УДК 519.21

Е. В. Остапенко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

The problem of optimal control of differential equations with interaction is consider. It is proved that the optimal control satisfies the maximum principle and there exists the generalized optimal control. It is shown that, in the considered problem, new technical aspects arise as compared with the usual problem of optimal control.

Розглядається задача оптимального керування диференціальних рівнянь з взаємодією. Доведено, що оптимальне керування задовольняє принцип максимуму та існує узагальнене оптимальне керування. В задачі, що розглядається, виникають нові технічні моменти у порівнянні зі звичайною задачею оптимального керування.

В данной статье рассматривается задача оптимального управления потоками, возникающими при решении уравнений с взаимодействием [1]. Такие уравнения имеют как конечномерные, так и бесконечномерные свойства, так как, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, задают сразу весь поток на фазовом пространстве. Получены необходимые условия для оптимального решения, аналогичные принципу максимума Понтрягина [2, 3], и приведены условия существования обобщенного оптимального управления.

Для некоторой вероятностной меры μ_0 рассмотрим множество функций $x: [0,T]\times R \to R$ класса C^1 по первой переменной и класса $L_2(\mu_0)$ по второй. При фиксированной первой переменной на пространстве функций $L_2(\mu_0)$ зададим непрерывный оператор $F_t: L_2(\mu_0) \to L_2(\mu_0)$, зависящий также от некоторого параметра $u(t) \in U \subset R$:

$$F_t(u,x)(y) = \int_R f(u(t), x(t,y), x(t,z))\mu_0(dz),$$

где $f\colon U\times R\times R \to R$ — ограниченная, непрерывная по совокупности переменных функция, имеющая частные непрерывные и ограниченные производные по второй и третьей переменным.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_R \varphi(s)\mu_T(ds) \to \inf, \\ \dot{x}(t,x_0) &= \int_R f(u(t), x(t,x_0), z)\mu_t(dz), \qquad (1)\\ x(0,x_0) &= x_0, \qquad x_0 \in R. \end{aligned}$$

Здесь $\mu_t = \mu_0 \circ x^{-1}(t,\cdot)$, $\varphi \in C^1(R)$, φ' финитна, $u \in KC([0,T])$ (через $KC([0,T])$ обозначен класс всех кусочно-непрерывных функций на $[0,T]$).

Оператор F_t может быть записан в виде

$$F_t(u,x)(x_0) = \int_R f(u(t), x(t,x_0), z)\mu_t(dz).$$

Под решением задачи (1) будем понимать пару (u,x) — управление, оптимизирующее функционал, и соответствующее ему решение дифференциального уравнения, которое будем называть оптимизирующим потоком.

Лемма 1. *Пусть начальная мера* μ_0 *имеет плотность* $p_0(\cdot)$. *Тогда для* *любого* $t \in [0, T]$ *мера* μ_t *также имеет некоторую плотность* $p_t(\cdot)$.

Доказательство. Из непрерывности f и f_2' следует [4] существование $\dfrac{\partial x(t,y)}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial x(t,y)}{\partial y} = e^{\int_0^t \left(\int_R f_2'(u(t), x(t,y), z)\mu_t(dz) \right) dt} > 0.$$

Из теоремы об обратной функции следует существование обратного отображения $x^{-1}(t,\cdot)$ и производной $\dfrac{\partial x^{-1}(t,y)}{\partial y}$.

Согласно определению

$$\mu_t(B) = \mu_0\{x_0 \mid x(t,x_0) \in B\} = \int_{x^{-1}(t,\cdot)(B)} p_0(z)\,dz =$$

$$= \int_B p_0(x^{-1}(t,y)) \frac{\partial x^{-1}(t,y)}{\partial y} dy.$$

Следовательно,

$$p_t(y) = p_0(x^{-1}(t,y)) \frac{\partial x^{-1}(t,y)}{\partial y}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* μ_0 *— гауссова мера. Тогда для любого* $t \in [0, T]$ *решение уравнения* $x(t,\cdot)$ *принадлежит классу* $L_2(\mu_0)$.

Доказательство. Из непрерывности f и f_2' следует существование $\dfrac{\partial x(t,y)}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial x(t,y)}{\partial y} = e^{\int_0^t \left(\int_R f_2'(u(t), x(t,y), z)\mu_t(dz) \right) dt}.$$

А так как f_2' ограничена, то $\dfrac{\partial x(t,y)}{\partial y}$ ограничена и, следовательно, $x(t,\cdot) \in L_2(\mu_0)$.

