УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, С. И. Жир (Акад. тамож. службы Украины, Днепропетровск)

О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОГО ПОРЯДКА

We prove a Hadamard-type theorem which connects the generalized order of growth $\rho_f^*(\alpha,\beta)$ of entire transcendental function f with coefficients of its expansion into the Faber series. The theorem is an original extension of a certain result by S. K. Balashov to the case of finite simply connected domain G with the boundary γ belonging to the S. Ya. Al'per class Λ^*. This enables us to obtain boundary equalities that connect $\rho_f^*(\alpha,\beta)$ with the sequence of the best polynomial approximations of f in some Banach spaces of functions analytic in G.

Доведено теорему типу Адамара, яка пов'язує узагальнений порядок зростання $\rho_f^*(\alpha,\beta)$ цілої трансцендентної функції f з коефіцієнтами її розвинення в ряд Фабера. Теорема є своєрідним поширенням одного результату С. К. Балашова на випадок скінченної однозв'язної області G з межею γ, що належить до класу С. Я. Альпера Λ^*. На основі цього отримано граничні рівності, які пов'язують $\rho_f^*(\alpha,\beta)$ з послідовністю найкращих поліноміальних наближень f у деяких банахових просторах функцій, аналітичних в G.

1. Первые результаты, связанные с полиномиальной аппроксимацией целых трансцендентных функций, были получены С. Н. Бернштейном в случае равномерного приближения на отрезке $[-1,1]$ алгебраическими многочленами вещественной функции f, которая являлась сужением на $[-1,1]$ целой трансцендентной функции (см., например, [1]). В дальнейшем это дало толчок к исследованию связей между различными характеристиками роста максимума модуля целой трансцендентной функции и скоростью стремления к нулю последовательности ее наилучших полиномиальных приближений в $C[-1,1]$ (см., например, [2, 3]). Предложенные М. Н. Шереметой [4, 5] и дополненные С. К. Балашовым [6] обобщения классических характеристик роста целых функций существенно обогатили шкалу роста и позволили получить ряд новых результатов теории аппроксимации в $C[-1,1]$ (см., например, [7]).

Предельные равенства, связывающие характеристики роста целых трансцендентных функций с последовательностями их наилучших полиномиальных приближений в некоторых банаховых пространствах аналитических в единичном круге функций, были получены, в частности, в работах [8 – 13].

Для конечной односвязной области, ограниченной спрямляемой жордановой кривой, первые результаты указанного вида получил А. В. Батырев [14]. В последующем эта тематика получила свое развитие в ряде других работ (см., например, [15 – 18]). Данная статья продолжает указанные исследования в конечной односвязной области, и для этого в ней использованы некоторые обобщения классических характеристик роста целых функций.

2. Пусть G — конечная односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная гладкой спрямляемой замкнутой жордановой кривой γ, причем дополнением к $\overline{G}=G\cup\gamma$ является односвязная область Ω, содержащая точку $z=\infty$. При этом $\gamma=\left\{z\in\mathbb{C}\colon z(s)=x(s)+iy(s),\, 0\le s\le l,\, z(0)=z(l)\right\}$, где s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на γ, l — длина γ. Обозначим через $\theta(s)$ угол между касательной к кривой γ в точке $z(s)$ и положительным направлением оси Ox, а через $\omega(\theta, t)$ модуль непрерывности функции θ. Полагают [19], что кривая γ принадлежит классу Λ^*, если для нее выполнено условие

$$\int\limits_0^c \frac{\omega(\theta,t)}{t}\ \ln|t|dt < \infty,$$

где c — произвольное положительное число.

