 1, 3, 4 при заданном $t \in [0, \omega]$, достаточно малых $|\Delta t|$ и $\lambda > 0$ разность (10) сколь угодно мала. Отсюда следует малость разности (9) и, следовательно, непрерывность интеграла $I_0(t)$, а также, очевидно, интеграла $I(t)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция $\alpha(t, h)$ принимает конечные значения при $t \in [0, \infty)$, $h \in [0, \infty)$, удовлетворяет условиям $1-4$, непрерывна по h при $h \in [0, \infty)$, измерима по t на $0 \leq t \leq \omega$. Тогда интегралы $I_0(t)$ (при любом $A > 0$)и $I(t)$ существуют, являются ограниченными измеримыми функциями по t на $[0, \omega]$ и ω-периодическими по t на $[0, \infty]$.*

Доказательство. Существование интегралов $I_0(t)$ и $I(t)$ вытекает из условий леммы и из [11, с. 317, 323]. Разобьем отрезок $[0, A]$ точками деления $0 < c_0 < < c_1 < \ldots < c_n = A$, $c_{i+1} - c_i = An^{-1}$. Построим при каждых фиксированных $t \in [0, \omega]$ и натуральном n ломаную, заданную формулами

$$\alpha_n(t, h) = \begin{cases} \alpha(t, c_i) \quad \text{при} \;\; h = c_i; \\[2mm] \alpha(t, c_i) + nA^{-1}\big[\alpha(t, c_{i+1}) - \alpha(t, c_i)\big](h - c_i) \\[2mm] \qquad\qquad \text{при} \;\; c_i \leq h \leq c_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{11}$$

Функции $\alpha_n(t, h)$ монотонно не убывают и непрерывны по h на $[0, A]$, а также суммируемы по t на $[0, \omega]$. Имеет место неравенство $\big|\alpha_n(t, h) - \alpha(t, h)\big| \leq \leq \alpha(t, c_{i+1}) - \alpha(t, c_i)$ при $c_i \leq h \leq c_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому при каждом фиксированном $t \in [0, \omega]$

$$\alpha_n(t, h) \rightrightarrows \alpha(t, h) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{12}$$

сходится равномерно относительно $h \in [0, A]$. При каждых A, $0 < A < \infty$, и $t \in [0, \omega]$ интеграл $I^{(n)}(t) = \displaystyle\int_0^A \widetilde{x}(t - h) d_h \alpha_n(t, h)$ существует.

Можно показать, что

$$I^{(n)}(t) \to I_0(t) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Для этого $[0, A]$ разбиваем точками $h_k \in G$ в порядке их возрастания (см. (8)). Из ограниченности $\widetilde{x}(s)$ на $(-\infty, \infty)$, свойства равномерной непрерывности функции $\alpha(t, h)$ по h на $[0, A]$ при фиксированном $t \in [0, \omega]$ и (12) вытекает малость интегралов

$$\int\limits_{h_j}^{h_j + \delta} \widetilde{x}(t - h) d_h \alpha(t, h), \qquad \int\limits_{h_j}^{h_j + \delta} \widetilde{x}(t - h) d_h \alpha_n(t, h)$$

при достаточно малом $\delta > 0$. Поскольку полные изменения на $[0, A]$ неубывающих функций $\alpha(t, h)$, $\alpha_n(t, h)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены одним и тем же числом $\alpha(t, A) - \alpha(t, 0)$, в силу (12) и теоремы Э. Хелли [12, с. 254]

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{h_j+\delta}^{h_{j+1}}\widetilde{x}(t-h)d_h\alpha_n(t,h)=\int\limits_{h_j+\delta}^{h_{j+1}}\widetilde{x}(t-h)d_h\alpha(t,h).$$

Отсюда следует (13). В силу (11) и леммы 1 интегралы $I^{(n)}(t)$, $n=1,2,\ldots$, являются измеримыми функциями на $[0,\omega]$. Следовательно, в силу (13) $I_0(t)$ является измеримой функцией на $[0,\omega]$ при любом $A>0$, а потому $I(t)$ также измерима на $[0,\omega]$ [12, с. 106].

Лемма доказана.

