УДК 519.41/47

В. С. Мулдагалиев

Строение конечных централизаторно факторизуемых групп

В настоящей заметке дается конструктивное описание конечных централизаторно факторизуемых групп.

Определение [1]. *Группа G называется централизаторно факторизуемой, если централизатор любой подгруппы из G дополняем в G.*

Теорема. *Конечная группа G тогда и только тогда централизаторно факторизуема, когда* $G = \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right) \rightthreetimes \left(\bigtimes_{j=1}^{m} \langle b_j \rangle\right)$, *где A_i и $\langle b_j \rangle$ — такие примарные подгруппы, что $A_i \triangle G$, нижний слой из A_i — минимальный нормальный делитель группы G, а подгруппа $A_i \rightthreetimes \langle b_j \rangle$ — либо абелева, либо группа Фробениуса, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Доказательство. Пусть G — централизаторно факторизуемая группа. Тогда в силу теоремы 3 из [2] $G = A \rightthreetimes B$, $A = C_G(A)$, подгруппы A и B абелевы. Далее возьмем минимальный нормальный делитель N из G, содержащийся в A. Ясно, что N — элементарная абелева p-подгруппа, отличная от единицы и инвариантная в G. Нижний слой C силовской p-подгруппы из A также инвариантен в группе G и к тому же содержит подгруппу N. В силу следствия 3 из леммы 5 работы [2] силовские подгруппы из G абелевы. Следовательно, по теореме Машке $C = N \times C_1$, где $C_1 \triangle G$. Повторяя дословно рассуждения доказательства леммы 2 работы [1], получим, что $P = A_1 \times F$, где $A_1 \triangle G$, $F \triangle G$. Заметим, что нижний слой подгруппы A_1 совпадает с N. Так как подгруппа F инвариантна в G, то она содержит минимальный нормальный делитель группы G. Применяя теперь для F приведенные выше рассуждения и повторяя их, если надо, для последующих множителей F, получим разложение подгруппы A в прямое произведение инвариантных в G примарных подгрупп, нижние слои которых совпадают с минимальными нормальными делителями группы G.

Пусть D — централизатор в G множителя A_1 из найденного разложения подгруппы A. Так как G — централизаторно факторизуемая группа, то $R = A \rightthreetimes C_G(A_1)$. Из условия 3) теоремы 2 работы [2] вытекает, что $B = C_B(A_1) \times B_1$. Выделим подгруппу $G_1 = N \rightthreetimes B_1$. Понятно, что N — минимальный нормальный делитель подгруппы $N \rightthreetimes B_1$. Возьмем элемент простого порядка b из подгруппы B_1 и рассмотрим подгруппы $A_1 \rightthreetimes \langle b \rangle$ и $H = N \rightthreetimes \langle b \rangle$. Если подгруппа $A_1 \rightthreetimes \langle b \rangle$ примарна, то по лемме 5 работы [2]

$A_1 \rightthreetimes \langle b \rangle$ и вместе с ней подгруппа H абелевы. Если подгруппа $A_1 \rightthreetimes \langle b \rangle$ непримарна, то H неабалева подгруппа. В самом деле, допустим, что это не так. В A-группе G коммутант G' пересекается с центром $Z(G)$ по единице (см. [3]) и, значит, $A_1 = C_{A_1}(\langle b \rangle) \times [A_1, \langle b \rangle]$. Нижний слой N из A_1 содержится в $C_{A_1}(\langle b \rangle)$ и, значит, $[A_1, \langle b \rangle]=1$. Но тогда $C_G(A_1)$ содержит элемент b, что невозможно. Итак, если подгруппа $A_1 \rightthreetimes \langle b \rangle$ непримарна, то подгруппа H неабелева.