Пусть функция $w = \Phi(z)$ отображает внешность замкнутой кривой γ плоскости z на внешность единичной окружности $|w| = 1$ плоскости w так, что $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi'(\infty) = \delta > 0$. При этом условие $\Phi(\infty) = \infty$ означает, что функция $w = \Phi(z)$ точку $z = \infty$ переводит в точку $w = \infty$, а условие $\Phi'(\infty) = \delta > 0$ иногда записывается в виде $\lim\big\{\Phi(z)/z\colon z \to \infty\big\} = \delta > 0$. В окрестности точки $z = \infty$ разложение Φ в ряд Лорана имеет вид

$$\Phi(z) = \delta z + \delta_0 + \frac{\delta_1}{z} + \ldots + \frac{\delta_k}{z^k} + \ldots\ . \tag{1}$$

Через γ_r, $r > 1$, обозначим на плоскости z линию уровня функции Грина области G, которая при отображении $w = \Phi(z)$ переходит в окружность $|w| = r$ плоскости w. Поскольку отображение $w = \Phi(z)$ конформно и однолистно, при $r > 1$ линия уровня γ_r является замкнутой правильной аналитической кривой. В случае $r = 1$ линия уровня γ_1 есть граница γ области G. Произвольная линия уровня γ_r, $r > 1$, определяет две канонические области: внутренность G_r и внешность Ω_r. При этом $\overline{G_r} = G_r \cup \gamma_r$, $\overline{G} = \overline{G}_1$, $\Omega = \Omega_1$.

3. Пусть $\mathcal{L}_0$ — класс функций h, принимающих положительные значения, определенных на полусегменте $[1, \infty)$ и удовлетворяющих условиям:

1) функции h дифференцируемы на $[1, \infty)$, строго монотонно возрастают и при $x \to \infty$ стремятся к ∞;

2) для любого $c \in (0, \infty)$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1. \tag{2}$$

Функции h, для которых выполняется условие 2, называют функциями медленного роста.

Развивая идеи Н. М. Шереметы [4], С. К. Балашов рассмотрел в [6], в частности, понятие обобщенного порядка целой трансцендентной функции f:

$$\rho_f^*(\alpha,\beta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\alpha\big(\ln M(f,r)\big)}{\beta(r)}, \tag{3}$$

где α, $\beta \in \mathcal{L}_0$, $M(f,r) = \max\big\{\big|f(z)\big|\colon |z| = r\big\}$. Он установил формулу типа Адамара, связывающую характеристику (3) и коэффициенты ряда Тейлора функции f.

Для целой транцендентной функции f обозначим $\widetilde{M}(f,r) = \max\big\{\big|f(z)\big|\colon z \in \overline{G}_r\big\}$, $r > 1$. Пусть $z = \Psi(w)$ — функция, обратная к $w = \Phi(z)$. Эта функция отображает конформно и однолистно область $|w| > 1$ на область Ω. Ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки $w = \infty$ имеет вид

$$z = \Psi(w) = \nu w + \nu_0 + \frac{\nu_1}{w} + \ldots + \frac{\nu_k}{w^k} + \ldots, \quad |w| > 1, \tag{4}$$

где $\nu = 1/\delta$.

Использовав (2) – (4), покажем, что

$$\rho_f^*(\alpha, \beta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln \widetilde{M}(f, r)\big)}{\beta(r)}. \tag{5}$$

Действительно, полагая $z = w\nu$ и $R = r|\nu|$, имеем

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\big(\ln \widetilde{M}(f, r)\big)}{\beta(r)} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\Big(\ln \max\limits_{|w|=r} \Big|f\big(\Psi(w)\big)\Big|\Big)}{\beta(r)} =$$

$$= \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\alpha\Big(\ln \max\limits_{|w|=r} \Big|f\Big(w(\nu + \frac{\nu_0}{w} + \ldots + \frac{\nu_k}{w^{k+1}} + \ldots)\Big)\Big|\Big)}{\beta(r)} =$$

$$= \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\alpha\Big(\ln \max\limits_{|z|=R} \big|f(z)\big|\Big)}{\beta(R)} = \rho_f^*(\alpha, \beta).$$

Напомним, что n-й полином Фабера F_n для области G есть правильная часть разложения n-й степени функции Φ из (1) в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$.

Нам потребуется следующая теорема.