Лемма доказана.

Пусть $\aleph$ — множество всех вероятностных мер на борелевой σ-алгебре $B(R)$. Для двух мер $\mu, \nu \in \aleph$ определим множество $C(\mu,\nu)$ всех вероятностных мер на борелевой σ-алгебре $B(R^2)$, имеющих μ и ν своими проекциями. Определим расстояние между мерами μ и ν следующим образом:

$$\gamma_1(\mu,\nu) = \inf_{\kappa \in C(\mu,\nu)} \iint_{R^2} |u - v| \,\kappa(du, dv).$$

Лемма 3. *Пусть* $x_1(t,\cdot)$ *и* $x_2(t,\cdot)$ *— потоки, соответствующие различным управлениям,* $\mu_t^{x_1}$ *и* $\mu_t^{x_2}$ *— меры, переносимые этими потоками. Тогда*

$$\gamma(\mu_t^{x_1}, \mu_t^{x_2}) \le \| x_1(t,\cdot) - x_2(t,\cdot) \|.$$

Доказательство. Имеем

$$\gamma(\mu_t^{x_1}, \mu_t^{x_2}) = \inf_{\kappa_t \in C(\mu_t^{x_1}, \mu_t^{x_2})} \iint_{R^2} |u - v| \, \kappa_t(du, dv) =$$

$$= \inf_{\kappa \in C(\mu_0, \mu_0)} \iint_{R^2} |x_1(t, u) - x_2(t, v)| \, \kappa(du, dv) \le$$

$$\le \int_R |x_1(t, u) - x_2(t, u)| \mu_0(du) \le$$

$$\le \left(\int_R (x_1(t, u) - x_2(t, u))^2 \mu_0(du) \right)^{1/2} = \| x_1(t, \cdot) - x_2(t, \cdot) \|.$$

Лемма доказана.

Пусть $\psi \colon [0, T] \times R \to R$ — некоторая функция класса C^1 по первой переменной и класса $L_2(\mu_0)$ по второй. На пространстве $L_2(\mu_0)$ рассмотрим непрерывный функционал $H(u, x, \psi)$. Для каждого $x(t, \cdot) \in L_2(\mu_0)$

$$H(u, x, \psi) = \langle \psi(t, \cdot), F_t(u, x)(\cdot) \rangle =$$

$$= \int_R \psi(t, y) \left(\int_R f(u(t), x(t, y), z) \mu_t(dz) \right) \mu_0(dy).$$

В качестве $\psi(t, \cdot)$ используем решение сопряженной системы [2, 3]

$$\dot{\psi}(t, \cdot) = - H_x'(u, x, \psi),$$

удовлетворяющее условию трансверсальности

$$\psi(T, \cdot) = - \varphi'(x(T, \cdot)),$$

где под H_x' понимается производная Фреше функционала.

В покоординатной форме сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}(t, x_0) =$$

$$= - \left[\psi(t, x_0) \int_R f_2'(u(t), x(t, x_0), z) \mu_t(dz) + \int_R \psi(t, y) f_3'(u(t), x(t, y), x(t, x_0)) \mu_0(dy) \right],$$

$$\psi(T, x_0) = - \varphi'(x(T, x_0)), \qquad x_0 \in R.$$

Лемма 4. *Пусть* μ_0 — *гауссова мера. Тогда для любого* $t \in [0, T]$ *решение сопряженного уравнения* $\psi(t, \cdot)$ *принадлежит классу* $L_2(\mu_0)$.

Доказательство. Правую часть сопряженной системы можно рассматривать как линейный непрерывный оператор. Обозначим через $\Omega_t^T(u, \cdot)$, $t \in [0, T]$, матрицант сопряженной системы. Тогда, с учетом условия трансверсальности на правом конце,

$$\psi(t, \cdot) = \Omega_t^T(u, \cdot) \psi(T, \cdot) = - \Omega_t^T(u, \cdot) \varphi'(x(T, \cdot)).$$

Поскольку φ' финитна, то

$$\int_R \left(\Omega_t^T(u, y) \varphi'(x(T, y)) \right)^2 \mu_0(dy) =$$

$$= \int_R \left(\Omega_t^T(u, x^{-1}(T, z)) \varphi'(z) \right)^2 \mu_t(dz) < +\infty.$$

Лемма доказана.

