УДК 517.9

Б. А. Алиев (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В УРАВНЕНИИ И В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

We investigate the solvability of a boundary-value problem for second-order elliptic operator differential equation with a spectral parameter in the equation and boundary conditions. We also study the asymptotic behavior of eigenvalues corresponding to a homogeneous boundary-value problem.

Досліджено розв'язність крайової задачі для еліптичного диференціально-операторного рівняння другого порядку зі спектральним параметром у рівнянні і в граничних умовах, а також асимптотичну поведінку власних значень, що відповідають однорідній крайовій задачі.

1. Введение. Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений были рассмотрены во многих работах (см., например, [1 – 17]). В этих работах коэффициенты в краевых условиях являются либо комплексными числами, либо линейными ограниченными операторами.

В данной работе изучается краевая задача для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда один и тот же спектральный параметр входит и в уравнение, и в одно из граничных условий.

Итак, в сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим краевую задачу на $[0, b]$, $0 < b < +\infty$, для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром

$$L(\lambda, D)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in [0, b], \tag{1.1}$$

$$L_1(\lambda)u := \lambda u'(0) - \alpha u(0) = f_1,$$

$$L_2 u := u(b) = f_2, \tag{1.2}$$

где λ — спектральный параметр, α — некоторое комплексное число из правой части комплексной плоскости, A — линейный самосопряженный положительно определенный оператор в H, $D := \dfrac{d}{dx}$. Найдем достаточные условия для разрешимости задачи (1.1), (1.2) (в действительности докажем изоморфизм), установим некоторые оценки (относительно u и λ) для решения задачи (1.1), (1.2) в $L_p((0, b); H)$. Далее, изучим асимптотическое поведение собственных значений однородной задачи, соответствующей задаче (1.1), (1.2).

Отметим, что краевые задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях в разных аспектах рассмотрены в работах [18 – 24].

В работе [25] изучена полнота систем корневых функций краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных, содержащих спектральный параметр как в уравнении, так и в граничных условиях одного порядка в ограниченной области $G \subset R^n$ с достаточно гладкой границей, причем спектральный параметр находится перед граничным дифференциальным выражением, порядок которого наивысший.

В работе [26] в ограниченной области $G \subset R^n$ с достаточно гладкой границей Γ для уравнения Лапласа изучается спектральная задача

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{в} \quad G, \tag{1.3}$$

$$-u = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1.4}$$

где ν — внутренная нормаль к границе Γ.

В этой работе доказано, что спектр краевых задач (1.3), (1.4) дискретен и состоит из двух серий собственных значений, сходящихся соответственно к нулю и к $+\infty$.

Пусть E_0 и E_1 — два банаховых пространства, непрерывно вложенных в банаховое пространство $E\colon E_0 \subset E,\ E_1 \subset E$. Два таких пространства называются интерполяционной парой $\{E_0, E_1\}$.

Рассмотрим банахово пространство

$$E_0 + E_1 := \Big\{ u\colon u \in E,\ \ \exists u_j \in E_j,\ \ j = 0,1,\ \ \text{где}\ \ u = u_0 + u_1,$$

$$\|u\|_{E_0+E_1} := \inf_{\substack{u=u_0+u_1,\\ u_j \in E_j}} \big(\|u_0\|_{E_0} + \|u_1\|_{E_1} \big) \Big\}.$$

Согласно утверждению 1.3.1 из [27] функционал

$$K(t,u) := \inf_{\substack{u=u_0+u_1,\\ u_j \in E_j}} \big(\|u_0\|_{E_0} + t\|u_1\|_{E_1} \big), \quad u \in E_0 + E_1,$$

непрерывен на $(0,\infty)$ относительно t, и имеет место оценка

$$\min\{1,t\}\|u\|_{E_0+E_1} \le K(t,u) \le \max\{1,t\}\|u\|_{E_0+E_1}.$$

Интерполяционное пространство для $\{E_0, E_1\}$ по K-методу определяется как

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} := \left\{ u\colon u \in E_0 + E_1,\ \ \|u\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} := \right.$$

$$\left. = \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta p} K^p(t,u)\, dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \le p < \infty.$$

Пусть E и F — банаховы пространства. Множество $E \dot{+} F$ всех векторов вида (u, υ), где $u \in E$ и $\upsilon \in F$, с обычными линейными операциями по координатам и нормой

$$\|(u,\upsilon)\|_{E \dot{+} F} := \|u\|_E + \|\upsilon\|_F$$

является банаховым пространством и называется прямой суммой банаховых пространств E и F.

