УДК 517.5

С. Г. Прибегин

Приближение функций класса H^p в круговом кольце

Обозначим через $H^p(q, 1)$, $0 < p < \infty$, класс регулярных в кольце $K(q, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid q < |z| < 1\}$, $0 < q < 1$, функций f, для которых

$$\sup_{q<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^p \, d\varphi \right)^{1/p} < \infty$$

(см. [1, 2]). Классы $H^p(q, 1)$ называются классами Харди и являются аналогами широко известных классов Харди H^p в круге.

Однако переход от круга к кольцу для большинства задач не является тривиальным, так как многие факты, справедливые для круга, могут не иметь места в случае кольца. Так, например, если $f(z) \neq 0$ всюду в кольце, то функция f^p, $0 < p < 1$, не обязательно является регулярной в кольце.

Для функций f из H^p в [3] была получена оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi})|^p \, d\varphi \leqslant C_p \omega^p (1 - \rho, f)_p, \tag{1}$$

где $\omega(f, \delta)_p$ — модуль непрерывности граничной функции $f(e^{i\varphi})$ (см. [3], там же имеется обзор о суммируемости в H^p методом Абеля — Пуассона). В случае $p > 1$ соотношение (1) следует из соответствующих оценок для суммирования рядов Фурье методом Абеля [4].

Рассмотрим вопрос об аналоге оценки (1) для функций из $H^p(q, 1)$.

1. Вспомогательные утверждения. Напомним некоторые сведения о функциях, аналитических в кольце, и установим ряд фактов, необходимых для доказательства основного результата.

1. Пусть 2π-периодические непрерывные функции $\Psi_1(\theta)$ и $\Psi_2(\theta)$ связаны соотношением

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1(\theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_2(\theta) \, d\theta \equiv \lambda. \tag{2}$$

Тогда (см. [5]) функция

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1(\theta) \operatorname{Re} F(ze^{-i\theta}/R) \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_2(\theta) \operatorname{Re} F(re^{i\theta}/z) \, d\theta - \lambda,$$

где $F(z) = (1 + z)/(1 - z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^{2k}/(R^{2k} - r^{2k})(z^k - z^{-k})$, $r < |z| < R$, гармонична внутри $K(r, R)$ и непрерывна в замыкании этого кольца. Кроме того, $\lim_{z \to Re^{i\theta}} u(z) = \Psi_1(\theta)$, $\lim_{z \to re^{i\theta}} u(z) = \Psi_2(\theta)$. Ограничение (2) на $\Psi_1(\theta)$ и

$\Psi_2(\theta)$ обусловлено тем, что u есть действительная часть регулярной в кольце $K(q, 1)$ функции. Отсюда нетрудно получить, что в случае произвольных 2π-периодических функций $\Psi_1(\theta)$ и $\Psi_2(\theta)$ решением задачи Дирихле для кольца $K(q, 1)$ с граничными условиями $u(Re^{i\theta}) = \Psi_1(\theta)$, $u(re^{i\theta}) = \Psi_2(\theta)$ будет функция

$$u(z, \Psi_1(\theta), \Psi_2(\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1(\theta)[\operatorname{Re} F(ze^{-i\theta}/R) - 1]\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_2(\theta)[\operatorname{Re} F(re^{i\theta}/z) - 1]\, d\theta + A\ln|z| + B.$$

Здесь A и B — решения системы $A\ln R + B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_1(\theta)\, d\theta$, $A\ln r + B = $

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_2(\theta)\, d\theta.$$

2. Из существования почти всюду угловых значений $f(e^{i\varphi})$ для $f \in H^p$ (см. об этом [1, с. 82 — 83]) следует существование почти всюду угловых значений $f(e^{i\varphi})$ и $f(qe^{i\varphi})$ для $f \in H^p(q, 1)$.

Действительно, пусть $f \in H^p(q, 1)$, тогда $f = \sum\limits_0^\infty c_n z^n + \sum\limits_1^\infty c_{-n} z^{-n} \equiv$ $\equiv f_1 + f_2$. Легко показать, что функции $f_1(z)$ и $P_2(\omega) = f(q/\omega)$ принадлежат классу H^p и, следовательно, имеют почти всюду угловые граничные значения $f_1(e^{i\varphi})$ и $f_2(qe^{-i\varphi})$.