Теорема A [20, с. 135, 136]. *Пусть F_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, — последовательность полиномов Фабера для односвязной области G. Если функция f регулярна в области G_r, $1 < r < \infty$, и на линии уровня γ_r имеет особую точку, то*:

1) *функция f разлагается в ряд по полиномам Фабера*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) F_n(z), \tag{6}$$

где

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f\big(\Psi(w)\big)}{w^{n+1}} dw, \quad 1 < R < r;$$

2) *при этом*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n(f)|^{1/n} = \frac{1}{r} \tag{7}$$

и ряд (6) *равномерно сходится внутри G_r и расходится вне $\overline{G_r}$*;

3) *обратно, если выполняется* (7), *то ряд* (6) *равномерно сходится внутри G_r и расходится вне $\overline{G_r}$, а функция f, определенная равенством* (6), *регулярна в G_r и на линии уровня γ_r имеет особую точку.*

Поскольку

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\Phi^n(\xi)}{\xi - z} d\xi, \qquad z \in G_r, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

то

$$\big|F_n(z)\big| \leq c_1(r) r^n, \qquad c_1(r) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{l(\gamma_r)}{2\pi d(\gamma, \gamma_r)}, \quad z \in \gamma_r, \tag{8}$$

где $l(\gamma_r)$ — *длина линии уровня* γ_r, $d(\gamma, \gamma_r)$ — *расстояние между границей* γ *области* G *и кривой* γ_r; $r > 1$.

Следующее утверждение является теоремой типа Адамара, связывающей величину (5) с коэффициентами разложения целой трансцендентной функции f в ряд Фабера (6). Его также можно рассматривать как своеобразное распространение одного результата С. К. Балашова [6] на случай конечной односвязной области G с границей $\gamma \in \Lambda^*$.

Теорема 1. *Пусть функции* β, α *принадлежат классу* $\mathcal{L}_0$ *и* $Q(x,c) \stackrel{\text{df}}{=} \beta^{-1}\big(c\alpha(x)\big)$. *Если для любого* $c \in (0, \infty)$ *при* $x \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$\frac{d \ln Q(x,c)}{d \ln x} = O(1), \tag{9}$$

то справедливо равенство

$$\rho_f^*(\alpha, \beta) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\big(1/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\,\big)}. \tag{10}$$

4. *Доказательство теоремы* 1. Пусть

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\alpha\big(\ln \widetilde{M}(f,r)\big)}{\beta(r)} \stackrel{\text{df}}{=} \lambda. \tag{11}$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $r_0 = r_0(\varepsilon) > 1$ такое, что для всех $r > r_0$ выполняется соотношение

$$\frac{\alpha\big(\ln \widetilde{M}(f,r)\big)}{\beta(r)} \leq \lambda^* \stackrel{\text{df}}{=} \lambda + \varepsilon.$$

Отсюда имеем

$$\widetilde{M}(f,r) \leq \exp\big(\alpha^{-1}\big(\lambda^* \beta(r)\big)\big). \tag{12}$$

Согласно [20] для коэффициентов $a_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$|a_n(f)| \leq \left(\frac{\tau}{r}\right)^n \widetilde{M}(f,r), \tag{13}$$

где τ — емкость множества G. Из (12), (13) получаем соотношение

$$|a_n(f)| \leq \left(\frac{\tau}{r}\right)^n \exp\big(\alpha^{-1}\big(\lambda^* \beta(r)\big)\big), \tag{14}$$

которое справедливо для любых $r > r_0$.

Пусть

$$r(n) \stackrel{\text{df}}{=} Q(n, 1/\lambda^*). \tag{15}$$

Зафиксируем число $n^* \in \mathbb{N}$, для которого $r(n^*) > r_0$. Поскольку функции α, β являются строго монотонно возрастающими, для всех натуральных чисел $n \geq n^*$ имеем $r(n) > r_0$. Подставив (15) в (14), получим

$$|a_n(f)| \leq \tau^n \exp\Big(n\big(1 - \ln Q(n, 1/\lambda^*)\big)\Big). \tag{16}$$

Прологарифмировав обе части неравенства (16), после несложных вычислений запишем

$$|a_n(f)|^{-1/n} \geq \frac{Q(n, 1/\lambda^*)}{e\tau}. \tag{17}$$

Учитывая вид функции Q, приведенной в формулировке теоремы 1, из (17) имеем

$$\frac{\alpha(n)}{\beta\big(e\tau/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\,\big)} \leq \lambda + \varepsilon. \tag{18}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное число, переходя в (18) к верхнему пределу при $n \to \infty$ и используя тот факт, что β — функция медленного роста и $1/\sqrt[n]{|a_n(f)|} \to \to \infty$ при $n \to \infty$, получаем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\big(1/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\,\big)} \stackrel{\text{df}}{=} \lambda_1 \leq \lambda. \tag{19}$$