Дополнительно предположим, что существует константа M такая, что

$$\|\varphi'(x+r) - \varphi'(x)\| \leq M\|r\|,$$
$$\|f(u+h, x+r, z) - f(u, x, z)\| \leq M(|h| + \|r\|),$$
$$\|f_2'(u+h, x+r, z) - f_2'(u, x, z)\| \leq M(|h| + \|r\|),$$
$$\|f(u, x, z_1) - f(u, x, z_2)\| \leq M(\|z_1 - z_2\|),$$
$$\|f_2'(u, x, z_1) - f_2'(u, x, z_2)\| \leq M(\|z_1 - z_2\|),$$
$$\|f_3'(u+h, x, z+r) - f_3'(u, x, z)\| \leq M(|h| + \|r\|).$$

Тогда для гауссовой меры μ_0 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если* (u, x) — *решение задачи* (1), *то для любого* $t \in [0, T]$ *выполняется условие максимума*

$$H(u, x, \psi) = \max_{v \in U} H(v, x, \psi).$$

Доказательство. Придадим управлению u приращение h такое, что $u + h$ является допустимым, т. е. $(u(t) + h(t)) \in U$, $t \in [0, T]$. Пусть x и $x + r$ — потоки, соответствующие управлениям u и $u + h$, μ_t^x, μ_t^{x+r} — меры, переносимые потоками x и $x + r$ соответственно. Тогда

$$\dot{r}(t, x_0) = \int_R f(u(t) + h(t), x(t, x_0) + r(t, x_0), z)\mu_t^{x+r}(dz) - $$
$$- \int_R f(u(t), x(t, x_0), z)\mu_t^x(dz),$$
$$r(0, x_0) = 0, \qquad x_0 \in R.$$

Проинтегрируем от 0 до t:

$$r(t, x_0) =$$
$$= \int_0^t \left(\int_R f(u(\tau) + h(\tau), x(\tau, x_0) + r(\tau, x_0), z)\mu_\tau^{x+r}(dz) - \int_R f(u(\tau), x(\tau, x_0), z)\mu_\tau^x(dz) \right) d\tau.$$

Обозначим через κ_τ меру на R^2, имеющую своими проекциями меры μ_τ^{x+r} и μ_τ^x. Тогда

$$\|r(t, \cdot)\| \leq$$
$$\leq \int_0^t \left(\int_{R^2} \|f(u(\tau) + h(\tau), x(\tau, \cdot) + r(\tau, \cdot), z_1) - f(u(\tau), x(\tau, \cdot), z_2)\|\kappa_\tau(dz_1, dz_2) \right) d\tau \leq$$
$$= \int_0^t \left(\int_{R^2} \|f(u(\tau) + h(\tau), x(\tau, \cdot) + r(\tau, \cdot), z_1) - f(u(\tau), x(\tau, \cdot), z_1)\|\kappa_\tau(dz_1, dz_2) + \right.$$
$$\left. + \int_{R^2} \|f(u(\tau), x(\tau, \cdot), z_1) - f(u(\tau), x(\tau, \cdot), z_2)\|\kappa_\tau(dz_1, dz_2) \right) d\tau \leq$$
$$\leq \int_0^t M\left[|h(\tau)| + \|r(\tau, \cdot)\| + \int_{R^2} |z_1 - z_2|\kappa_\tau(dz_1, dz_2) \right] d\tau \leq$$
$$\leq M\left[\int_0^t |h(\tau)|d\tau + \int_0^t \|r(\tau, \cdot)\|d\tau + \int_0^t \gamma_1(\mu_\tau^x, \mu_\tau^{x+r}) d\tau \right] \leq$$

$$\leq \; M\left[\int_0^t |h(\tau)|d\tau + 2\int_0^t \|r(\tau,\cdot)\|d\tau\right].$$

Теперь, согласно лемме Гроноулла – Беллмана,

$$\|r(t,\cdot)\| \;\leq\; C_1\int_0^T |h(t)|dt, \qquad t\in[0,T], \qquad \text{где} \qquad C_1 \;=\; Me^{2MT}.$$

Введем обозначение

$$I(u) \;=\; \int_R \varphi(s)\mu_T(ds) \;=\; \int_R \varphi(x(T,y))\mu_0(dy) \;=\; \Phi(x(T,\cdot)).$$

Тогда Φ можно рассматривать как функционал на $L_2(\mu)$, а под $\Phi' = \Phi'(x(T,x_0)) = \varphi'(x(T,x_0))$, $x_0\in R$, будем понимать его производную Фреше.

Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta I \;=\; I(u+h) \;-\; I(u).$$

Тогда существует $\theta_1\in[0,1]$ такое, что

$$\Delta I \;=\; \Phi(x(T,\cdot)+r(T,\cdot)) \;-\; \Phi(x(T,\cdot)) \;=\; \langle \Phi'(x(T,\cdot)+\theta_1 r(T,\cdot));\; r(T,\cdot)\rangle \;=$$

$$=\; \langle \Phi'(x(T,\cdot));\; r(T,\cdot)\rangle \;+\; \langle \Phi'(x(T,\cdot)+\theta_1 r(T,\cdot)) - \Phi'(x(T,\cdot));\; r(T,\cdot)\rangle.$$

Обозначим

$$R_1 \;=\; \langle \Phi'(x(T,\cdot)+\theta_1 r(T,\cdot)) - \Phi'(x(T,\cdot));\; r(T,\cdot)\rangle.$$

Тогда

$$|R_1| \;\leq\; \|r(T,\cdot)\|\,\|\Phi'(x(T,\cdot)+\theta_1 r(T,\cdot)) - \Phi'(x(T,\cdot))\| \;\leq$$

$$\leq\; \|r(T,\cdot)\|\,\|\varphi'(x(T,\cdot)+\theta_1 r(T,\cdot)) - \varphi'(x(T,\cdot))\| \;\leq$$

$$\leq\; \|r(T,\cdot)\|\,M\theta_1\|r(T,\cdot)\| \;\leq\; M\|r(T,\cdot)\|^2.$$

Поскольку $\varphi'(x(T,x_0)) = -\;\psi(T,x_0)$, то, рассматривая первое слагаемое, получаем

$$\langle \Phi'(x(T,\cdot));\; r(T,\cdot)\rangle \;=\; \langle \varphi'(x(T,\cdot));\; r(T,\cdot)\rangle \;=$$

$$=\; \int_R \varphi'(x(T,x_0))r(T,x_0)\mu_0(dx_0) \;=$$

$$=\; -\int_R \psi(T,x_0)r(T,x_0)dx_0 \;=-\; \langle \psi(T,\cdot);\; r(T,\cdot)\rangle \;=$$

$$=\; -\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \psi(t,\cdot);\; r(t,\cdot)\rangle dt \;=-\int_0^T [\langle \psi(t,\cdot);\; \dot r(t,\cdot)\rangle + \langle \dot\psi(t,\cdot);\; r(t,\cdot)\rangle]dt \;=$$

$$= -\int_0^T\left\langle \psi(t,\cdot); \int_R f(u(t)+h(t), x(t,\cdot)+r(t,\cdot), z)\mu_t^{x+r}(dz) - \int_R f(u(t), x(t,\cdot), z)\mu_t^{x}(dz)\right\rangle dt \;+$$

$$+\; \int_0^T \langle H_x'(u,x,\psi); r(t,\cdot)\rangle dt \;=$$

$$=\; -\int_0^T [H(u+h,\, x+r,\, \psi) \;-\; H(u,x,\psi)]dt \;+\; \int_0^T \langle H_x'(u,x,\psi); r(t,\cdot)\rangle dt.$$

Так как

$$H(u+h,\, x+r,\, \psi) \;=\; H(u+h,\, x,\, \psi) + \langle H_x'(u+h,\, x+\theta_2 r,\, \psi);\, r\rangle, \qquad \theta_2 \in [0,1],$$

то

$$\Delta I \;=\; -\int_0^T [H(u+h,\, x,\, \psi) - H(u,\, x,\, \psi)]dt \;+\; R_1 \;+\; R_2,$$

где

$$R_2 \;=\; -\int_0^T \langle H_x'(u+h,\, x+\theta_2 r,\, \psi) - H_x'(u,\, x,\, \psi);\, r\rangle dt.$$