По известной теореме Рисса (см., например, [1, с. 89 — 92]) для функций из H^p и из того, что $f_1 \in H^p$, а $P_2(\omega) = f(q/\omega) \in H^p(q, 1)$, нетрудно получить аналог теоремы Рисса для функций из $H^p(q, 1)$ в следующей форме: пусть $f \in H^p(q, 1)$, тогда

$$\lim_{\rho \to q^j + (-1)^{j+1}\cdot 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{i\varphi}) - f(q^j e^{i\varphi})|^p\, d\varphi = 0, \quad j = 0, 1. \tag{3}$$

Обозначим $M_p(\rho, f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\rho e^{i\varphi})|^p\, d\varphi\right)^{1/p}$. Тогда из (3) получим

$$\lim_{\rho \to q^j + (-1)^{j+1}\cdot 0} M_p(\rho, f) = M_p(q^j, f), \quad j = 0, 1. \tag{4}$$

3. Изучим подробнее поведение $M_1(\rho, f)$ для функций $f \in H^p(q, 1)$.

Лемма 1. *Для функции* $f \in H^p(q, 1)$

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}|f(\rho e^{i\theta})| \leqslant (8\max\{(R-\rho)^{-1};\ (\rho - r)^{-1}\})^{1/p}\max\{M_p(r, f);\ M_p(R, f)\},$$

$$q \leqslant r < \rho < R \leqslant 1. \tag{5}$$

Доказательство. Согласно 1, функция $u(z, |f(Re^{i\theta})|^p, |f(re^{i\theta})|^p)$ дает решение задачи Дирихле для кольца $K(r, R)$ с граничными значениями $|f(Re^{i\theta})|^p$ и $|f(re^{i\theta})|^p$ на соответствующих компонентах границы. На основании принципа максимума для субгармонических функций (см. [6, с. 65—68]) и монотонности относительно $|z|$ функции $A\ln|z| + B$ получаем

$$|f(z)|^p \leqslant u(z, |f(Re^{i\theta})|^p, \quad |f(re^{i\theta})|^p) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(Re^{i\theta})|^p \operatorname{Re} F(ze^{-i\theta}/R)\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p \operatorname{Re} F(re^{i\theta}/z)\, d\theta. \tag{6}$$

Так как
$$|\operatorname{Re} F(re^{it}/\rho)| \leqslant 4/(\rho - r); \qquad |\operatorname{Re} F(\rho e^{it}/R)| \leqslant 4/(R-\rho), \tag{7}$$
то из (6) и (7) легко получим (5) при $q < r < \rho < R < 1$. Случай $r = q$ или $R = 1$ получается предельным переходом (см. (4)).

Лемма 2. *Для функции* $f \in H^p(q, 1)$
$$M_1^p(\rho, f) \leqslant (8 \max\{(R-\rho)^{-1};\ (\rho - r)^{-1}\})^{1-p} \max\{M_p^p(R, f);\quad M_p^p(r, f)\},$$
$$q \leqslant r < \rho < R \leqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. Согласно известной теореме Харди (см., например, [6, с. 85—86]), $\ln M\ (\rho, f)$ есть выпуклая относительно $\ln \rho$ функция, и, следовательно,
$$M_p(\rho, f) \leqslant \max\{M_p(r, f); M_p(R, f)\}, \quad q < r < \rho < R < 1. \tag{9}$$
На основании леммы 1
$$|f(\rho e^{i\varphi})| = |f(\rho e^{i\varphi})|^p\, |f(\rho e^{i\varphi})|^{1-p} \leqslant |f(\rho e^{i\varphi})|^p\, ((8\max\{(R-\rho)^{-1};$$
$$(\rho - r)^{-1}\})^{1/p} \max\{M_p(R, f);\ M_p(r, f)\})^{1-p}.$$
Проинтегрировав это неравенство и воспользовавшись оценкой (9), получим (8) для $q < r < \rho < R < 1$. Случай, когда $r = q$ или $R = 1$, получается предельным переходом.

Замечание. В работе [7, с. 323—325] доказывается аналог формулы (5). Однако вывод этой формулы, на наш взгляд, не совсем строг.