***Замечание* 1.** Если в системах (7) какие-то интегралы Стильтьеса заменены функциями вида $x_i[t-\sigma_j(t)]$, где функции запаздывания $\sigma_j(t)$ являются ω-периодическими, измеримыми почти всюду конечными неотрицательными функциями на $[o,\omega]$, то такие системы можно записывать в виде системы (7) с интегралами Стильтьеса при определенным образом подобранных функциях $\alpha_j(t,h)$. Поэтому системы (7) могут описывать разнообразные варианты систем „хищник-жертва”, для которых возможно применение теоремы 1. В частности, ее можно применять к моделям „хищник-жертва” из работ [13, 14], которые содержат $x_j[t-\sigma_j(t)]$ с непрерывными периодическими $\sigma_j(t)$ и непрерывные периодические по t коэффициенты.

Относительно коэффициентов систем (7) в дальнейшем предполагается, что они являются непрерывными ω-периодическими функциями, удовлетворяющими условиям

$$\begin{gathered}
a(t)>0,\quad e(t)>0,\quad b_1(t)>0,\quad c_2(t)\geq 0,\quad g(t)\geq 0,\quad f(t)\geq 0,\quad t\in[0,\omega];\\
b_2(t)>0,\quad t\in[0,\omega]\quad \text{в системе } (7^1);\\
b_2(t)>0,\quad t\in[0,\omega],\quad \text{либо}\quad b_2(t)\equiv 0,\quad t\in[0,\omega]\quad \text{в системе } (7^2);\\
b_2(t)\geq 0,\quad t\in[0,\omega]\quad \text{в системе } (7^3);\\
c_1(t)\geq 0,\quad t\in[0,\omega]\quad \text{в системе } (7^1)\quad \text{и}\\
c_1(t)>0,\quad t\in[0,\omega]\quad \text{в системах } (7^2),\ (7^3).
\end{gathered}\tag{14}$$

При обозначениях

$$c(t)=c_1(t)-c_2(t),\qquad \Delta(t)=c^2(t)-4b_1(t)b_2(t)\tag{15}$$

должны выполняться условия:

$$c(t)\geq 0,\quad t\in[0,\omega],\tag{16}$$

либо, если

$$c(t^*)<0\quad \text{при некотором}\quad t^*\in[0,\omega],\tag{17}$$

$$\Delta(t^*)\leq 0,\tag{18}$$

при этом если $\Delta(t^*)=0$, то

$$a(t^*)\sqrt{b_2(t^*)}-e(t^*)\sqrt{b_1(t^*)}<-d<0.\tag{19}$$

Теорема 2. *Пусть все коэффициенты рассматриваемой системы из числа систем* (7) *являются непрерывными ω-периодическими функциями, удовлетворяющими условиям* (14) – (19), *а функции $\alpha_j(t,h)$ в этой системе удовлетворяют условиям* 1 – 4 *и условиям леммы* 1 *или* 2. *Тогда эта система имеет по крайней мере одно нетривиальное неотрицательное ω-периодическое решение $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$, $t \in [0,\omega]$; при этом, если в системах* (7^2), (7^3) *соответственно $f(t) \not\equiv 0$, $g(t) \not\equiv 0$, то $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $t \in [0,\omega]$.*

Доказательство. I. В силу условий на коэффициенты (14), ограничений 1 – 4 на функции $\alpha_j(t,h)$, $j = 0, 1, \ldots, 5$, леммы 1 или 2 системы (7) являются системами функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием вида (1) (для случая $n = 2$), правые части которых удовлетворяют условиям а) – д).

Рассмотрим для системы (7^1) систему вида (3_λ):

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a(t)x_1(t) - b_1(t)x_1(t)\left[\lambda\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_1(t,h) + (1-\lambda)x_1(t)\right] -$$

$$-c_1(t)\left[\lambda\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_2(t,h) + (1-\lambda)x_1(t)\right]\times$$

$$\times\left[\lambda\int\limits_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_3(t,h) + (1-\lambda)x_2(t)\right] + (1-\lambda)h_0 + f(t),$$

$$(20^1_\lambda)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -e(t)x_2(t) - b_2(t)x_2^2(t) + c_2(t)\left[\lambda\int\limits_0^\infty x_1(t-h)d_h\alpha_4(t,h) +\right.$$

$$\left.+(1-\lambda)x_1(t)\right]\left[\lambda\int\limits_0^\infty x_2(t-h)d_h\alpha_5(t,h) + (1-\lambda)x_2(t)\right] + g(t).$$

Системы (20^i_λ), $i = 2, 3$, конструируются аналогично.