Тогда

$$|R_2| \;\le\; \int_0^T \| r(t,\cdot)\| \times$$

$$\times\; \| H_x'(u(t)+h(t),\; x(t,\cdot)+\theta_2 r(t,\cdot),\; \psi(t,\cdot)) \;-\; H_x'(u(t),\, x(t,\cdot),\, \psi(t,\cdot))\| dt.$$

Рассмотрим норму разности производных:

$$\| H_x'(u+h,\, x+\theta_2 r,\, \psi) \;-\; H_x'(u,\, x,\, \psi)\| \;=$$

$$= \left\| \psi(t,\cdot)\left(\int_R f_2'(u(t)+h(t),\, x(t,\cdot)+\theta_2 r(t,\cdot),\, z_1)\mu_t^{x+\theta_2 r}(dz_1) \;-\right.\right.$$

$$\left. -\; \int_R f_2'(u(t),\, x(t,\cdot),\, z_2)\mu_t^{x}(dz_2)\right) \;+$$

$$+\; \int_R \psi(t,\,y)\big(f_3'(u(t)+h(t),\, x(t,\,y)+\theta_2 r(t,\,y),\, x(t,\cdot)+\theta_2 r(t,\cdot)) \;-$$

$$\left. -\; f_3'(u(t),\, x(t,\,y),\, x(t,\cdot))\big)\mu_0(dy)\right\| \;\le$$

$$\le\; \| \psi(t,\cdot)\| \left\| \int_R f_2'(u(t)+h(t),\, x(t,\cdot)+\theta_2 r(t,\cdot),\, z_1)\mu_t^{x+\theta_2 s}(dz_1) \;-\right.$$

$$\left. -\; \int_R f_2'(u(t),\, x(t,\cdot),\, z_2)\mu_t^{x}(dz_2)\right\| \;+$$

$$+\; \int_R |\psi(t,\,y)|\, \| f_3'(u(t)+h(t),\, x(t,\,y)+\theta_2 r(t,\,y),\, x(t,\cdot)+\theta_2 r(t,\cdot)) \;-$$

$$-\; f_3'(u(t),\, x(t,\,y),\, x(t,\cdot))\|\mu_0(dy).$$

Оценим первое слагаемое, предположив, что κ_t — мера на R^2, имеющая своими проекциями меры $\mu_t^{x+\theta_2 r}$ и μ_t^x:

$$\| \psi(t,\cdot)\| \left\| \int_R f_2'(u(t)+h(t),\, x(t,\cdot)+\theta_2 r(t,\cdot),\, z_1)\mu_t^{x+\theta_2 s}(dz_1) \;-\right.$$

$$\left. -\; \int_R f_2'(u(t),\, x(t,\cdot),\, z_2)\mu_t^{x}(dz_2)\right\| \;\le$$

$$\le \|\psi(t,\cdot)\| \int_{R^2} \| f_2'\big(u(\tau)+h(\tau), x(\tau,\cdot)+\theta_2 r(\tau,\cdot), z_1\big) -$$

$$- f_2'\big(u(\tau), x(\tau,\cdot), z_2\big)\| \kappa_t(dz_1, dz_2) \le$$

$$\le \|\psi(t,\cdot)\| \Bigg[\int_{R^2} \| f_2'\big(u(\tau)+h(\tau), x(\tau,\cdot)+\theta_2 r(\tau,\cdot), z_1\big) -$$

$$- f_2'\big(u(\tau), x(\tau,\cdot), z_1\big)\| \kappa_t(dz_1, dz_2) +$$

$$+ \int_{R^2} \| f_2'\big(u(\tau), x(\tau,\cdot), z_1\big) - f_2'\big(u(\tau), x(\tau,\cdot), z_2\big)\| \kappa_t(dz_1, dz_2) \Bigg] \le$$

$$\le M\|\psi(t,\cdot)\| \left[|h(t)| + \theta_2 \|r(t,\cdot)\| + \int_{R^2} |z_1 - z_2| \kappa_t(dz_1, dz_2) \right] \le$$

$$\le M\|\psi(t,\cdot)\| \Big(|h(t)| + \theta_2 \|r(t,\cdot)\| + \gamma\big(\mu_t^x, \mu_t^{x+\theta_2 r}\big) \Big) \le$$

$$\le M \max_{0\le t\le T} \|\psi(t,\cdot)\| \big(|h(t)| + 2\|r(t,\cdot)\|\big).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\int_R |\psi(t,y)| \| f_3'\big(u(t)+h(t), x(t,y), x(t,\cdot)+\theta_2 r(t,\cdot)\big) -$$

$$- f_3'\big(u(t), x(t,y), x(t,\cdot)\big)\| \mu_0(dy) \le$$

$$\le M \int_R |\psi(t,y)| \big(|h(t)| + \theta_2 \|r(t,\cdot)\|\big) \mu_0(dy) \le$$

$$\le M \max_{0\le t\le T} \|\psi(t,\cdot)\| \big(|h(t)| + \|r(t,\cdot)\|\big).$$