Пусть A — линейный замкнутый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$. $D(A)$ превращается в гильбертово пространство $H(A)$ относительно нормы

$$\|u\|_{H(A)} := \left(\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2\right)^{1/2}.$$

Пусть E_1 и E — банаховы пространства. Через $B(E_1, E)$ обозначим банахово пространство всех ограниченных операторов, действующих из E_1 в E, с обычной операторной нормой. В частном случае $B(E) := B(E, E)$.

Через $L_p\big((0,b);H\big)$, $1 < p < \infty$, обозначим банахово пространство (при $p = 2$ гильбертово пространство) функций $x \to u(x)\colon [0,b] \to H$, сильно измеримых и суммируемых в p-й степени, с нормой

$$\|u\|_{L_p((0,b);H)} := \left(\int\limits_0^b \|u(x)\|_H^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Через $W_p^l((0,b);H)$, $1 < p < \infty$ ($0 \le l$ — целые числа), обозначим банахово пространство функций $u(x)$ со значениями в H, которые имеют обобщенные производные l-го порядка на $(0,b)$, с нормой

$$\|u\|_{W_p^l((0,b);H)} := \sum_{k=0}^{l} \left(\int\limits_0^b \left\|u^{(k)}(x)\right\|_H^p dx\right)^{1/p}.$$

Пространство

$$W_p^2\big((0,b);H(A),H\big) := \Big\{u\colon u \in L_p\left((0,b);H(A)\right),\ \ u'' \in L_p\left((0,b);H\right)\Big\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_p^2((0,b);H(A),H)} := \|u\|_{L_p((0,b);H(A))} + \|u''\|_{L_p((0,b);H)}$$

является банаховым (для более общих пространств см. [27], лемма 1.8.1, а также [5], раздел 1.7.7).

2. Однородное уравнение. Рассмотрим сначала следующую краевую задачу в H :

$$L(\lambda, D)u := \lambda u\,(x) - u''(x) + Au(x) = 0, \quad x \in [0,b], \tag{2.1}$$

$$L_1(\lambda)u := \lambda u'\,(0) - \alpha u\,(0) = f_1,$$

$$L_2 u := u(b) = f_2. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *A является самосопряженным положительно определенным оператором $\big(A = A^* \ge \gamma^2 I\big)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H*;

2) $|\arg\lambda| \le \dfrac{\varphi}{2}$ *для каждого фиксированного* $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда задача (2.1), (2.2) *для* $f_1 \in \big(H(A), H\big)_{1/2+1/2p,p}$, $f_2 \in \big(H(A), H\big)_{1/2p,p}$, $p \in (1, \infty)$, *при достаточно больших* $|\lambda|$ *из угла* $|\arg \lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ *имеет единственное решение, которое принадлежит пространству* $W_p^2\big((0,b); H(A), H\big)$, *и для этих* λ *для решения задачи* (2.1), (2.2) *имеет место оценка*

$$|\lambda| \|u\|_{L_p((0,b);H)} + \|u''\|_{L_p((0,b);H)} + \|Au\|_{L_p((0,b);H)} \le$$
$$\le C_\varphi \left[\frac{1}{|\lambda|} \Big(\|f_1\|_{(H(A),H)_{1/2+1/2p,p}} + |\lambda|^{1/2-1/2p} \|f_1\|_H \Big) + \right.$$
$$\left. + \|f_2\|_{(H(A),H)_{1/2p,p}} + |\lambda|^{1-1/2p} \|f_2\|_H \right]. \tag{2.3}$$

Доказательство. Поскольку $A = A^* \ge \gamma^2 I$ в H, по спектральной теореме (см., например, [28], гл. V, раздел 5 и 6 и гл. VI, раздел 5) существует операторнозначная функция $f(A) = \displaystyle\int_{\gamma^2}^{+\infty} f(\mu) dE_\mu$ для любых измеримых ограниченных комплекснозначных функций $f(\mu)$. Более того, $f(A)$ — ограниченный оператор в H и $\|f(A)\| \le \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\gamma^2 \le \mu < \infty} |f(\mu)|$. Тогда из условия 1 следует, что для любого ψ, $0 \le \psi < \pi$, существует $C_\psi > 0$ такая, что

$$\big\|R(\lambda, A)\big\| \le C_\psi \left(1 + |\lambda|\right)^{-1}, \quad |\arg \lambda| \ge \pi - \psi,$$

где $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A. Тогда в силу леммы 5.4.2/6 [5] для $|\arg \lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ существует голоморфная для $x > 0$ и сильно непрерывная для $x \ge 0$ полугруппа $e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}}$. В силу леммы 5.3.2/1 [5] произвольное решение уравнения (2.1) при $|\arg \lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, принадлежащее $W_p^2\big((0,b); H(A), H\big)$, имеет вид

$$u(x) = e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}} g_1 + e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}} g_2, \tag{2.4}$$

где $g_k \in \big(H(A), H\big)_{1/2p,p}$.

