УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

АСИМПТОТИКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ψ-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We investigate approximative characteristics of classes of ψ-differentiable multivariable functions introduced by A. I. Stepanets. We give asymptotics of the approximation of functions from these classes.

Досліджуються апроксимативні характеристики класів ψ-диференційовних функцій багатьох змінних, уведених О. І. Степанцем. Наведено асимптотику наближення функцій цих класів.

1. Пусть $T^m = [-\pi, \pi]$ — m-мерный тор, $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $xy = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$, $|x| = \sqrt{xx}$, $C(T^m)$ — пространство непрерывных на T^m функций $f(x)$, 2π-периодических по каждой переменной с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{x \in T^m} |f(x)|$,

$$S[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k(f) e^{ikx} \tag{1}$$

— ряд Фурье функции $f \in C(T^m)$,

$$c_k(f) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{T^m} f(y) e^{-iky}\, dy, \qquad k \in \mathbb{Z}^m,$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пусть $\psi(t)$ — произвольная функция, определенная при всех действительных $t > 0$, $\dfrac{1}{\psi(0)} \overset{\mathrm{df}}{=} 0$, $\psi(|k|) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$. Отправляясь от ряда (1), предположим, что ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \frac{1}{\psi(|k|)} c_k(f) e^{ikx}$$

является рядом Фурье функции из $C(T^m)$, которая обозначается $f^{\psi}(x)$ и называется ψ-производной функции *f*. Множество функций $f \in C(T^m)$, удовлетворяющих таким условиям, обозначается через $C^{\psi}C(T^m)$.

Определение классов ψ-дифференцируемых функций одной переменной можно найти, например, в работе [1]. В случае $\psi = |k|^{-2r}$, $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$, говорят, что $f \in C(T^m)$ имеет r-й обобщенный лапласиан и S^r — класс функций, имеющих r-й обобщенный лапласиан ($f^{\psi} = \tilde{\Delta}^r f$, $r \in \mathbb{N}$). При $\psi = (|k_1| + \ldots + |k_m|)^{-r}$ имеем класс функций, обладающих r-й обобщенной производной Рисса ($f^{\psi} = D^r f$).

Пусть, далее, метод суммирования $U_n(f; \Lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, ряда Фурье (1) функций класса $C^{\psi}C(T^m)$ задан последовательностью функций $\Lambda = (\lambda_k^{(n)})$, $k \in \mathbb{Z}^m$, $n \in$

$\in \mathbb{N}$, причем

$$S[U_n(f;x;\Lambda)] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \lambda_k^{(n)} c_k(f) e^{ikx},$$

а $\mu^{(n)} = \mu_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{Z}^m$, $n \in \mathbb{N}$, определяет последовательность мультипликаторов в пространстве $C(T^m)$, т. е. ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \mu_k^{(n)} c_k(f) e^{ikx}$ является рядом Фурье некоторой функции $\tilde{U}_n(f;x;\mu) \in C(T^m)$ и

$$\left\|\mu_k^{(n)}\right\|_M = \left\|\mu^{(n)}\right\|_{C\to C} = \sup_{|f|\le 1} \left\|\tilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C.$$

Если

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\mu_k^{(n)}\right\|_C < \infty,$$

то последовательность $\mu^{(n)}$ называется равномерно ограниченной в $C(T^m)$. Достаточные условия равномерной ограниченности мультипликаторов в $C(T^m)$ в случае $m = 1$ хорошо известны (см., например, [2, с. 100]). В случае кратных рядов Фурье, когда

$$\mu_k^{(n)} = \mu\left(\frac{k}{n}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}^m, \qquad n \in \mathbb{N},$$