Тогда

$$|R_2| \le M \max_{0\le t\le T} \|\psi(t,\cdot)\| \int_0^T \|r(t,\cdot)\| \big(2|h(t)| + 3\|r(t,\cdot)\|\big) dt \le$$

$$\le M \max_{0\le t\le T} \|\psi(t,\cdot)\| \big(2C_1 + 3C_1^2 T\big) \left(\int_0^T |h(t)| dt \right)^2.$$

Для приращения функционала получаем представление

$$\Delta I = -\int_0^T [H(u+h, x, \psi) - H(u, x, \psi)] dt + R$$

и

$$|R| \le C \left(\int_0^T \|h(t)\| dt \right)^2,$$

где

$$C = M\left(C_1^2 + \max_{0\le t\le T} \|\psi(t,\cdot)\| \big(2C_1 + 3C_1^2 T\big) \right).$$

Пусть u — оптимальное управление. Выберем произвольное $v \in U$, t, $t+\varepsilon \in [0,T)$, $\varepsilon > 0$, и рассмотрим приращение вида

$$h(t) = \begin{cases} v(\tau) - u(\tau), & t \le \tau < t + \varepsilon, \\ 0, & \tau \in [0, T] \setminus [t, t + \varepsilon). \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta I = -\int_t^{t+\varepsilon} [H(v, x, \psi) - H(u, x, \psi)] d\tau + R.$$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского

$$|R| \le C\left(\int_t^{t+\varepsilon} |h(\tau)| d\tau\right)^2 \le \varepsilon C \int_t^{t+\varepsilon} |h(\tau)|^2 d\tau.$$

Обозначим

$$g(\tau) = H(v(\tau), x(\tau, \cdot), \psi(\tau, \cdot)) - H(u(\tau), x(\tau, \cdot), \psi(\tau, \cdot)).$$

Тогда

$$\int_t^{t+\varepsilon} g(\tau) d\tau = \varepsilon g(t + \theta_3 \varepsilon), \quad \text{где} \quad \theta_3 \in [0, 1].$$

Поскольку u — оптимальное управление, то $\Delta I \ge 0$. Поэтому

$$0 \le \Delta I = -\varepsilon g(t + \theta_3 \varepsilon) + R \le -\varepsilon g(t + \theta_3 \varepsilon) + \varepsilon C \int_t^{t+\varepsilon} |h(\tau)|^2 d\tau.$$

Разделим на ε:

$$g(t + \theta_3 \varepsilon) \le C \int_t^{t+\varepsilon} |h(\tau)|^2 d\tau.$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем $g(t) \le 0$, т. е. $H(v, x, \psi) - H(u, x, \psi) \le 0$.

Теорема доказана.

***Пример* 1.** Рассмотрим задачу оптимального управления без взаимодействия:

$$\int_R \varphi(s) \mu_T(ds) \to \inf,$$

$$\dot{x} = f(u, x),$$

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in R,$$

$$x_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}.$$

Пусть μ_0 имеет плотность p_0. Для такой задачи

$$H(u, x, \psi) = \int_R \psi(t, y) f(u(t), x(t, y)) \mu_0(dy),$$

где $\psi(t, \cdot)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t, x_0) = -\psi(t, x_0) f_2'(u(t), x(t, x_0)), \quad x_0 \in R,$$

удовлетворяющее условию трансверсальности

$$\psi(T, x) = -\varphi'(x(T, x_0)), \quad x_0 \in R,$$

а именно

$$\psi(t, x_0) = -\varphi'(x(T, x_0))e^{\int_t^T f_2'(u(\tau),\, x(\tau,\, x_0))d\tau},$$

$$H(u, x, \psi) = -\int_R \varphi'(x(T, y))e^{\int_t^T f_2'(u(\tau),\, x(\tau,\, y))d\tau} f(u(t), x(t, y))\mu_0(dy).$$