II. Рассмотрим в евклидовом пространстве R^2 конус векторов с неотрицательными компонентами

$$\mathcal{K} = \big\{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2\big\}. \tag{21}$$

Проведем доказательства в этом пункте на примере системы (20^1_λ). Покажем, что существуют такие числа $\mathcal{D}_1 > 0$, $d_1 > 0$, что если $x(t) = \big\{x_1(t), x_2(t)\big\}$ — какое-либо нетривиальное положительное относительно конуса $\mathcal{K}$ ω-периодическое решение системы (20^1_λ) при некотором $\lambda \in [0,1]$, то оно удовлетворяет неравенству

$$d_1 \leq \|x\|_{C_2} \leq \mathcal{D}_1. \tag{22}$$

Докажем сначала левую часть неравенства (22). Предположим противное. Тогда существует такая последовательность нетривиальных положительных ω-периодических решений $x^{(m)}(t) = \{x_1^{(m)}(t), x_2^{(m)}(t)\}$ системы (20^1_λ), соответствующих значениям параметра $\lambda_m \in [0,1]$, $m = 1, 2, \ldots$, что

$$\|x^{(m)}\|_{C_2} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{23}$$

Сначала предположим, что

$$x_1^{(m)}(t) \not\equiv 0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{24}$$

При этом можно считать, что

$$x_1^{(m)}(t) \ \not\equiv \ \text{const}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Действительно, если (25) не имеет места, то можно считать, что

$$x_1^{(m)}(t) \equiv k_m \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty, \tag{26}$$

где $k_m = \text{const} \neq 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда из первого уравнения системы (20_λ^1) и из условия 3 следует

$$0 = a(t) - b_1(t)\big[\lambda_m l_1(t) + (1-\lambda_m)\big]k_m - c_1(t) r_m(t) \times$$
$$\times \left[\lambda_m \int\limits_0^\infty x_2^{(m)}(t-h) d_h \alpha_3(t,h) + (1-\lambda_m) x_2^{(m)}(t)\right] + (1-\lambda_m)\frac{h_0}{k_m} + \frac{1}{k_m} f(t), \tag{27}$$

$$r_m(t) = \lambda_m l_2(t) + (1-\lambda_m).$$

Из (23) и условия 3 вытекает [11, с. 319], что

$$\left\|\lambda_m \int\limits_0^\infty x_2^{(m)}(t-h) d_h \alpha_3(t,h) + (1-\lambda_m) x_2^{(m)}(t)\right\|_C \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{28}$$

Поэтому в силу условий (14), (26), (28) правая часть в (27) при больших значениях m положительна при $t \in [0, \omega]$, что приводит к противоречию, которое доказывает справедливость условия (25) при выполнении (23) и (24). Введем обозначение $x_1^{(m)}(t_m) = \max\limits_{0 \le t \le \omega} x_1^{(m)}(t)$. Тогда в силу результатов [11, с. 319], условия 3 и (14), (23), (24)

$$\frac{dx_1^{(m)}(t_m)}{dt} \ge x_1^{(m)}(t_m)\{a(t_m) - b_1(t_m) x_1^{(m)}(t_m)\big[\lambda_m \bar{l}_1 + (1-\lambda_m)\big] -$$
$$- c_1(t_m)\big[\lambda_m \bar{l}_2 + (1-\lambda_m)\big]\big[\lambda_m \bar{l}_3 + (1-\lambda_m)\big]\|x_2^{(m)}\|_C\} +$$
$$+ (1-\lambda_m) h_0 + f(t_m) > 0 \tag{29}$$

при достаточно большом m. Вследствие ω-периодичности функции $x_1^{(m)}(t)$ неравенство (29) противоречит определению момента t_m. Итак, (23) при условии (24) невозможно.