такие условия содержатся, например, в [3, с. 39; 4]. Одно из условий заключается в принадлежности функции $\mu(u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, алгебре $B(\mathbb{R}^m)$-преобразований Фурье конечных борелевых мер на $\mathbb{R}^m$:

$$\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-iux}\, d\nu(u)$$

с нормой

$$\|\mu\|_B = \inf \operatorname{var} \nu < \infty.$$

Пусть, далее, $\psi_i(|k|) \ne 0$, $\dfrac{1}{\psi_i(0)} \overset{\mathrm{df}}{=} 0$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, — произвольные функции. Следуя [1, с. 35] (см. также [2, с. 145]), будем говорить, что величина ψ_1 c-предшествует величине ψ_2, и записывать $\psi_1 \overset{c}{\le} \psi_2$, если из включения $f \in C^{\psi_2}C(T^m)$ следует существование $f^{\psi_1} \in C(T^m)$. В этом случае справедливо соотношение

$$S[(f^{\psi_1})^{\psi_2/\psi_1}] = S[f^{\psi_2}].$$

Действительно, ряды

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \frac{1}{\psi_i(|k|)} c_k(f) e^{ikx}, \qquad i = 1, 2,$$

являются рядами Фурье функций f^{ψ_1} и f^{ψ_2} соответственно. При $i = 1$

$$S[f^{\psi_1}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k(f^{\psi_1}) e^{ikx},$$

где

$$c_k(f^{\psi_1}) = \frac{1}{\psi_1(|k|)} c_k(f), \qquad k \in \mathbb{Z}^m.$$

Отсюда

$$S[(f^{\psi_1})^{\psi_2/\psi_1}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \frac{\psi_1(|k|)}{\psi_2(|k|)} c_k(f^{\psi_1})e^{ikx} = S[f^{\psi_2}] \qquad \left(\frac{\psi_1(0)}{\psi_2(0)} \overset{\mathrm{df}}{=} 0\right).$$

Следовательно,

$$f^{\psi_1} \in C^{\psi_2/\psi_1}C(T^m) \qquad \forall f\in C^{\psi_2}C(T^m).$$

Пусть теперь ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} \frac{\psi_2(|k|)}{\psi_1(|k|)} e^{-ikx} \tag{2}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой 2π-периодической по каждой переменной функции $D_\psi(x)$, $D_\psi \in L(T^m)$, $\psi \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{\psi_2}{\psi_1}$. Тогда ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \frac{1}{\psi_1(|k|)} c_k(f)e^{ikx} \qquad \forall f\in C^{\psi_2}C(T^m) \tag{3}$$

является рядом Фурье некоторой непрерывной функции $f^{\psi_1}(x)$.

В самом деле, поскольку $f^{\psi_2}\in C(T^m)$, $D_\psi \in L(T^m)$, функция

$$I(x) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{T^m} f^{\psi_2}(x-t)D_\psi(t)\,dt$$

является непрерывной. Рассматривая для нее ряд Фурье, убеждаемся, что он совпадает с рядом (3).

Если $\dfrac{\psi_2(|k|)}{\psi_1(|k|)} = |k|^{-r}$, $r>0$, $k\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}$, и ряд (2) является рядом Фурье суммируемой функции D_ψ, то $\psi_1 \overset{c}{\le} \psi_2$, в частности при $\psi_1(|k|) = |k|^{-r_1}$, $\psi_2(|k|) = |k|^{-r_2}$, $k\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}$, $r_1, r_2 > 0$, из изложенного выше следует, что $\psi_1 \overset{c}{\le} \psi_2$.

В дальнейшем нам понадобится следующий факт. Если $\mu^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, — последовательность мультипликаторов, равномерно ограниченная в $C(T^m)$, и $\forall\, k\in\mathbb{Z}^m$ $\mu_k^{(n)}\to 0$, $n\to\infty$, то

$$\left\|\tilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C = o(1), \qquad n\to\infty. \tag{4}$$

Действительно, в этом случае

$$\left\|\tilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C \le K\|f\|_C \qquad \forall f\in C(T^m),$$

где K — постоянная, не зависящая от $n\in\mathbb{N}$. Отсюда для любого полинома $T(x)$ получаем

$$\left\|\tilde{U}_n(f;x;\mu)\right\|_C = \left\|\tilde{U}_n(f-T;x;\mu)\right\|_C + \left\|\tilde{U}_n(T;x;\mu)\right\|_C \le$$
$$\le K\|f-T\|_C + \left\|\tilde{U}_n(T;x;\mu)\right\|_C.$$