Докажем теперь обратное, т. е. что функция $u(x)$ вида (2.4) с $g_k \in \big(H(A), H\big)_{1/2p,p}$ принадлежит $W_p^2\big((0,b); H(A), H\big)$. Из теоремы 5.4.2/1 и леммы 1.2.9/3 из [5], а также (2.4) находим

$$\|u\|_{W_p^2\left((0,b);H(A),H\right)} \le$$
$$\le \left(\big\|A(A+\lambda I)^{-1}\big\| + 1\right) \left[\left(\int\limits_0^b \Big\|(A+\lambda I) e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}} g_1\Big\|_H^p dx \right)^{1/p} + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_0^b \Big\|(A+\lambda I) e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}} g_2\Big\|_H^p dx \right)^{1/p} \right] \le$$
$$\le C \sum_{k=1}^{2} \Big(\|g_k\|_{(H(A),H)_{1/2p,p}} + |\lambda|^{1-1/2p} \|g_k\|_H \Big).$$

Потребуем, чтобы функция $u(x)$ в виде (2.4) удовлетворяла условиям (2.2). Тогда получим систему для элементов g_1 и g_2, которую в пространстве $H^2 = H \dot{+} H$ можно записать в виде

$$\big(A(\lambda) + R(\lambda)\big)\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $A(\lambda)$ и $R(\lambda)$ — операторные матрицы размера 2×2 :

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\big[\alpha + \lambda(A + \lambda I)^{1/2}\big] & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \big[-\alpha + \lambda(A + \lambda I)^{1/2}\big] e^{-b(A+\lambda I)^{1/2}} \\ e^{-b(A+\lambda I)^{1/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу леммы 5.4.2/6 из [5] для $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ и $|\lambda| \to \infty$

$$\big\|R(\lambda)\big\|_{B(H^2)} \le c e^{-\delta|\lambda|^{1/2}}, \qquad \big\|R(\lambda)\big\|_{B([H(A)]^2)} \le C e^{-\delta|\lambda|^{1/2}}, \quad \delta > 0. \tag{2.6}$$

Очевидно, что

$$\alpha + \lambda(A + \lambda I)^{1/2} = \lambda\,(A + \lambda I)^{1/2}\Big(I + \alpha\lambda^{-1}(A + \lambda I)^{-1/2}\Big). \tag{2.7}$$

Легко можно показать, что для $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ оператор $\big(I + \alpha\lambda^{-1}(A + \lambda I)^{-1/2}\big)$ имеет ограниченный обратный и выполняются оценки

$$\begin{gathered} \Big\|\big(I + \alpha\lambda^{-1}(A + \lambda I)^{-1/2}\big)^{-1}\Big\|_{B(H)} \le C, \\ \Big\|\big(I + \alpha\lambda^{-1}(A + \lambda I)^{-1/2}\big)^{-1}\Big\|_{B(H(A))} \le C. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Тогда из (2.7) в силу (2.8) для $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ имеем

$$\begin{gathered} \Big\|\big[\alpha + \lambda(A + \lambda I)^{1/2}\big]^{-1}\Big\|_{B(H)} \le \frac{C}{|\lambda|^{3/2}}, \\ \Big\|\big[\alpha + \lambda(A + \lambda I)^{1/2}\big]^{-1}\Big\|_{B(H(A))} \le \frac{C}{|\lambda|^{3/2}}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

В силу (2.9)

$$A(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} -\big[\alpha + \lambda(A + \lambda I)^{1/2}\big]^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Из (2.6) и (2.9) следует, что для $|\arg\lambda| \le \varphi$ и $|\lambda| \to \infty$ $\big\|R(\lambda)A(\lambda)^{-1}\big\|_{B(H^2)} \to 0$. Отсюда согласно тождеству Неймана для $|\arg\lambda| \le \varphi$ и $|\lambda| \to \infty$ имеем

$$\big(A(\lambda) + R(\lambda)\big)^{-1} = A(\lambda)^{-1}\Big(I + R(\lambda)A\,(\lambda)^{-1}\Big)^{-1} =$$

$$= A(\lambda)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-R(\lambda) A(\lambda)^{-1} \right)^{k}.$$

Следовательно, система (2.5) имеет единственное решение для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg \lambda| \le \varphi$, которое может быть представлено в виде

$$g_k = \left[C_{k1}(\lambda) + R_{k1}(\lambda) \right] f_1 + \left[C_{k2}(\lambda) + R_{k2}(\lambda) \right] f_2, \quad k = 1, 2, \tag{2.10}$$

где $C_{11}(\lambda) = -\left[\alpha + \lambda (A + \lambda I)^{1/2} \right]^{-1}$, $C_{12}(\lambda) = C_{21}(\lambda) = 0$, $C_{22}(\lambda) = I$; $R_{kj}(\lambda)$, $k, j = 1, 2$, — некоторые ограниченные операторы как в H, так и в $H(A)$.