4. По аналогии с кругом (см. [3, с. 60—61]) можно получить следующее обобщение формулы Коши для кольца:
$$\Phi(\rho e^{i\theta}) = \{g(\rho)\}^m \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(Re^{i(\varphi+\theta)})}{\{g(Re^{i\varphi})\}^m}\, \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - \rho}\, d\varphi - \right.$$
$$\left. - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(re^{i(\varphi+\theta)})}{\{g(re^{i\varphi})\}^m}\, \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - \rho}\, d\varphi\right\}, \quad q < r < \rho < R < 1, \quad m > 0, \tag{10}$$
где функции Φ и g удовлетворяют условиям: 1) Φ регулярна в кольце $K(q, 1)$; 2) g регулярна и не имеет нулей в единичном круге.

2. Основной результат. Модулем непрерывности функции $f \in H^p(q, 1)$ назовем
$$\omega(\delta, f)_p = \max_{j=0,1}\{\omega(\delta, f(q^j e^{i\varphi}))_p\} = \max_{j=0,1}\left\{\sup_{|h|\leqslant\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(q^j e^{i(\theta+h)}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f(q^j e^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p}\right\},\ 0 < \delta \leqslant \pi.$$
Введенный модуль непрерывности есть обобщение модуля непрерывности для функций из H^p; он обладает всеми основными свойствами модуля непрерывности. В частности, при $0 < p \leqslant 1$
$$\omega^p(\lambda\delta, f)_p \leqslant (\lambda + 1)\,\omega^p(\delta, f)_p, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \lambda\delta \leqslant \pi, \tag{11}$$
$$\delta\omega^p(a, f)_p \leqslant 2a\omega^p(\delta, f)_p, \quad 0 < \delta \leqslant a \leqslant \pi. \tag{12}$$
Для упрощения записи положим $\| f(\rho e^{it})\|_\rho^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^p\, dt.$

Теорема 1. *Для функции* $f \in H^p(q, 1)$
$$\| f(\rho e^{it}) - f(q^j e^{it})\|_p^p \leqslant C_p(q)\, |\rho - q^{1-j}|^{-1}\, \omega^p(|\rho - q^j|, f)_p, \quad 0 < p \leqslant 1; \tag{13}$$

$$\| f(\rho e^{it}) - f(q^j e^{it}) \|_p^p \leqslant C_p(q) \, |\rho - q^{1-j}|^{-p} \, \omega^p(|\rho - q^j|, f)_p, \quad j = 0, \ 1,$$

$$p > 1, \quad q < \rho < 1.$$

Доказательство. Случай $0 < p \leqslant 1$ легко получается из следующего утверждения: если $f \in H^p(q, 1)$, $0 < p \leqslant 1$, то можно найти такое m_0, что для любого $m > m_0$

$$\| f(\rho e^{it}) - f(q^j e^{it}) \|_p^p \leqslant C(m, p, q) \, |\rho - q^{1-j}|^{-1} \{ 2^{mp} \omega^p(|\rho - q^j|, f)_p + \\ + (\rho - q^j)^2 \| f(\rho e^{it}) - f(q^{1-j} e^{it}) \|_p^p \}, \quad j = 0, 1, \quad q < \rho < 1, \tag{14}$$

и

$$\lim_{m \to +\infty} C(m, p, q) = 0 \tag{15}$$

(через $C(m, p, q)$ всюду обозначаем различные положительные постоянные, зависящие только от m, p, q и удовлетворяющие (15)). Действительно, в неравенствах (14), соответствующих значениям $j = 0$ и $j = 1$, норма в правой части каждого из них оценивается через норму в левой части другого. После такой оценки и элементарных преобразований получим

$$(1 - C(m, p, q)) \| f(\rho e^{it}) - f(q^j e^{it}) \|_p^p \leqslant C(m, p, q) \{ 2^{mp} |\rho - q^{1-j}|^{-1} \times \\ \times (\omega^p(|\rho - q^j|, f)_p + |p - q^j| \, \omega^p(|\rho - q^{1-j}|, f)_p) \}. \tag{16}$$

В силу монотонности $\omega(\delta, f)_p$ и свойства (12)

$$|\rho - q^j| \, \omega^p(|\rho - q^{1-j}|, f)_p \leqslant 2(1 - q) \, \omega^p(|\rho - q^j|, f)_p. \tag{17}$$

Из (16), на основании (15) и (17), получим (13) при $0 < p \leqslant 1$.