За счет надлежащего выбора $T(x)$ первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым. Учитывая, что при любом достаточно большом n сумма $\tilde{U}_n(T; x; \mu)$ содержит одинаковое число членов, в силу условия $\mu_k^{(n)} \to 0$, $n \to \to \infty$, заключаем, что

$$\left\| \tilde{U}_n(T; x; \mu) \right\|_C = o(1), \qquad n \to \infty.$$

2. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_s(t)$, $s = 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$, — *система произвольных функций, определенных при всех* $t > 0$, $\frac{1}{\psi_s(0)} \overset{\text{df}}{=} 0$, $\psi_s(|k|) > 0$, $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$; $\varphi_s(n)$, $s = 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$, — *произвольная система последовательностей действительных положительных чисел,* $\Lambda = (\lambda_k^{(n)} = \tilde{\lambda}_{|k|}^{(n)})$, $k \in \mathbb{Z}^m$, $n \in \mathbb{N}$, — *матрица чисел такая, что*

$$\tilde{\lambda}_{|k|}^{(n)} = \sum_{s=0}^{r} a_s \frac{\varphi_s(n)}{\psi_s(|k|)} + o\left(\frac{\varphi_r(n)}{\psi_r(|k|)} \right), \qquad n \to \infty, \tag{5}$$

$$\psi_0(|k|) = \varphi_0(n) \equiv 1,$$

где a_s, $s = 0, 1, \ldots, r$, — *некоторые действительные числа,* $a_0 \overset{\text{df}}{=} 1$.

Пусть, далее,

$$\mu^{(n)} = \mu_k^{(n)} \overset{\text{df}}{=} \left(\lambda_k^{(n)} - \sum_{s=0}^{r} a_s \frac{\varphi_s(n)}{\psi_s(|k|)} \right) \frac{\psi_r(|k|)}{\varphi_r(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad k \in \mathbb{Z}^m, \tag{6}$$

порождает последовательность мультипликаторов, равномерно ограниченную в $C(T^m)$. *Тогда если*

$$\psi_s \overset{c}{\leq} \psi_r \qquad \forall s = 1, \ldots, r-1,$$

то для каждой функции $f \in C^{\psi_r}C(T^m)$ *равномерно по* x *имеет место асимптотическое равенство*

$$U_n(f; x; \Lambda) - f(x) = \sum_{s=1}^{r} a_s \varphi_s(n) f^{\psi_s}(x) + o(\varphi_r(n)), \qquad n \to \infty. \tag{7}$$

Полагая, в частности, $\psi_s(|k|) = |k|^{-2s}$, $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, $\varphi_s(n) = n^{-2s}$, $s = 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k^{(n)} = \lambda\left(\frac{k}{n}\right)$, *в условиях теоремы* 1 *получаем асимптотику приближения функций класса* S^r, *найденную в работе* [5]:

$$U_n(f; x; \Lambda) - f(x) = \sum_{s=1}^{r} \frac{a_s \tilde{\Delta}^s f(x)}{n^{2s}} + o\left(\frac{1}{n^{2r}} \right), \qquad n \to \infty. \tag{8}$$

Равенства вида (8) в случае $m = 1$ восходят к работам Е. В. Вороновской [6], С. Н. Бернштейна [7]. В m-мерном случае ($m > 1$) асимптотика приближения конкретными методами суммирования рядов исследовалась в работах [8, 9]. В частности, в классе S^r для средних типа Абеля – Пуассона

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda\left(\frac{k}{n}\right) = \tilde{\lambda}\left(\frac{|k|}{n}\right) = e^{-\left(\frac{|k|}{n}\right)^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0$$

(в этом случае (см. [5]) по теореме Лефстрема [10] $\mu(u) \in B(\mathbb{R}^m)$), асимптотика приближения установлена в работе [8].

***Доказательство теоремы* 1.** В силу условий теоремы ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \mu_k^{(n)} \frac{1}{\psi_r(|k|)} c_k(f) e^{ikx} \qquad \forall f \in C^{\psi_r}C(T^m)$$

является рядом Фурье некоторой функции из $C(T^m)$.