Из (2.8) в силу интерполяционной теоремы [27] (теорема 1.3.3/a) следует, что оператор $\left(I + \alpha \lambda^{-1} (A + \lambda I)^{-1/2} \right)^{-1}$ ограниченно действует из $\left(H(A), H \right)_{\theta, p}$ в $\left(H(A), H \right)_{\theta, p}$ при любом $\theta \in (0,1)$ и имеет место оценка

$$\left\| \left(I + \alpha \lambda^{-1} (A + \lambda I)^{-1/2} \right)^{-1} \right\|_{B((H(A),H)\theta,p)} \le C. \tag{2.11}$$

Из представлений $R(\lambda)$ и $A(\lambda)^{-1}$ в силу оценок (2.6) и (2.9) следует, что для $|\arg \lambda| \le \varphi$ и $|\lambda| \to \infty$

$$\|R_{kj}(\lambda)\|_{B(H)} \le C e^{-\delta |\lambda|^{1/2}}, \qquad \|R_{kj}(\lambda)\|_{B(H(A))} \le C e^{-\delta |\lambda|^{1/2}}, \quad \delta > 0. \tag{2.12}$$

Из (2.12) согласно интерполяционной теореме операторы $R_{kj}(\lambda)$ ограничены в пространстве $\left(H(A), H \right)_{\theta, p}$ при любом $\theta \in (0,1)$ и для $|\arg \lambda| \le \varphi$, $|\lambda| \to \infty$

$$\|R_{kj}(\lambda)\|_{B(H(A),H)_{\theta,p}} \le c e^{-\delta |\lambda|^{1/2}}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.10) в (2.4), имеем

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \Big\{ e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}} \left(C_{k1}(\lambda) + R_{k1}(\lambda) \right) +$$

$$+ e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}} \left(C_{k2}(\lambda) + R_{k2}(\lambda) \right) \Big\} f_k.$$

Затем для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg \lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ получаем

$$|\lambda| \|u\|_{L_p((0,b);H)} + \|u''\|_{L_p((0,b);H)} + \|u''\|_{L_p((0,b);H)} \le$$

$$\le C \sum_{k=1}^{2} \left\{ |\lambda| \left[\left(\int_0^b \left\| e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}} C_{1k}(\lambda) f_k \right\|_H^p dx \right)^{1/p} + \right. \right.$$

$$+ \left(\int_0^b \left\| e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}} R_{1k}(\lambda) f_k \right\|_H^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_0^b \left\| e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}} C_{2k}(\lambda) f_k \right\|_H^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+\left(\int\limits_0^b \left\|e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}}R_{2k}(\lambda)f_k\right\|_H^p dx\right)^{1/p}\Bigg]+$$

$$+\left(1+\left\|A(A+\lambda I)^{-1}\right\|\right)\Bigg[\left(\int\limits_0^b \left\|(A+\lambda I)e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}}C_{1k}(\lambda)f_k\right\|_H^p dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\int\limits_0^b \left\|(A+\lambda I)e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}}R_{1k}(\lambda)f_k\right\|_H^p dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\int\limits_0^b \left\|(A+\lambda I)e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}}C_{2k}(\lambda)f_k\right\|_H^p dx\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\int\limits_0^b \left\|(A+\lambda I)e^{-(b-x)(A+\lambda I)^{1/2}}R_{2k}(\lambda)f_k\right\|_H^p dx\right)^{1/p}\Bigg]\Bigg\}. \qquad (2.14)$$

Учитывая оценки (2.8) и (2.11), согласно теореме 5.4.2/1 из [5] для первого слагаемого в правой части неравенства (2.14) имеем

$$|\lambda|\left(\int\limits_0^b \left\|e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}}C_{11}(\lambda)f_1\right\|_H^p dx\right)^{1/p} =$$

$$=|\lambda|\,\frac{1}{|\lambda|}\left(\int\limits_0^b \left\|e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}}(A+\lambda I)^{-1/2}\Big(I+\alpha\lambda^{-1}(A+\lambda I)^{-1/2}\Big)^{-1}f_1\right\|_H^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le C\,(1+|\lambda|)^{-1}\left(\left\|\Big(I+\alpha\lambda^{-1}(A+\lambda I)^{-1/2}\Big)^{-1}f_1\right\|_{((H(A),H)_{1/2+1/2p,p})}+\right.$$

$$\left.+|\lambda|^{1/2-1/2p}\left\|\Big(I+\alpha\lambda^{-1}(A+\lambda I)^{-1/2}\Big)^{-1}f_1\right\|_H\right)\le$$

$$\le C|\lambda|^{-1}\Big(\|f_1\|_{(H(A),H)_{1/2+1/2p,p}}+|\lambda|^{1/2-1/2p}\|f_1\|_H\Big).$$