Установим обратное неравенство $\lambda_1 \geq \lambda$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых натуральных чисел $n \geq n_1$

$$\frac{\alpha(n)}{\beta\big(1/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\,\big)} \leq \lambda_1^* \stackrel{\text{df}}{=} \lambda_1 + \varepsilon.$$

Отсюда имеем

$$\big|a_n(f)\big| \leq \frac{1}{\big(\beta^{-1}\big(\alpha(n)/\lambda_1^*\big)\big)^n}. \tag{20}$$

Умножим обе части соотношения (20) на r^n и возведем в степень $1/n$. Неравенство

$$\sqrt[n]{r^n\big|a_n(f)\big|} \leq \frac{r}{\beta^{-1}\big(\alpha(n)/\lambda_1^*\big)} \leq \frac{1}{2} \tag{21}$$

выполняется для любого $n > n(r)$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$n(r) \stackrel{\text{df}}{=} \big[\alpha^{-1}(\lambda_1^*\beta(2r))\big] + 1, \tag{22}$$

$[a]$ — целая часть числа $a \in \mathbb{R}$. Тогда с учетом (21) имеем

$$\sum_{n=n(r)+1}^{\infty} r^n |a_n(f)| \leq \sum_{n=n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 1. \tag{23}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{r^x}{Q(x, 1/\lambda_1^*)^x}. \tag{24}$$

Прологарифмировав обе части соотношения (24), вычислим логарифмическую производную полученного выражения

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln r - \ln Q(x, 1/\lambda_1^*) - \frac{d \ln Q(x, 1/\lambda_1^*)}{d \ln x}. \tag{25}$$

Из условия (9) следует существование константы $B > 0$ и числа $x^* > 0$ таких, что для любого $x \geq x^*$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{d \ln Q(x, 1/\lambda_1^*)}{d \ln x} \right| \leq B. \tag{26}$$

Исходя из (26), вместо формулы (22) можем принять

$$n_1^*(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left[\alpha^{-1} \Big(\lambda_1^* \beta \big(\exp(\ln(2r) + B) \big) \Big) \right] + 1. \tag{27}$$

Очевидно, что для любых натуральных чисел $n \geq n_1^*(r)$ имеют место неравенства (21) и (23).

Полагаем

$$\begin{gathered} n_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max \big(n_1(\varepsilon), [x^*] + 1 \big), \\ r(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} Q(x, 1/\lambda_1^*) \exp(B). \end{gathered} \tag{28}$$

При этом для любого $r > r(n_0)$ с учетом (25), (26) и (28) получим

$$\frac{g'(n_0)}{g(n_0)} \geq \ln r - \ln Q(n_0, 1/\lambda_1^*) - B = \ln \frac{r}{r(n_0)} > 0.$$

Учитывая вид функции Q, приведенный в формулировке теоремы 1, принадлежность функций α, β классу $\mathcal{L}_0$, из (25)–(27) имеем

$$\frac{g'\big(n_1^*(r)\big)}{g\big(n_1^*(r)\big)} \leq -\ln 2 - B - \left. \frac{d \ln Q\big(x, 1/\lambda_1^*\big)}{d \ln x} \right|_{x = n_1^*(r)} \leq -\ln 2 < 0.$$

Пусть $r > r(n_0)$. Через $x^*(r)$ обозначим точку, для которой

$$g\big(x^*(r)\big) = \max_{n_0 \leq x \leq n_1^*(r)} g(x). \tag{29}$$

Очевидно, что на основании (29) и (25) для точки $x^*(r)$ выполняется равенство

$$\ln r - \ln Q\big(x^*(r), 1/\lambda_1^*\big) - b(r) = 0, \tag{30}$$

где в силу (26)

$$-B \le b(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left.\frac{d\ln Q(x,1/\lambda_1^*)}{d\ln x}\right|_{x=x^*(r)} \le B. \tag{31}$$

Учитывая вид функции Q, из (30) имеем

$$x^*(r) = \alpha^{-1}\left(\lambda_1^*\beta\Big(\exp\big(\ln r - b(r)\big)\Big)\right). \tag{32}$$