Пусть теперь выполняется (24) и при этом

$$\lambda_m = 1, \qquad x_1^{(m)}(t) \equiv 0, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad f(t) \equiv 0. \tag{30}$$

В силу (14), (30) из второго уравнения (20^1_λ) при $g(t) \not\equiv 0$ при достаточно большом m имеем $\dfrac{dx_2^{(m)}(t)}{dt} > r_0 > 0$ на некотором промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset (0, \omega)$, $\varepsilon > 0$, что приводит к противоречию с (23). При $g(t) \equiv 0$ получаем при достаточно большом m неравенства $\dfrac{dx_2^{(m)}(t)}{dt} \leq 0$, $t \in [0, \omega]$, и $\dfrac{dx_2^{(m)}(t)}{dt} < 0$ при $x_2^{(m)}(t) > 0$, противоречащие ω-периодичности $x_2^{(m)}(t)$. Это доказывает левую часть оценки (22).

Докажем теперь правую часть неравенства (22). Предположим, что оно не выполняется. Тогда существует последовательность ω-периодических неотрицательных решений системы (20^1_λ) $x^{(m)}(t) = \left\{x_1^{(m)}(t), x_2^{(m)}(t)\right\}$, соответствующих λ_m, такая, что

$$\|x^{(m)}(t)\|_{C_2} \to \infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{31}$$

Пусть

$$x_1^{(m)}(t_m) = \max_{0 \leq \tau \leq \omega} x_1^{(m)}(\tau). \tag{32}$$

Докажем существование конечного числа $\mathcal{D}_2 > 0$ такого, что

$$o \leq x_1^{(m)}(t_m) \leq \mathcal{D}_2, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Для этого покажем, что если (33) не выполняется, то из первого уравнения системы (20^1_λ) при большом m следует неравенство

$$\frac{dx_1^{(m)}(t_m)}{dt} < 0. \tag{34}$$

Действительно, если (33) не выполняется и λ_m не стремится к 1 при $m \to \infty$, то неравенство (34) для больших значений m следует из условия (14). Пусть теперь $\lambda_m \to 1$ и

$$x_1^{(m)}(t_m) \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{35}$$

Введем обозначение $x_1^{(m)}(\bar{t}_m) = \min\limits_{0 \leq \tau \leq \omega} x_1^{(m)}(\tau)$. Докажем, что

$$x_1^{(m)}(\bar{t}_m) \to \infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{36}$$

Действительно, из первого уравнения системы (20^1_λ) следует, что $\dfrac{dx_1^{(m)}(t)}{dt} \leq$ $\leq a(t)x_1^{(m)}(t) + n(t)$, где $n(t) = h_0 + f(t) > 0$. В силу теоремы о дифференциальных неравенствах [15, с. 40] отсюда вытекает, что

$$x_1^{(m)}(t) \leq x_1^{(m)}(\bar{t}_m) \exp\left(\int_{\bar{t}_m}^{t} a(\tau)d\tau\right) + \int_{\bar{t}_m}^{t} n(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{t} a(\tau_1)d\tau_1\right) d\tau \tag{37}$$

при $0 \leq \bar{t}_m \leq t \leq \bar{t}_m + \omega \leq 2\omega$. В силу ω-периодичности функций $x_1^{(m)}(t)$ и условий теоремы из (37) следует, что при выполнении условия (35) должно выполняться и (36). В силу неравенства [11, с. 319] и условий 1, 3, 4

$$0 < x_1^{(m)}(\bar{t}_m) \lim_{A \to \infty} \alpha_1(t_m, A) \leq \int_0^{\infty} x_1^{(m)}(t_m - h) d_h \alpha_1(t_m, h). \tag{38}$$

Из (14), (35), (36), (38) неравенство(34) вытекает для достаточно большого m и при $\lambda_m \to 1$, $m \to \infty$, что противоречит определению моментов t_m. Это доказывает выполнение неравенства (33).

Докажем теперь, что в условиях теоремы

$$0 \le x_2^{(m)}(\widehat{t}_m) \le \mathcal{D}_3, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{39}$$

где $x_2^{(m)}(\widehat{t}_m) = \max\limits_{0 \le \tau \le \omega} x_2^{(m)}(\tau)$, $\mathcal{D}_3 > 0$ — некоторое конечное число.