Далее, с учетом того, что $a_0 = 1$, $\varphi_0 = \psi_0 \equiv 1$,

$$I_n(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \mu_k^{(n)} \frac{1}{\psi_r(|k|)} c_k(f) e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \left(\lambda_k^{(n)} - \sum_{s=0}^{r} a_s \frac{\varphi_s(n)}{\psi_s(|k|)} \right) \frac{1}{\varphi_r(n)} c_k(f) e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{\varphi_r(n)} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \lambda_k^{(n)} c_k(f) e^{ikx} - \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k(f) e^{ikx} - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^{r} a_s \varphi_s(n) \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \frac{1}{\psi_s(|k|)} c_k(f) e^{ikx} \right) =$$

$$= S\left[\frac{1}{\varphi_r(n)} \left(U_n(f;x;\Lambda) - f(x) - \sum_{s=1}^{r} a_s \varphi_s(n) f^{\psi_s}(x) \right) \right].$$

Поскольку $f^{\psi_s}(x) \in C(T^m)$, $s = 1, \ldots, r-1$, то $U_n(f; x; \Lambda) \in C(T^m)$.

В силу условия (5) $\mu_k^{(n)} \to 0$, $n \to \infty$, $k \in \mathbb{Z}^m$. Отсюда, принимая во внимание соотношение (4), имеем

$$\| I_n(x) \|_C = o(1), \qquad n \to \infty.$$

Теорема 1 доказана.

В работе [5] из соотношений вида (8) устанавливается гладкость функции $f \in C(T^m)$. Поэтому здесь рассматривается вопрос об обращении теоремы 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda = (\lambda_k^{(n)} = \tilde{\lambda}_{|k|}^{(n)})$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $k \in \mathbb{Z}^m$, $n \in \mathbb{N}$, — *матрица чисел, задающая последовательность мультипликаторов, равномерно ограниченную в* $C(T^m)$, *и выполнены условия* (5), (6). *Если при некотором* $r \in \mathbb{N}$ *для* $f \in C(T^m)$ *равномерно по* x *имеет место асимптотическое равенство*

$$U_n(f;x;\Lambda) - f(x) = \sum_{s=1}^{r} g_s(x)\varphi_s(n) + o(\varphi_r(n)), \qquad n \to \infty, \tag{9}$$

где $g_s(x) \in C(T^m)$, $s = 1, \ldots, r$, *то* $f \in C^{\psi_r}C(T^m)$ *и* $a_s f^{\psi_s}(x) = g_s(x)$.

Доказательство. Как и в работе [5], воспользуемся приемом Фавара [11]. В силу (9) при $r = 1$ имеем

$$\left\| \frac{U_n(f;x;\Lambda) - f(x)}{\varphi_1(n)} \right\|_C = o(1), \qquad n \to \infty. \tag{10}$$

Рассмотрим суммы Бохнера – Рисса

$$\sigma_N^{\delta}(F;x) = \sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta} c_k(F)e^{ikx}, \quad n\in\mathbb{N},$$

для функции

$$F(x) \overset{\text{df}}{=} \frac{U_n(f;x;\Lambda)-f(x)}{\varphi_1(n)}.$$

Учитывая, что при $\delta > \dfrac{m-1}{2}$ средние $\sigma_N^{\delta}(\cdot;x)$ регулярны (см., например, [3]) и из условия (5) при $r=1$ следует

$$\frac{(\lambda_k^{(n)}-1)\psi_1(|k|)}{\varphi_1(n)} = a_1 + o(1), \quad n\to\infty, \tag{11}$$

в силу (10) находим

$$\left\|\sigma_N^{\delta}\left(\frac{U_n(f;x;\Lambda)-f(x)}{\varphi_1(n)}\right)\right\|_C =$$

$$= \left\|\sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta}\frac{(\lambda_k^{(n)}-1)\psi_1(|k|)}{\varphi_1(n)\psi_1(|k|)}c_k(f)e^{ikx}\right\|_C =$$

$$= \left\|\sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta}\frac{1}{\psi_1(|k|)}c_k(f)e^{ikx}\right\|_C = o(1), \quad n\to\infty, \quad \delta>\frac{m-1}{2}. \tag{12}$$