Сравнивая (27) и (32), убеждаемся в том, что $x^*(r) < n_1^*(r)$. С другой стороны, для любого $r > r(n_0)$ на основании (26), (28) и (31) получим

$$x^*(r) > x^*\big(r(n_0)\big) = \alpha^{-1}\Big(\lambda_1^*\beta\Big(\exp\big(\ln\beta^{-1}\big(\alpha(n_0)/\lambda_1^*\big) + B - b\big(r(n_0)\big)\big)\Big)\Big) \ge n_0.$$

Покажем, что в точке $x^*(r)$, определенной формулой (32), функция g действительно достигает своего максимального значения на отрезке $[n_0, n_1^*(r)]$. Очевидно, что существуют числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, для которых

$$x_{\varepsilon_1}(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \alpha^{-1}\Big(\lambda_1^*\beta\big(\exp\big(\ln r - b(r) - \varepsilon_1\big)\big)\Big) = n_0,$$

$$x_{\varepsilon_2}(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \alpha^{-1}\Big(\lambda_1^*\beta\big(\exp\big(\ln r - b(r) + \varepsilon_2\big)\big)\Big) = n_1^*(r).$$

Рассмотрим два точечных множества

$$\mathcal{M}_{\varepsilon_1}^- \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Big\{x_{\varepsilon_1}(r) < x_\varepsilon^-(r) < x^*(r):$$

$$x_\varepsilon^-(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \alpha^{-1}\Big(\lambda_1^*\beta\big(\exp\big(\ln r - b(r) - \varepsilon\big)\big)\Big),\ \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_1\Big\}, \tag{33}$$

$$\mathcal{M}_{\varepsilon_2}^+ \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Big\{x^*(r) < x_\varepsilon^+(r) < x_{\varepsilon_2}(r):$$

$$x_\varepsilon^+(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \alpha^{-1}\Big(\lambda_1^*\beta\big(\exp\big(\ln r - b(r) + \varepsilon\big)\big)\Big),\ \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_2\Big\}, \tag{34}$$

расположенные соответственно слева и справа от точки $x^*(r)$. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ — произвольное число. Учитывая (31)–(33) и тот факт, что β является функцией медленного роста, т. е.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\beta\big(\exp\big(\ln r - b(r)\big)\exp(-\varepsilon)\big)}{\beta\big(\exp\big(\ln r - b(r)\big)\big)} = 1,$$

имеем

$$\lim_{r\to\infty}\big(x_\varepsilon^-(r) - x^*(r)\big) = 0. \tag{35}$$

В силу (31) и (35) получаем

$$\lim_{r\to\infty}\left(b(r) - \left.\frac{d\ln Q(x,1/\lambda_1^*)}{d\ln x}\right|_{x=x_\varepsilon^-(r)}\right) = 0. \tag{36}$$

Из (36) следует существование для $\varepsilon > 0$ такого числа $r_0 = r(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, что для любого $r > r_0$

$$\Delta_{\varepsilon}^{-}(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left| b(r) - \frac{d \ln Q(x, 1/\lambda_1^*)}{d \ln x} \Big|_{x = x_{\varepsilon}^{-}(r)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (37)$$

Подставляя значение $x_{\varepsilon}^{-}(r)$ в (25) и учитывая (33) и (37), записываем

$$\frac{g'\big(x_{\varepsilon}^{-}(r)\big)}{g\big(x_{\varepsilon}^{-}(r)\big)} = \ln r - \ln \beta^{-1}\Big(\alpha\big(x_{\varepsilon}^{-}(r)\big)/\lambda_1^*\Big) - \frac{d \ln Q(x, 1/\lambda_1^*)}{d \ln x}\Big|_{x = x_{\varepsilon}^{-}(r)} =$$

$$= b(r) + \varepsilon - \frac{d \ln Q(x, 1/\lambda_1^*)}{d \ln x}\Big|_{x = x_{\varepsilon}^{-}(r)} \geq \varepsilon - \Delta_{\varepsilon}^{-}(r) > \varepsilon/2 > 0. \qquad (38)$$

Поскольку $g\big(x_{\varepsilon}^{-}(r)\big) > 0$, из (38) и произвольности выбора числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ следует, что на интервале $\big(n_0, x^*(r)\big)$ функция g является монотонно возрастающей. Проводя аналогичные рассуждения для точек множества (34), получаем $g'\big(x_{\varepsilon}^{+}(r)\big) < -\varepsilon/2 < 0$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ — любое число. Следовательно, на интервале $\big(x^*(r), n_1^*(r)\big)$ функция g монотонно убывает и в итоге справедливо соотношение (29).