Предположим, что (39) не имеет места. Тогда можно считать, что

$$x_2^{(m)}(\widehat{t}_m) \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{40}$$

Из (40) в силу (14), (33) и условий 1, 3, 4 при достаточно большом m согласно [11, с. 319] для системы (20_λ^1) следует неравенство

$$\frac{dx_2^{(m)}(\widehat{t}_m)}{dt} \le -e(\widehat{t}_m)x_2^{(m)}(\widehat{t}_m) - b_2(\widehat{t}_m)\left[x_2^{(m)}(\widehat{t}_m)\right]^2 +$$

$$+c_2(\widehat{t}_m)(\bar{l}_4 + 1)\mathcal{D}_2(\bar{l}_5 + 1)x_2^{(m)}(\widehat{t}_m) + g(\widehat{t}_m) < 0. \tag{41}$$

Но неравенство (41) противоречит определению моментов $\widehat{t}_m$. Это доказывает справедливость оценки (39). При доказательстве оценки (39) для систем (20_λ^i), $i = 2, 3$, используются неравенства $0 \le x_1^{(m)}(t_m)x_2^{(m)}(t_m^*) \le D_4$, где $x_2^{(m)}(t_m^*) = \min\limits_{0 \le \tau \le \omega} x_2^{(m)}(\tau)$, $0 < D_4 < \infty$ — некоторая постоянная, и $x_2^{(m)}(\widehat{t}_m) \le \exp(\bar{e}\omega)x_2^{(m)}(t)$, $t \in [0, \omega]$, где $\bar{e} = \max\limits_{0 \le \tau \le \omega} e(\tau) > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, для системы (20_λ^2) при $b_2(t) \equiv 0$.

Из (33) и (39) вытекает справедливость правой части оценки (22). Итак, оценка (22) доказана.

III. Системы (20_0^i), $i = 1, 2, 3$, совпадают и представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую обозначим (20_0).

Докажем существование такого числа $d_2 > 0$, что для любого нетривиального ω-периодического положительного решения системы (20_0) имеет место оценка

$$\min_{0 \le t \le \omega} \|x(t)\| \ge d_2. \tag{42}$$

Действительно, если предположить противное, то существует такая последовательность нетривиальных ω-периодических положительных решений $x_n(t) = \{x_1^{(n)}(t), x_2^{(n)}(t)\}$ системы (20_0), что

$$x_1^{(n)}(t_n) = \min_{0 \le t \le \omega} x_1^{(n)}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{43}$$

где $t_n \in [0, \omega]$, $n = 1, 2, \ldots$. Из (14), (20_0), (22) и (43) вытекает, что при достаточно большом n имеет место неравенство

$$\frac{dx_1^{(n)}(t_n)}{dt} =$$

$$= a(t_n)x_1^{(n)}(t_n) - b_1(t_n)\left[x_1^{(n)}(t_n)\right]^2 - c_1(t_n)x_1^{(n)}(t_n)x_2^{(n)}(t_n) + h_0 + f(t_n) > 0,$$

которое противоречит определению моментов t_n. Это доказывает оценку (42).

Пусть $x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ — некоторое нетривиальное положительное решение системы (20_0). Предположим, что $x_1(t) + x_2(t) = r > 0$, $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$, при некотором $t \in [0, \omega]$. Введем обозначения $x_1^{(0)}(t) = \dfrac{x_1(t)}{r}$, $x_2^{(0)}(t) = \dfrac{x_2(t)}{r}$ и множество $G = \{t \in [0, \omega];\ c(t) \geq 0\}$. В силу условий на коэффициенты (14), (15) при $t \in G$ и достаточно большом r выполняется неравенство

$$\frac{d[x_1(t) + x_2(t)]}{dt} < 0. \tag{44}$$

Рассмотрим множество $B = \{t \in [0, \omega],\ c(t) < 0,\ \Delta(t) \leq 0\}$. Покажем, что при достаточно большом $r > 0$, если $t \in B$, имеет место неравенство

$$\frac{d[x_1(t) + x_2(t)]}{dt} = \left[a(t)x_1^{(0)}(t) - e(t)x_2^{(0)}(t)\right]r -$$