Докажем (14) для $j = 0$. Применяя (10) к функциям $\Phi(z) = f(z)$ и $g(z) = 1 - \rho z$ при $R = \rho + (1 - \rho)/2$ и $r = \rho - (\rho - q)/2$, а также учитывая, что $\{g(\rho)\}^m \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{g(Re^{i\varphi})\}^{-m} Re^{i\varphi}/(Re^{i\varphi} - \rho) \, d\varphi = 1$ и $\{g(\rho)\}^m \times \times \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{g(re^{i\varphi})\}^{-m} re^{i\varphi}/(re^{i\varphi} - \rho) \, d\varphi = 0$, получим

$$f(\rho e^{it}) - f(e^{it}) = (1 - \rho^2)^m \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(Re^{i(t+\theta)}) - f(e^{it})}{(1 - \rho Re^{i\theta})^m} \frac{Re^{i\theta}}{Re^{i\theta} - \rho} \, d\theta - \right. \\ \left. - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i(\theta+t)}) - f(\rho e^{it})}{(1 - \rho re^{i\theta})^m} \frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta} - \rho} \, d\theta \right\}.$$

Отсюда $|f(\rho e^{it}) - f(e^{it})|^p \leqslant 2^p (1 - \rho^2)^{mp} [(1 - \rho)^{-p} M_1^p(R, \Phi_1) + (\rho - q)^{-p} \times \times M_1^p(r, \Phi_2)]$, где $\Phi_1(z) = (f(ze^{it}) - f(e^{it}))(1 - \rho z)^{-m}$ и $\Phi_2(z) = (f(ze^{it}) - - f(\rho e^{it}))(1 - \rho z)^{-m}$. Легко видеть, что Φ_1 и Φ_2 принадлежат $H^p(q, 1)$. Воспользовавшись (8), получим

$$|f(\rho e^{it}) - f(e^{it})|^p \leqslant C_p (1 - \rho^2)^{mp} \{ (1 - \rho)^{-1} [M_p^p(1, \Phi_1) + \\ + M_p^p(\rho, \Phi_1)] + (p - q)^{-1} [M_p^p(\rho, \Phi_2) + M_p^p(q, \Phi_2)] \}. \tag{18}$$

Проинтегрируем (18) и оценим каждый из интегралов в правой части (18). Для этого нам понадобится следующее неравенство (см. [8, с. 606]):

$$\int_0^{\pi} \theta^k |1 - Re^{i\theta}|^{-\gamma} \, d\theta \leqslant A(k, \gamma, q)(1 - R)^{1+k-\gamma}, \quad k = 0, 1, \tag{19}$$

где $A(k, \gamma, q) = \displaystyle\int_0^{\infty} u^k (1 + (2\pi^{-1} qu)^2)^{-\gamma/2} \, du$, $\gamma > 3$, $R > q^2$. Можно показать, что

$$\lim_{\gamma\to\infty} A(k, \gamma, q) = 0. \tag{20}$$

Приведем подробные рассуждения для получения нужной нам оценки одного из интегралов. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} M_p^p(\rho, \Phi_1)\, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\| f(\rho e^{i(\theta+t)}) - f(\rho e^{it}) \|_p^p}{|1-\rho^2 e^{i\theta}|^{mp}}\, d\theta + \| f(\rho e^{it}) - f(e^{it}) \|_p^p \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} |1-\rho^2 e^{i\theta}|^{-mp}\, d\theta \leqslant 2 \left[\int_0^{\pi} \omega^p(\theta, f)_p |1-\rho^2 e^{i\theta}|^{-mp}\, d\theta + \right.$$

$$+ \| f(\rho e^{it}) - f(e^{it}) \|_p^p \int_0^{\pi} |1-\rho^2 e^{i\theta}|^{-mp}\, d\theta.$$