Используя (31), (32) и вид функции Q, получаем

$$g\big(x_*(r)\big) = r^{x^*(r)}\Big(Q\big(x^*(r), 1/\lambda_1^*\big)\Big)^{-x^*(r)} =$$

$$= \exp\big(x^*(r) \ln r\big)\Big(\exp\big(\ln r - b(r)\big)\Big)^{-x^*(r)} =$$

$$= \exp\big(x^*(r) b(r)\big) \leq \exp\big(x^*(r) B\big).$$

Тогда на основании (21), (24) и (29) имеем

$$\max_{n_0 \leq n \leq n_1^*(r)} |a_n(f)| r^n \leq g\big(x^*(r)\big) \leq \exp\big(x^*(r) B\big). \qquad (39)$$

Для оценки сверху величины $\widetilde{M}(f, r)$ применим метод Виммана – Валирона. Используя (6) и (8), при $r > r(n_0)$ записываем

$$\widetilde{M}(f, r) = \max_{z \in \overline{G}_r} |f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)| \max_{z \in \overline{G}_r} |F_n(z)| \leq c_1(r) \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f)| r^n \leq$$

$$\leq c_1(r) \left(\sum_{n=0}^{n_0} |a_n(f)| r^n + \sum_{n=n_0+1}^{n_1^*(r)} |a_n(f)| r^n + \sum_{n=n_1^*(r)+1}^{\infty} |a_n(f)| r^n \right). \qquad (40)$$

В силу (23) и (39) из (40) получаем

$$\widetilde{M}(f, r) \leq c_1(r)\Big(O(r^{n_0}) + n_1^*(r) \exp\big(x^*(r) B\big) + 1\Big). \qquad (41)$$

Покажем, что величина $c_1(r)$ ограничена сверху некоторой константой, не зависящей от r. Для этого нам понадобится теорема, полученная В. К. Дзядыком.

Теорема B [21]. *Если граница γ замкнутой ограниченной области $\overline{G}$ с односвязным дополнением состоит из конечного числа кривых Ляпунова (или даже кривых из класса Λ^*) или же из конечного числа кривых с непрерывной кривизной,* *образующих в точках стыка* z_j *углы* $\alpha_j\pi$, $0 \le \alpha_j < 2$, *то при всех* $z \in \gamma$ *и* $r > 1$ *справедливо соотношение*

$$d_r(z) \asymp (r-1)\left(|z-z_j| + (r-1)^{2-\alpha_j}\right)^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}, \tag{42}$$

где $\asymp$ — *отношение слабой эквивалентности,* $d_r(z)$ — *расстояние от точки* $z \in \gamma$ *до линии уровня* γ_r, z_j — *ближайшая к* $z \in \gamma$ *точка стыка на кривой* γ.

В рассматриваемом случае граница γ есть гладкая кривая из класса Λ^*. Поскольку на γ точки стыка z_j отсутствуют $(\alpha_j = 1)$, из (42) имеем

$$d_r(z) \asymp (r-1). \tag{43}$$

Вследствие (43) расстояние $d(\gamma, \gamma_r)$ между кривыми γ и γ_r удовлетворяет соотношению

$$d(\gamma, \gamma_r) \asymp (r-1). \tag{44}$$

Длину линии уровня γ_r можно вычислить по формуле

$$l(\gamma_r) = \int\limits_{\gamma_r} |dz| = \int\limits_{|w|=r} \left|\Psi'(w)\right| |dw|. \tag{45}$$

Известно (см., например, [22]), что если кривая γ принадлежит Λ^*, то производная $\Psi'(w)$ непрерывна и отлична от нуля в замкнутой области $|w| \ge 1$ и существуют две положительные постоянные c_* и c^* такие, что имеет место неравенство

$$0 < c_* \le \left|\Psi'(w)\right| \le c^* < \infty, \quad |w| \ge 1. \tag{46}$$

Используя (46), из (45) имеем

$$l(\gamma_r) \le \sup_{|w|\ge 1} \left|\Psi'(w)\right| \int\limits_{|w|=r} |dw| \le \widetilde{c} r, \tag{47}$$

где $\widetilde{c}$ — абсолютная константа.