По той же теореме для третьего слагаемого в правой части неравенства (2.14) получаем

$$|\lambda|\left(\int\limits_0^b \left\|e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}}C_{22}(\lambda)f_2\right\|_H^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le C\,\Big(\|f_2\|_{(H(A),H)_{1/2p,p}}+|\lambda|^{1-1/2p}\|f_2\|_H\Big).$$

Учитывая оценки (2.12) и (2.13), в силу теоремы 5.4.2/1 из [5] легко можно показать, что

$$|\lambda|\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^b\left\|e^{-x(A+\lambda I)^{1/2}}R_{1k}(\lambda)f_k\right\|_H^p dx\right)^{1/p}\leq$$

$$\leq C|\lambda|^{-1}\left(\|f_1\|_{(H(A),H)_{1/2+1/2p,p}}+|\lambda|^{1/2-\frac{1}{2p}}\|f_1\|_H\right)+$$

$$+\,C\left(\|f_2\|_{(H(A),H)_{1/2p,p}}+|\lambda|^{1-1/2p}\|f_2\|_H\right).$$

Аналогично оцениваются остальные слагаемые в правой части неравенства (2.14). Следовательно, доказана оценка (2.3).

Теорема 2.1 доказана.

3. Неоднородные уравнения. Рассмотрим теперь краевую задачу для неоднородного уравнения с параметром

$$L(\lambda,D)u:=\lambda u(x)-u''(x)+Au(x)=f(x),\quad x\in[0,b],\tag{3.1}$$

$$L_1(\lambda)u:=\lambda u'(0)-\alpha u(0)=f_1,$$
$$L_2u:=u(b)=f_2.\tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *A является самосопряженным положительно определенным оператором в сепарабельном гильбертовом пространстве H*;

2) $|\arg\lambda|\leq\dfrac{\varphi}{2}$ *для каждого фиксированного* $0\leq\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда оператор $\mathbb{L}(\lambda)\colon u\to\mathbb{L}(\lambda)u:=(L(\lambda,D)u,L_1(\lambda)u,L_2u)$ при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda|\leq\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ является изоморфизмом из $W_p^2\big((0,b);H(A),H\big)$ на $L_p\left((0,b);H\right)\dot{+}\big(H(A),H\big)_{1/2+1/2p,p}\dot{+}\big(H(A),H\big)_{1/2p,p}$ и для этих λ справедлива следующая оценка для решения задачи (3.1), (3.2):

$$|\lambda|\,\|u\|_{L_p((0,b);H)}+\|u''\|_{L_p((0,b);H)}+\|Au\|_{L_p((0,b);H)}\leq$$

$$\leq C_\varphi\Bigg[\|f\|_{L_p((0,b);H)}+\frac{1}{|\lambda|}\Big(\|f_1\|_{(H(A),H)_{1/2+1/2p,p}}+|\lambda|^{1/2-1/2p}\|f_1\|_H\Big)+$$

$$+\|f_2\|_{(H(A),H)_{1/2p,p}}+|\lambda|^{1-1/2p}\|f_2\|_H\Bigg].\tag{3.3}$$

Доказательство. Инъективность следует из теоремы 2.1. Определим $\tilde f(x):=$ $:=f(x)$, если $x\in[0,b]$, и $\tilde f(x)=0$, если $x\notin[0,b]$. Решение задачи (3.1), (3.2), принадлежащее $W_p^2\left((0,b);H(A),H\right)$, представим в виде суммы $u(x)=u_1(x)+$ $+\,u_2(x)$, где $u_1(x)$ — сужение на $[0,b]$ решения уравнения

$$L(\lambda,D)\tilde u_1(x)=\tilde f(x),\quad x\in R=(-\infty,+\infty)\,,\tag{3.4}$$

а $u_2(x)$ — решение задачи

$$L(\lambda,D)u_2=0,$$
$$L_1(\lambda)u_2=f_1-L_1(\lambda)u_1,\tag{3.5}$$
$$L_2u_2=f_2-L_1u_1.$$

Решение уравнения (3.4) дается формулой

$$\tilde{u}_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_R e^{i\mu x} L(\lambda, i\mu)^{-1} F\tilde{f}(\mu) d\mu,$$

где $F\tilde{f}$ — преобразование Фурье функции $\tilde{f}(x)$, а $L(\lambda,\sigma)$ — характеристический оператор уравнения (3.4), т. е. $L(\lambda,\sigma) = -\sigma^2 + A + \lambda I$. Можно показать, что (см., например, [5], раздел 5.4.4) для $|\arg\lambda| \leq \varphi$

$$|\lambda| \|\tilde{u}_1\|_{L_p(R;H)} + \|\tilde{u}_1\|_{W_p^2(R;H(A),H)} \leq C \|\tilde{f}\|_{L_p(R;H)}, \tag{3.6}$$

и поэтому $u_1 \in W_p^2((0,b); H(A), H)$.