Отсюда, используя (11), а также (19) и (20), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} M_p^p(\rho, \Phi_1)\, dt \leqslant C(m, p, q)(1-\rho^2)^{1-mp} [\omega^p(1-\rho, f)_p + \| f(\rho e^{it}) - f(e^{it}) \|_p^p]. \tag{21}$$

Совершенно аналогично получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} M_p^p(1, \Phi_1)\, dt \leqslant C(m, p, q)(1-\rho)^{1-mp} \omega^p(1-\rho, f)_p, \tag{22}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} M_p^p(\rho, \Phi_2)\, dt \leqslant C(m, p, q)(1-\rho^2)^{1-mp} \omega^p(1-\rho, f)_p, \tag{23}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} M_p^p(q, \Phi_2)\, dt \leqslant C(m, p, q)(1-\rho^2)^{1-mp} \{\omega^p(1-\rho, f)_p +$$

$$+ (1-\rho^2) \| f(qe^{it}) - f(\rho e^{it}) \|_p^p\}. \tag{24}$$

Из (18) при помощи (21) — (24) имеем

$$\| f(\rho e^{it}) - f(e^{it}) \|_p^p (1 - C(m, p, q)) \leqslant C(m, p, q)(\rho - q)^{-1} \times$$

$$\times \{2^{mp} \omega^p(1-\rho, f)_p + (1-\rho)^2 \| f(\rho e^{it}) - f(qe^{it}) \|_p^p\}.$$

Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{m\to\infty} C(m, p, q) = 0$, получим (14) при $j = 0$. Случай $j = 1$ легко сводится к случаю $j = 0$. Для этого достаточно применить полученное неравенство к функции $P(\omega) = f(q/\omega) \in H^p(q, 1)$:

$$\| P(\rho^* e^{it}) - P(e^{it}) \|_p^p \leqslant C(m, p, q)(\rho^* - q)^{-1} 2^{mp} \omega^p(1-\rho^*, P)_p +$$

$$+ (1-\rho^*)^2 \| P(\rho^* e^{it}) - P(qe^{it}) \|_p^p.$$

Возвращаясь к переменной z и учитывая, что согласно (11) $\omega^p(1-\rho^*, P)_p \leqslant$ $\leqslant (1/q + 1)\, \omega^p(q/\rho^* - q, f)_p$, после элементарных преобразований получим

$$\| f(qe^{it}/\rho^*) - f(qe^{it}) \|_p^p \leqslant C(m, p, q)(1 - q/\rho^*)^{-1} \{2^{mp} \omega^p(q/\rho^* - q, f)_p +$$

$$+ (q/\rho^* - q)^2 \| f(qe^{it}/\rho^*) - f(e^{it}) \|_p^p\}.$$

Обозначая q/ρ^* через ρ, видим, что это и есть неравенство (14) при $j = 1$.

Таким образом, для случая $0 < p \leqslant 1$ теорема полностью доказана.

Доказательство в случае $p > 1$ проводится по той же схеме. Отличие состоит лишь в том, что вместо оценки (8) следует применять неравенство Гельдера. Рассуждения и выкладки в этом случае упрощаются.

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.— Гостехтеоретиздат, 1950.— 336 с.
2. *Зморович В. А.* О структурных формулах теории специальных классов аналитических функций и некоторых их приложениях.—-Изв. Киев. политехн. ин-та., 1954, 15, с.126—148.
3. *Стороженко Э. А.* Об одной задаче Харди —-Литтлвуда.—-Мат. сб., 1982, **119 (161)**, № 4, с. 564—583.
4. *Буадзе А. И.* Об одной задаче П. Л. Ульянова.—Сообщ. АН ГССР, 1965, **40**, № 3, с. 545—550.
5. *Villat H.* Le probleme de Dirichlet dans une aire annylaire.— Rend. Circ. Math., Palermo, 1912, 33, p. 134—175.
6. *Хейман У.*, *Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М.: Мир, 1980.— 304 с.
7. *Касьянюк С. А.* О функциях классов A и H^{δ} в круговом кольце.— Мат. сб., 1957, **42 (84)**, № 3, с. 300—326.
8. *Стороженко Э. А.* Приближение функций класса H^p, $0 < p < 1$.— Мат. сб., 1978, **105 (147)**, № 4, с. 601—621.

Одес. гос. ун-т

Поступила 22.06.82