На основании (44) и (47) для (8) при всех $r > r(n_0)$ получим

$$c_1(r) < k^*, \tag{48}$$

где k^* — абсолютная константа $(k^* > 1)$.

С учетом (27), (32) и (48) неравенство (41) перепишем в следующем виде:

$$\widetilde{M}(f,r) \le k^* \Bigg(O(r^{n_0}) + \Big(\alpha^{-1}\big(\lambda_1^*\beta\big(\exp(\ln r + 2 + B)\big)\big) + 1\Big) \times$$

$$\times \exp\Big(B\alpha^{-1}\Big(\lambda_1^*\beta\big(\exp\big(\ln r - b(r)\big)\big)\Big)\Big)\Bigg). \tag{49}$$

Используя (49), записываем

$$\widetilde{M}(f,r)\big(1 + o(1)\big) \le \Big(\alpha^{-1}\big(\lambda_1^*\beta\big(\exp(\ln r + 2 + B)\big)\big) + 1\Big) \times$$

$$\times \exp\Big((B+\ln k^*)\alpha^{-1}\big(\lambda_1^*\beta\big(\exp(\ln r+B)\big)\big)\Big) \le$$

$$\le \exp\Big((B+k^*+o(1))\alpha^{-1}\big(\lambda_1^*\beta\big(\exp(\ln r+B)\big)\big)\Big). \qquad (50)$$

Логарифмируя левую и правую части неравенства (50), имеем

$$\frac{\alpha\Big(\big(B+k^*+o(1)\big)^{-1}\ln\widetilde{M}(f,r)\Big)}{\beta(r+\exp B)} \le \lambda_1^* \overset{\text{df}}{=} \lambda_1+\varepsilon. \qquad (51)$$

Учитывая, что α и β — функции медленного роста, $\varepsilon>0$ — произвольное число, а λ_1 имеет вид (19), из (51) при $r\to\infty$ получаем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\alpha\big(\ln\widetilde{M}(f,r)\big)}{\beta(r)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n)}{\beta\big(1/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\big)}. \qquad (52)$$

Требуемое равенство (10) следует из сопоставления соотношений (11), (19) с (52).

Теорема 1 доказана.

5. Будем говорить, что аналитическая в области G функция f принадлежит пространству $\mathcal{E}'_p(G)$, $p>0$, если для нее выполнено условие

$$\|f\|_{\mathcal{E}'_p} = \left(\iint\limits_G |f(z)|^p d\sigma_z\right)^{1/p} < \infty,$$

где $z=x+iy$, $d\sigma_z=dxdy$. Очевидно, что при $p\ge 1$ $\mathcal{E}'_p(G)$ есть банахово пространство. Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство алгебраических полиномов комплексной переменной степени, не превышающей n, а $E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big) \overset{\text{df}}{=} \inf\big\{\|f - p_n\|_{\mathcal{E}'_p(G)} : p_n\in\mathcal{P}_n\big\}$ — величина наилучшего приближения функции $f\in\mathcal{E}'_p(G)$ элементами подпространства $\mathcal{P}_n$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $f\in\mathcal{E}'_p(G)$, *где* $p\ge 1$, G *— конечная односвязная область с границей* $\gamma\in\Lambda^*$. *Тогда для того чтобы функция* f *была целой конечного обобщенного порядка* $\rho^*_f(\alpha,\beta)=\eta$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(n)}{\beta\Big(1\Big/\sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)}\Big)} = \eta. \qquad (53)$$

В ходе последующих рассуждений нам понадобится своеобразный аналог одного результата А. А. Конюшкова [23] в комплексной плоскости.