Получаем уравнение для определения оптимального управления u:

$$\int_R \varphi'(x(T, y))e^{\int_t^T f_2'(u(\tau),\, x(\tau,\, y))d\tau} \times$$

$$\times \left[f_1'(u(t), x(t, y)) + \int_t^T f_{1,2}''(u(\tau), x(\tau, y))d\tau \right]\mu_0(dy) = 0.$$

Обратимся к вопросу существования решения задачи (1). Следующий пример показывает, что при неограниченном управлении даже в простейшем линейном случае решение может не существовать.

***Пример* 2.** Рассмотрим случай начальной меры, сосредоточенной в точке y. Пусть динамика тяжелой частицы описывается уравнением $\dot{x} = ux$, а φ — любая функция класса $C^1(R)$, имеющая строгий минимум в точке 0. Тогда в задаче оптимального управления

$$I = \varphi(x(T)) \to \min,$$

$$\dot{x} = ux,$$

$$x(0) = y, \quad u \in R,$$

минимум не достигается, так как $x(T) = ye^{uT} > 0$ для любого $u \in R$, но $x(T) = ye^{uT} \to 0$, $u \to -\infty$.

Лемма 5. *Для любого* $x_0 \in R$ *множество траекторий* $\{x(\cdot, x_0)\}$, *соответствующих различным управлениям и начинающихся в* x_0, *предкомпактно в* $C([0, T])$.

Доказательство. Поскольку функция f ограничена, существует $C > 0$ такое, что

$$|f(u, x, z)| \le C, \quad u,\ x,\ z \in R.$$

Множество $\{x(\cdot, x_0)\}$ ограничено, так как

$$|x(t, x_0)| = \left| x_0 + \int_0^t \int_R f(u(s), x(s, x_0), z)\mu_s(dz)ds \right| \le |x_0| + CT,$$

и равностепенно непрерывно, так как

$$|x(t_1, x_0) - x(t_2, x_0)| \le \int_{t_1}^{t_2} \int_R |f(u(s), x(s, x_0), z)|\mu_s(dz)ds \le C|t_1 - t_2|.$$

Следовательно, согласно теореме Асколи – Арцела, множество $\{x(\cdot, x_0)\}$ предкомпактно в $C([0,T])$.

Лемма доказана.

Для произвольного потока x определим оператор, действующий на кусочно-непрерывных функциях на $[0, T]$: для любого $u \in KC([0,T])$

$$G(u, x)(t) = \int_R f(u(t), x(t, x_0), x(t, z))\mu_0(dz).$$

Расширим множество правых частей уравнения динамики всевозможными слабыми пределами операторов такого вида.

Замечание. В случае, когда $f_1'(u, x, z) \geq \varepsilon > 0$, u, x, $z \in R$, таким слабым пределам соответствуют слабые пределы некоторых последовательностей управлений.

Теорема 2. *Существует оптимизирующий поток задачи* (1).

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_n, n \geq 1\}$ такова, что

$$I(u_n) \to \inf_{u \in KC([0,T])} I(u), \qquad n \to \infty.$$

Каждому управлению u_n соответствует поток $x_n(t, \cdot)$, $t \in [0, T]$.

Для любого рационального x_0 из $\{x_n(\cdot, x_0), n \geq 1\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на $[0, T]$ подпоследовательность $\{x_{n_k}(\cdot, x_0), k \geq 1\}$ такую, что $x_{n_k}(\cdot, x_0) \Rightarrow \tilde{x}(\cdot, x_0)$, $k \to \infty$, на $[0, T]$.

Согласно диагональному методу Кантора, можно выбрать такую подпоследовательность $\{x_{n_l}(\cdot, x_0), l \geq 1\}$, что для любого рационального x_0 выполнено $x_{n_l}(\cdot, x_0) \Rightarrow \tilde{x}(\cdot, x_0)$, $l \to \infty$, на $[0, T]$. Пусть $k = n_l$. Тогда для любого $A > 0$ выполнено $x_k \Rightarrow \tilde{x}$, $k \to \infty$, на $[0, T] \times [-A, A]$ и

$$\tilde{x}(t, x_0) = x_0 + \lim_{k \to \infty} \int_0^t \int_R f(u_k(s), x_k(s, x_0), x_k(s, z))\mu_0(dz)ds.$$