В силу теоремы 1.7.7/1 [5] и неравенства (3.6) имеем

$$u_1^{(s)}(x_0) \in (H(A), H)_{s/2+1/2p,p} \quad \forall x_0 \in [0,1], \quad s = 0,1.$$

Отсюда $L_1(\lambda)u_1 \in (H(A),H)_{1/2+1/2p,p}$, так как $(H(A),H)_{1/2p,p} \subset (H(A), H)_{1/2+1/2p,p}$, $L_2u_1 \in (H(A),H)_{1/2p,p}$. Таким образом, в силу теоремы 2.1 при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \leq \varphi$ задача (3.5) имеет единственное решение $u_2(x)$, которое принадлежит $W_p^2((0,b); H(A), H)$. Более того, используя технику, имеющуюся в [5] (раздел 5.4.4), можно показать, что для решения задачи (3.5) при $|\arg\lambda| \leq \varphi$, $|\lambda| \to \infty$, имеет место оценка

$$|\lambda| \|u_2\|_{L_p((0,b);H)} + \|u''\|_{L_p((0,b);H)} + \|Au\|_{L_p((0,b);H)} \leq$$

$$\leq C\Bigg[\|f\|_{L_p((0,b);H)} + \frac{1}{|\lambda|}\Big(\|f_1\|_{(H(A),H)_{1/2+1/2p,p}} + |\lambda|^{1/2-1/2p}\|f_1\|_H\Big) +$$

$$+\|f_2\|_{(H(A),H)_{1/2p,p}} + |\lambda|^{1-1/2p}\|f_2\|_H\Bigg]. \tag{3.7}$$

Из (3.6) при $|\arg\lambda| \leq \varphi$ следует, что

$$|\lambda| \|u_1\|_{L_p((0,b);H)} + \|u_1\|_{W_p^2((0,b);H(A),H)} \leq C\|f\|_{L_p((0,b);H)}. \tag{3.8}$$

Затем из (3.7) и (3.8) следует (3.3).

Теорема 3.1 доказана.

4. Асимптотика собственных значений. Рассмотрим краевую задачу

$$L(\lambda, D)u := -u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in [0,b], \tag{4.1}$$

$$L_1(\lambda)u := \lambda u'(0) + \alpha u(0) = 0,$$

$$L_2u := u(b) = 0, \tag{4.2}$$

где $\lambda > 0$ — спектральный параметр, α — вещественное число.

Теорема 4.1. *Пусть $A = A^* \geq \gamma^2 I$ в H и A^{-1} вполне непрерывен в H. Тогда*:

1) *если $\alpha > 0$, то задача* (4.1), (4.2) *имеет две серии собственных значений, стремящихся соответственно к нулю и к бесконечности*: $\lambda_k = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\mu_k}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right)$ *и* $\lambda_{n,k} \sim \mu_k + \dfrac{\pi^2}{b^2}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2$, *где $\mu_k = \mu_k(A)$ — собственные значения оператора A*;

2) *если* $\alpha < 0$, *то задача* (4.1), (4.2) *имеет лишь одну серию собственных значений* $\lambda_{n,k} \sim \mu_k + \dfrac{\pi^2}{b^2}\left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2$;

3) *если* $\alpha = 0$, *то задача* (4.1), (4.2) *имеет лишь одну серию собственных значений* $\lambda_{n,k} = \mu_k + \dfrac{\pi^2}{b^2}\left(\dfrac{1}{2} + n\right)^2$.

Доказательство. Собственные элементы оператора A, соответствующие собственным значениям $\mu_k(A)$, обозначим через φ_k. Известно, что $\{\varphi_k\}$ образует ортонормированный базис в H. Тогда, учитывая спектральное разложение, для коэффициентов $\tilde{u}_k = (u, \varphi_k)$ получим задачу

$$-\tilde{u}_k''(x) + (\mu_k - \lambda)\,\tilde{u}_k(x) = 0, \quad x \in [0, b], \tag{4.3}$$

$$\lambda \tilde{u}_k'(0) + \alpha \tilde{u}_k(0) = 0,$$
$$\tilde{u}_k(b) = 0. \tag{4.4}$$

Таким образом, нахождение собственных значений краевой задачи (4.1), (4.2) сводится к нахождению собственных значений краевой задачи (4.3), (4.4).