$$- \left\{\left[c(t) + 2\sqrt{b_1(t)}\sqrt{b_2(t)}\right]x_1^{(0)}(t)x_2^{(0)}(t) + \left[\sqrt{b_1(t)}x_1^{(0)}(t) - \sqrt{b_2(t)}x_2^{(0)}(t)\right]^2\right\}r^2 +$$

$$+ h_0 + f(t) + g(t) < 0. \tag{45}$$

В силу условий на коэффициенты (14), (16) – (19) при $t \in B$ и достаточно большом $r > 0$ правая часть в (45) допускает оценку

$$\frac{d[x_1(t) + x_2(t)]}{dt} < -\overline{d}r - \varepsilon r^2 + h_0 + f(t) + g(t),$$

либо

$$\frac{d[x_1(t) + x_2(t)]}{dt} \leq \mathcal{M}r - \varepsilon_0 r^2 + h_0 + f(t) + g(t),$$

где $\overline{d} > 0$, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, $-\infty < M < +\infty$, откуда следует неравенство (45) при достаточно большом $r > 0$. Из (44), (45) вытекает, что

$$x_1(\omega) + x_2(\omega) < x_1(0) + x_2(0), \tag{46}$$

если $x_1(0) + x_2(0)$, $x_1(0) \geq 0$, $x_2(0) \geq 0$, достаточно велико.

В силу условий на коэффициенты (14) и неравенств (44), (45) на конусе $\mathcal{K}$ (см. (21)) определен, положителен и ограничен при $t \in [0, \omega]$ оператор сдвига на промежутке $[0, t]$ по траекториям системы (20_0) [10, с. 62]. Из (46) следует, что оператор сдвига $\mathcal{U}$ за период ω удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} x(\omega) = \mathcal{U}x(0) \in \mathcal{K}, \quad x(0) \in \mathcal{K}, \\ \mathcal{U}x(0) \overline{\geq} x(0), \quad \|x(0)\| \geq R, \end{gathered} \tag{47}$$

где $R > 0$ — достаточное большое число. Из (20_0) имеем

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A(t)x_1(t) + F(t),$$

где $A(t) = a(t) - \left[c_1(t)x_2(t) + b_1(t)x_1(t)\right]$, $F(t) = h_0 + f(t) > 0$, $t \in [0, \omega]$. Пусть $x(0) \in \mathcal{K}$ — начальное условие рассматриваемого решения системы (20_0) — удовлетворяет неравенству

$$\|x(0)\| \leq \delta < \infty, \tag{48}$$

где $\delta > 0$ — некоторое число. Для всех неотрицательных решений $x(t)$ системы (20_0), удовлетворяющих условию (48), имеет место оценка $|A(t)| \leq \mathcal{R} < \infty$, $t \in [0, \omega]$, где $\mathcal{R} > 0$ — некоторая постоянная. Поэтому $x_1(\omega) \geq x_1(0)\exp(-\mathcal{R}\omega) + d \geq d$, где $d = \int^{\omega} F(t_1)\exp[-\mathcal{R}(\omega - t_1)]dt_1 > 0$. Отсюда следует, что если $\|x(0)\| \leq r_0 < \min\{\delta, d\}$, $r_0 > 0$, то $x_1(\omega) > x_1(0)$. Следовательно,

$$\mathcal{U}x(0) = x(\omega) \not\leq x(0), \quad \|x(0)\| \leq r_0, \quad x(0) \in \mathcal{K}, \tag{49}$$

$$\mathcal{U}x(0) \neq x(0), \quad \|x(0)\| = r_0. \tag{50}$$

Из (47), (49), (50) вытекает, что оператор сдвига $\mathcal{U}$ сжимает конус $\mathcal{K}$ (см. (5), (6)). Отсюда и из неравенств (22), (42) в силу теоремы 1 следует, что каждая из систем (20_1), т. е. систем (7), имеет в условиях теоремы 2 по крайней мере одно нетривиальное неотрицательное ω-периодическое решение $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$, $t \in [0, \omega]$.