Оценим разность $G(u_k, x_k)(s)$ и $G(u_k, \tilde{x})(s)$:

$$|G(u_k, x_k)(s) - G(u_k, \tilde{x})(s)| \leq$$

$$\leq \int_R |f(u_k(s), x_k(s, x_0), x_k(s, z)) - f(u_k(s), \tilde{x}(s, x_0), \tilde{x}(s, z))|\mu_0(dz) \leq$$

$$\leq \int_R [|f(u_k(s), x_k(s, x_0), x_k(s, z)) - f(u_k(s), \tilde{x}(s, x_0), x_k(s, z))| +$$

$$+ |f(u_k(s), \tilde{x}(s, x_0), x_k(s, z)) - f(u_k(s), \tilde{x}(s, x_0), \tilde{x}(s, z))|]\mu_0(dz) \leq$$

$$\leq M\int_R |x_k(s, x_0) - \tilde{x}(s, x_0)|\mu_0(dz) + M\int_R |x_k(s, z) - \tilde{x}(s, z)|\mu_0(dz) =$$

$$= M\left(|x_k(s, x_0) - \tilde{x}(s, x_0)| + \int_{|z| \leq A} |x_k(s, z) - \tilde{x}(s, z)|\mu_0(dz) + \int_{|z| > A} |x_k(s, z) - \tilde{x}(s, z)|\mu_0(dz)\right) \leq$$

$$\leq M\Bigg(|x_k(s, x_0) - \tilde{x}(s, x_0)| + \mu_0([-A, A]) \sup_{|z| \leq A} |x_k(s, z) - \tilde{x}(s, z)| +$$

$$+ \int_{|z| > A} |x_k(s, z) - \tilde{x}(s, z)|\mu_0(dz)\Bigg).$$

Поскольку $\dfrac{\partial x(t, y)}{\partial y} = e^{\int_0^t \left(\int_R f_2'(u(t), x(t, y), z) \mu_t(dz) \right) dt}$, существует $C > 0$ такое, что $\left| \dfrac{\partial x_k(s, y)}{\partial y} \right| \leq C$, $k \geq 1$. Следовательно, $|x_k(s, z)| \leq C|z| + |x_k(s, 0)|$, $k \geq 1$. Перейдем к пределу при $k \to \infty$: $|\tilde{x}(s, z)| \leq C|z| + |\tilde{x}(s, 0)|$.

Пусть $d = \sup\limits_{k \geq 1,\ s \in [0, T]} |x_k(s, 0)| < \infty$. Тогда

$$|x_k(s, z)| \leq C|z| + d, \qquad k \geq 1,$$

$$|\tilde{x}(s, z)| \leq C|z| + d.$$

В этом случае получаем

$$|G(u_k, x_k)(s) - G(u_k, \tilde{x})(s)| \leq M \Bigg(|x_k(s, x_0) - \tilde{x}(s, x_0)| +$$

$$+ \mu_0([-A, A]) \sup_{|z| \leq A} |x_k(s, z) - \tilde{x}(s, z)| + 2 \int\limits_{|z| > A} (C|z| + d) \mu_0(dz) \Bigg).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $A > 0$ такое, что

$$\int\limits_{|z| > A} (C|z| + d) \mu_0(dz) < \frac{\varepsilon}{6M},$$

и $k \geq 1$ такое, что

$$\sup_{|z| \leq A} |x_k(s, z) - \tilde{x}(s, z)| < \frac{\varepsilon}{3M \mu_0([-A, A])},$$

$$|x_k(s, x_0) - \tilde{x}(s, x_0)| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

т. е. $|G(u_k, x_k)(s) - G(u_k, \tilde{x})(s)| \leq \varepsilon$. Следовательно,

$$\tilde{x}(t, x_0) = x_0 + \lim_{k \to \infty} \int_0^t \int_R f(u_k(s), \tilde{x}(s, x_0), \tilde{x}(s, z)) \mu_0(dz) ds$$

и является оптимизирующим потоком для задачи (1).

Теорема доказана.

1. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic flows with interactions and measure-valued processes // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **63**. – P. 3963 – 3977.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
4. *Еругин Н. П., Штокало И. З.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Вища шк., 1974. – 472 с.

Получено 04.07.06