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.3) имеет вид

$$\tilde{u}_k(x) = c_1 e^{-x\sqrt{\mu_k - \lambda}} + c_2 e^{-(b-x)\sqrt{\mu_k - \lambda}}, \tag{4.5}$$

где c_i, $i = 1, 2$, — произвольные постоянные.

Подставив (4.5) в (4.4), получим систему относительно c_i, $i = 1, 2$, определитель которой имеет вид

$$K(\lambda) = \left(\alpha - \lambda\sqrt{\mu_k - \lambda}\right) - \left(\alpha + \lambda\sqrt{\mu_k - \lambda}\right) e^{-2b\sqrt{\mu_k - \lambda}}.$$

Собственные значения краевой задачи (4.3), (4.4) состоят из тех вещественных $\lambda \neq \mu_k$, которые хотя бы при одном μ_k удовлетворяют уравнению

$$\left(\alpha - \lambda\sqrt{\mu_k - \lambda}\right) - \left(\alpha + \lambda\sqrt{\mu_k - \lambda}\right) e^{-2b\sqrt{\mu_k - \lambda}} = 0. \tag{4.6}$$

Перепишем уравнение (4.6) в виде

$$\lambda\sqrt{\mu_k - \lambda}\,\operatorname{ch} b\sqrt{\mu_k - \lambda} - \alpha \operatorname{sh} b\sqrt{\mu_k - \lambda} = 0. \tag{4.7}$$

Найдем собственные значения задачи (4.3), (4.4), меньшие μ_k. Положим $\sqrt{\mu_k - \lambda} = y$. Уравнение (4.7) в этом случае эквивалентно уравнению

$$(\mu_k - y^2) y \operatorname{cth} by - \alpha = 0, \quad 0 < y < \sqrt{\mu_k}. \tag{4.8}$$

Рассмотрим функции $f_k(y) = \left(\mu_k - y^2\right) y \operatorname{cth} by - \alpha$, $y \in \left(0, \sqrt{\mu_k}\right)$. Пусть $\alpha > 0$. Производная $f_k'(y) = \left(\mu_k - 3y^2\right) \dfrac{\operatorname{ch} by}{\operatorname{sh} by} - \left(\mu_k - y^2\right) \dfrac{by}{\operatorname{sh}^2 by} < 0$ при $y \in \left(\sqrt{\dfrac{\mu_k}{3}}, \sqrt{\mu_k}\right)$, т. е. $f_k(y)$ монотонно убывает на $\left(\sqrt{\dfrac{\mu_k}{3}}, \sqrt{\mu_k}\right)$. Учитывая, что $f_k\left(\sqrt{\dfrac{\mu_k}{3}}\right) > 0$, $f_k\left(\sqrt{\mu_k}\right) < 0$, заключаем, что в промежутке $\left(\sqrt{\dfrac{\mu_k}{3}}, \sqrt{\mu_k}\right)$ уравнение (4.8), начиная с некоторого k, имеет точно один нуль y_k. Покажем, что y_k

асимптотически ведет себя как $\sqrt{\mu_k} - \dfrac{\alpha}{2\mu_k}$, т. е. $y_k = \sqrt{\mu_k} - \dfrac{\alpha}{2\mu_k} + o\left(\dfrac{1}{\mu_k}\right)$. Для этого достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} f_k\left(\sqrt{\mu_k} - \frac{\alpha}{2\mu_k} + 0\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right) = 0.$$

Действительно, так как при достаточно больших μ_k

$$\operatorname{cth} b\left(\sqrt{\mu_k} - \frac{\alpha}{2\mu_k} + 0\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right) \sim 1,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} f_k\left(\sqrt{\mu_k} - \frac{\alpha}{2\mu_k} + 0\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\left[\mu_k - \left(\sqrt{\mu_k} - \frac{\alpha}{2\mu_k} + 0\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right)^2\right]\times$$

$$\times\left(\sqrt{\mu_k} - \frac{\alpha}{2\mu_k} + 0\left(\frac{1}{\mu_k}\right)\right) - \alpha = 0.$$

Отсюда получаем $\lambda_k = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\mu_k}} + o\left(\dfrac{1}{\mu_k}\right)$.

Очевидно, что если $\alpha \leq 0$, то при каждом k и при всех $y \in \left(0, \sqrt{\mu_k}\right)$ $f_k(y) > 0$. Поэтому уравнение (4.8) ни при каких k не имеет решений на интервале $\left(0, \sqrt{\mu_k}\right)$.