Отсюда вследствие равенства Парсеваля получаем

$$K \ge \int_{T^m}\left|\sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{\delta}\frac{1}{\psi_1(|k|)}c_k(f)e^{ikx}\right|^2 dx =$$

$$= \sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{2\delta}\frac{1}{\psi_1^2(|k|)}c_k^2(f), \quad K \equiv \text{const} > 0.$$

Значит,

$$\sum_{|k|\le N_0}\left(1-\frac{|k|^2}{N^2}\right)^{2\delta}\frac{1}{\psi_1^2(|k|)}c_k^2(f) \le K \quad \forall N_0, \quad 0\le N_0\le N.$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$, находим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\frac{1}{\psi_1^2(|k|)}c_k^2(f) < \infty.$$

Следовательно, существует $f^{\psi_1}(x)$ с суммируемым квадратом, $f^{\psi_1}\in L_2(T^m)$, и

$$S[f^{\psi_1}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m}\frac{1}{\psi_1(|k|)}c_k(f)e^{ikx}.$$

Поскольку $\sigma_N^{\delta}(f)\to f$, $N\to\infty$, $\forall f\in L_2(T^m)$ почти всюду, вследствие (12) убеждаемся в ограниченности почти всюду функции $f^{\psi_1}(x)$.

На основании соотношения (9) имеем

$$\left\| \sigma_N^\delta \left(\frac{U_n(f;x;\Lambda) - f(x)}{\varphi_1(n)} - g_1(x) \right) \right\|_C =$$

$$= \left\| \sum_{|k|\le N} \left(1 - \frac{|k|^2}{N^2}\right)^\delta \frac{\lambda_k^{(n)} - 1}{\varphi_1(n)} c_k(f) e^{ikx} - \sum_{|k|\le N} \left(1 - \frac{|k|^2}{N^2}\right)^\delta c_k(g_1) e^{ikx} \right\|_C =$$

$$= \left\| \sum_{|k|\le N} \left(1 - \frac{|k|^2}{N^2}\right)^\delta \left[\frac{(\lambda_k^{(n)} - 1)\psi_1(|k|)}{\varphi_1(n)\psi_1(|k|)} - c_k(g_1) \right] e^{ikx} \right\|_C = o(1), \qquad n \to \infty.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом (11) получаем

$$\left\| \sum_{|k|\le N} \left(1 - \frac{|k|^2}{N^2}\right)^\delta \left[\frac{a_1}{\psi_1(|k|)} c_k(f) - c_k(g_1) \right] e^{ikx} \right\|_C = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$c_k(f^{\psi_1}) = \frac{1}{\psi_1(|k|)} c_k(f),$$

заключаем, что $a_1 c_k(f^{\psi_1}) = c_k(g_1)$, и поэтому $a_1 f^{\psi_1}$ эквивалентна g_1.

Предположим теперь, что теорема справедлива для любого $r \le r_0$. Доказательство ее при $r = r_0 + 1$ получается путем применения предыдущих рассуждений к функции

$$U_n(f;x;\Lambda) - f(x - \sum_{s=0}^{r} a_s f^{\psi_s}(x)\varphi_s(n).$$

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. Ч. I. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – 426 с.
3. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 331 с.
4. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378 – 1409.
5. *Кузнецова О. И.* Асимптотическое приближение гладких функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 75 – 81.
6. *Вороновская Е. В.* Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1932. – № 4. – С. 79 – 85.
7. *Бернштейн С. Н.* Добавление к статье Е. В. Вороновской „Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна”. – Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – С. 155 – 158.
8. *Голубов Б. И.* Об асимптотике кратных сингулярных интегралов для дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 5. – С. 749 – 762.
9. *Дьячков А. М.* Асимптотика сингулярных интегралов и дифференциальные свойства функций. – М., 1986. – 52 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 7383-В86.
10. *Löfström J.* Some theoreme on interpolation spaces with application to approximation in L_p // Math. Ann. – 1967. – **172**, № 3. – P. 176 – 196.
11. *Favard F.* Sur la saturation des procedes sommation // J. math. pures et appl. – 1957. – **36**, № 4. – P. 359 – 372.

Получено 13.06.05