Заметим далее, что коммутант подгруппы $N \rightthreetimes B_1$ содержится в H. Следовательно, $H \triangle N \rightthreetimes B_1$ и потому $Z(H) \rightthreetimes N \rightthreetimes B_1$. Отсюда вытекает, что $Z(H) \subseteq N$. Так как N — минимальный нормальный делитель из G, то $Z(H) = 1$, т. е. H — группа Фробениуса. Ввиду произвольности выбора подгруппы $\langle b \rangle$ подгруппа $N \rightthreetimes B_0$ также группа Фробениуса. Здесь B_0 — максимальная вполне факторизуемая подгруппа из B_1. Из свойств групп Фробениуса вытекает, что B_0 — циклическая подгруппа. Ясно, что B_1 также циклическая подгруппа. Пусть q — простое число, делящее порядок подгруппы B_1, $\langle b_1 \rangle$ — силовская q-подгруппа из B_1. Тогда подгруппа $A_1 \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$ — группа Фробениуса. Пусть A_i — произвольный множитель из разложения подгруппы A. Если подгруппа $A_i \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$ примарна, то она, как уже упоминалось, абелева. Если подгруппа $A_i \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$ непримарна, то, не нарушая общности, можно считать, что подгруппа $\langle b \rangle$ содержится в подгруппе $\langle b_1 \rangle$ и подгруппа $H_1 = N \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$ — группа Фробениуса. Так как по лемме 3 работы [2] централизатор подгруппы A_i в G централизаторно факторизуем и имеется очевидное соотношение $C_G(A_i) = A \rightthreetimes C_B(A_i)$, то по теореме 3 работы [2] подгруппа $C_B(A_i)$ разлагается в прямое произведение примарных циклических подгрупп. Теперь простая индукция показывает, что и вся подгруппа B разлагается в прямое произведение $B = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{m} \langle b_j \rangle$ примарных циклических подгрупп. Наконец, как показано выше, всякая подгруппа вида $A_i \rightthreetimes \langle b_j \rangle$ будет либо абелевой, либо группой Фробениуса, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $G = A \rightthreetimes B$, где $A = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \triangle G$, $B = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{m} \langle b_j \rangle$, $A_i \rightthreetimes \langle b_j \rangle$ — либо абелева, либо группа Фробениуса, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$. Если A_p, B_p — силовские p-подгруппы из A и B соответственно, то $P = A_p \rightthreetimes B_p$ — силовская p-подгруппа группы G. Так как группы Фробениуса непримарны, то $P = A_p \times B_p$ и, значит, G — A-группа.

Пусть Y — произвольная подгруппа из B. Тогда $C_G(Y) = C_A(Y) \rightthreetimes B$. Очевидно, что $C_A(Y) \triangle G$. Положим $C = C_G(C_A(Y))$. Пусть $C_A(Y) \subset Z(G)$. Тогда из упоминавшегося уже соотношения $G' \cap Z(G) = 1$ вытекает, что $A = C_A(Y) \times [A, B]$. Так как $[A, B] = G'$ и $G' \triangle G$, то условие 3) теоремы 3 работы [2] в этом случае выполнено. Допустим, что подгруппа $C_A(Y)$ не принадлежит центру группы G. Тогда предыдущие рассуждения приводят к соотношению $A = C_A(Y) \times [C, C]$. Так как подгруппа A содержится в подгруппе C, то коммутант G' группы G содержится в C и, значит, $C \triangle G$, т.е. $[C, C] \triangle G$. Ясно, что $A = C_G(A)$. Этим доказано, что группа G удовлетворяет условию 1) теоремы 3 работы [2].

Пусть, наконец, X — произвольная подгруппа из A. Обозначим через R централизатор подгруппы A в G. Тогда $R = A \rightthreetimes C_B(X)$. Для произвольного множителя A_i разложения подгруппы A либо $A_i \cap Z(R)$, либо $A_i \subseteq Z(R)$. В первом из этих случаев $Z(R)$ разлагается в прямое произведение некоторых множителей разложения подгруппы A. Так как G — A-группа, то произведение остальных множителей разложения подгруппы G инвариантно в G и дополняет $Z(R)$ в G. Осталось рассмотреть случай, когда подгруппа A_i содержится в $Z(R_i)$. Тогда $X \subseteq Z(R)$ и $C_G(X) = C_G(Z(R)$. Для любого индекса j, $j = 1, 2, \ldots, m$, подгруппа $\langle b_i \rangle$ либо принадлежит централизатору $C_G(A_i)$, либо ему не принадлежит, и потому $B = C_B(X) \times B_1$, где B_1 — прямое произведение примарных циклических подгрупп из разложения B, не принадлежащих централизатору $C_G(A_i)$ Этим доказано, что группа G удовлетворяет условию 2) теоремы 3 работы [2]. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Конечные сверхразрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами.— В кн.: Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 3—15.
2. *Мулдагалиев В. С.* Периодические централизаторно факторизуемые группы.— Киев, 1982.— 40 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 82.47)
3. *Taunt D. OA*-groups.— Proc. Cambride Phil. Soc., 1949, 45, p. 24—42.

Урал. пед. ин-т Поступила 07.10.83