Изучим теперь те собственные значения задачи (4.3), (4.4), которые больше μ_k. В этом случае уравнение (4.7) примет вид

$$\alpha \operatorname{tg} bz - z\left(z^2 + \mu_k\right) = 0, \quad z \in (0, \infty), \tag{4.9}$$

где $z = \sqrt{\lambda - \mu_k}$.

Рассмотрим функции $\varphi_k(z) = \alpha \operatorname{tg} bz - z\left(z^2 + \mu_k\right)$, $z \in (0, \infty)$.

Пусть $\alpha < 0$. Поскольку в каждом промежутке $\left(\dfrac{\pi}{b}\left(n - \dfrac{1}{2}\right), \dfrac{\pi}{b}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\right)$ $\varphi_k(z)$ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$, а $\varphi_k'(z) < 0$, то в нем при каждом k функция $\varphi_k(z)$ имеет только один нуль $z_{n,k}$:

$$\frac{\pi}{b}\left(n - \frac{1}{2}\right) < z_{n,k} < \frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда для собственных значений получаем асимптотическую формулу $\lambda_{n,k} \sim \sim \mu_k + \dfrac{\pi^2}{b^2}\left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Если $\alpha > 0$, то можно показать, что $\lambda_{n,k} \sim \mu_k + \dfrac{\pi^2}{b^2}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Если $\alpha = 0$, то из (4.9) имеем $\lambda_{n,k} = \mu_k + \dfrac{\pi^2}{b^2}\left(\dfrac{1}{2} + n\right)^2$.

Теорема 4.1 доказана.

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967.
2. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980.
3. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку: Элм, 1985.

4. *Yakubov S.* Completeness of root functions of regular differential operators. – New York: Longman, 1994.
5. *Yakubov S., Yakubov Ya.* Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations. – Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984.
7. *Shklyar A. Ya.* Complete second order linear differential equations in Hilbert spaces. – Basel: Birkhäuser, 1997.
8. *Лаптев Г. И.* Сильно эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве // Лит. мат. сб. – 1968. – **8**, № 1. – С. 87 – 99.
9. *Соболевский П. Е.* Эллиптические уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 7. – С. 1346 – 1348.
10. *Гасымов М. Г.* О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1977. – **235**, № 3. – С. 505 – 508.
11. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 3. – С. 313 – 324.
12. *Ильин В. А., Филиппов В. С.* О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области // Докл. АН СССР. – 1970. – **191**, № 2. – С. 167 – 169.
13. *Amann H.* Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems // Isr. J. Math. – 1983. – **45**. – P. 225 – 254.
14. *Aibeche A.* Coerciveness estimates for a class of nonlocal elliptic problems // Different. Equat. and Dynam. Syst. – 1993. – **4**, № 1. – P. 341 – 351.
15. *Yakubov S.* Problems for elliptic equations with operator-boundary conditions // Integr. Equat. and Oper. Theory. – 2002. – **43**. – P. 215 – 236.
16. *Dore G., Yakubov S.* Semigroup estimates and noncoercive boundary value problems // Semigroup Forum. – 2000. – **60**. – P. 93 – 121.
17. *Якубов С. Я., Алиев Б. А.* Краевая задача с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. – 1985. – **26**, № 4. – С. 176 – 188.
18. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100**(142), № 2(6). – С. 210 – 216.
19. *Горбачук В. И., Рыбак М. А.* О граничных задачах для операторного уравнения Штурма – Лиувилля со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Прямые и обратные задачи теории рассеяния. – Киев, 1981. – С. 3 – 16.
20. *Рыбак М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 248 – 252.
21. *Алиев Б. А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Там же. – 2006. – **58**, № 8. – С. 1146 – 1152.
22. *Aliev B. A.* Asymptotic behavior of eigen-values of a boundary value problem with spectral parameter in the boundary conditions for the second order elliptic differential-operator equation // Trans. NAS Azerbaijan. Ser. Phys-Tech. and Math. Sci. – 2005. – **25**, № 7. – P. 3 – 8.
23. *Олейник Л. А.* Неоднородные граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений. – Киев, 1986. – С. 25 – 28.
24. *Aliev B. A., Yakubov Ya.* Elliptic differential-operator problems with a spectral parameter in both the equation and boundary-operator conditions // Adv. Different. Equat. – 2006. – **11**, № 10. – P. 1081 – 1110.
25. *Котко Л. А., Крейн С. Г.* О полноте системы собственных и присоединенных функций краевых задач с параметром в граничных условиях // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 2. – С. 288 – 300.
26. *Кожевников А. Н.* Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 5. – С. 699 – 711.
27. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1971.
28. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М.: Мир, 1965.

Получено 20.12.07,
после доработки — 22.06.09