Пусть $\{x_1(t), x_2(t)\}$ — некоторое ω-периодическое неотрицательное решение системы (7^2) и $f(t) \not\equiv 0$, $g(t) \not\equiv 0$. Докажем, что тогда $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $t \in [0, \omega]$. Из (7^2) при $g(t) \not\equiv 0$ следует, что $x_2(t) \not\equiv 0$. Обозначим через $v(t)$ решение уравнения Бернулли (или линейного уравнения при $b_2(t) \equiv 0$ в (7^2)) $\dfrac{dv}{dt} = -e(t)v - b_2(t)v^2$ с начальным условием $v(t_0) = x_2(t_0) > 0$, $t_0 \in [0, \omega]$. Тогда $v(t) > 0$, $t \in [t_0, \infty)$. В силу дифференциального неравенства $\dfrac{dx_2(t)}{dt} \geq \dfrac{dv(t)}{dt}$, $t_0 \leq t < \infty$, имеет место соотношение [15, с. 40]:

$$x_2(t) \geq v(t) > 0, \quad t_0 \leq t < \infty. \tag{51}$$

Из (7^2) при $f(t) \not\equiv 0$ следует, что $x_1(t_1) = \max\limits_{0 \leq t \leq \omega} x_1(t) > 0$. Введем обозначения

$$f_1(t) = \int\limits_0^{\infty} x_1(t - h)d_h\alpha_1(t, h) \geq 0,$$

$$f_2(t) = \int\limits_0^{\infty} x_2(t - h)d_h\alpha_2(t, h) > 0, \quad t \in [0, \infty),$$

для первого уравнения в (7^2) и обозначим через $u(t)$ решение линейного уравнения $\dfrac{du}{dt} = -\big[b_1(t)f_1(t) + c_1(t)f_2(t)\big]u$ при начальном условии $u(t_1) = x_1(t_1)$. В силу условий на коэффициенты (14) имеет место дифференциальное неравенство $\dfrac{dx_1(t)}{dt} \geq \dfrac{du(t)}{dt}$, $t_1 \leq t < \infty$, и потому [15, с. 40]

$$x_1(t) \geq u(t) > 0, \quad t_1 \leq t < \infty. \tag{52}$$

В силу ω-периодичности функций $x_i(t)$, $i = 1, 2$, из (51), (52) вытекает, что $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $t \in [0, \omega]$.

Для системы (7^3) доказательство проводится аналогично.

Теорема доказана.

***Замечание* 2.** Отметим, что в [14] для модели „хищник-жертва” Мея [13], содержащей дискретные запаздывания в функциях, описывающих численности хищника и жертвы, с коэффициентами, являющимися периодическими функциями от времени t, с помощью другого метода получены достаточные условия существования положительного периодического решения, отличающиеся от тех достаточных условий, которые следуют для модели Мея из теоремы 2.

1. *Cushing J. M.* Periodic solutions of Volterra’s population equation with hereditary effects // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – **31**, № 2. – P. 251 – 261.
2. *Cushing J. M.* Predator-prey interactions with time delays // J. Math. Biol. – 1976. – **3**, № 3-4. – P. 369 – 380.
3. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983. – 397 с.
4. *Борздыко В. И.* Существование положительного периодического решения у системы „хищник-жертва” Вангерски и Каннингэма с учетом периодических изменений внешней среды // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 3. – С. 291 – 297.
5. *Борздыко В. И.* Об одном топологическом методе доказательства существования положительных периодических решений у функционально-дифференциальных уравнений // Там же. – 1990. – **26**, № 10. – С. 1671 – 1678.
6. *Красносельский М. А.* Альтернативный принцип существования периодических решений для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Докл. АН СССР. – 1963. – **152**, № 4. – С. 801 – 804.
7. *Борздыко В. И.* Применение топологических методов в теории положительных периодических решений функционально-дифференциальных уравнений // Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. – 1979. – № 2(72). – С. 22 – 30.
8. *Квапиш М.* О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве // Тр. сем. по теории уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1967. – С. 96 – 110.
9. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
10. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 329 с.
11. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 349 с.
12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Гостехтеориздат, 1957. – 552 с.
13. *May R. M.* Stability and complexity in model ecosystems. – Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1974.
14. *Yongkun Li.* Periodic solutions of a periodic delay predator-prey system // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – **127**, № 5. – P. 1331 – 1335.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Получено 29.12.08,
после доработки — 23.09.09