Лемма А [17]. *Пусть* G *— конечная односвязная область комплексной плоскости с границей* $\gamma\in\Lambda^*$, *функция* $f\in\mathcal{E}'_p(G)$, $1\le p<p_1\le\infty$, *и*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)\nu^{1/p-1/p_1-1} < \infty.$$

Тогда $f\in\mathcal{E}'_{p_1}(G)$ *и для любого натурального числа* n *выполняется неравенство*

$$E_n\big(f,\mathcal{E}'_{p_1}(G)\big)\le$$
$$\le\mu_{p,p_1}\left\{E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)n^{1/p-1/p_1}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_\nu\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)\nu^{1/p-1/p_1-1}\right\},\qquad(54)$$

где μ_{p,p_1} — константа, не зависящая от n.

6. ***Доказательство теоремы*** **2.** Установим вначале достаточность условия (53), полагая, что для функции $f\in\mathcal{E}'_p(G)$ оно имеет место. Поскольку из (53) следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)}=0,$$

на основании [17] заключаем, что f является целой функцией. Полагая ее обобщенный порядок $\rho^*_f(\alpha,\beta)$, определенный формулой (10), равным ξ, покажем справедливость равенства $\xi=\eta$.

Пусть функция f имеет в области G разложение (6) в ряд по полиномам Фабера и $p^*_n(f,z)\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{k=0}^{n}a_k(f)F_k(z)$. Тогда в силу (8) получим

$$E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)\le\big\|f-p^*_n(f)\big\|_{\mathcal{E}'_p(G)}=\Big\|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(f)F_k\Big\|_{\mathcal{E}'_p(G)}\le$$
$$\le c_1(r)\sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f)|r^k.\qquad(55)$$

Из (10) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $n_2=n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что для произвольного натурального $n>n_2$ выполнено неравенство

$$\frac{\alpha(n)}{\beta\big(1/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\big)}\le\xi^*\overset{\mathrm{df}}{=}\xi+\varepsilon.\qquad(56)$$

Из (56) для любого $n>n_2$, $n\in\mathbb{N}$, имеем

$$|a_n(f)|\le\left(\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(n)}{\xi^*}\right)\right)^{-n}.\qquad(57)$$

Из (8) следует, что при $r\to1+0$ поведение $c_1(r)$ зависит от величины $d(\gamma,\gamma_r)$. Пусть, например, $r=1+1/n$, $n\in\mathbb{N}$. Используя оценку $d(\gamma,\gamma_{1+1/n})\ge c_\gamma/n^2$ (c_γ — постоянная, зависящая только от γ), справедливую для произвольной кусочно-гладкой кривой γ [21], записываем

$$c_1(1+1/n)\le\frac{n^2l(\gamma_{1+1/n})}{2\pi c_\gamma},\quad n\in\mathbb{N}.\qquad(58)$$

Учитывая (57), (58) и полагая в (55) $r=1+1/n$, при $n>n_2$, $n\in\mathbb{N}$, имеем

$$E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)\le\sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)}\,\frac{n^2l(\gamma_{1+1/n})}{2\pi c_\gamma}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1+1/n}{\beta^{-1}\big(\alpha(k)/\xi^*\big)}\right)^k.\qquad(59)$$

Пусть $n_3\in\mathbb{N}$ — такое наименьшее число, для которого

$$\frac{2}{\beta^{-1}\big(\alpha(n_3)/\xi^*\big)} < 1. \tag{60}$$

Тогда в силу (59), (60) для произвольного натурального числа $n > \widetilde{n} \overset{\mathrm{df}}{=} \max(n_2, n_3)$ выполняется

$$E_n\big(f, \mathcal{E}'_p(G)\big) \leq$$

$$\leq k^*_{1,p} n^2 l(\gamma_{1+1/n}) \left(\frac{1+1/n}{\beta^{-1}\big(\alpha(n+1)/\xi^*\big)}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{2}{\beta^{-1}\big(\alpha(n+1)/\xi^*\big)}\right)^{-1}, \tag{61}$$

где

$$k^*_{1,p} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)}}{2\pi c_\gamma}.$$

Из (53) и (61) следует неравенство

$$\eta = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(1\Big/\sqrt[n]{E_n\big(f, \mathcal{E}'_p(G)\big)}\Big)} \leq$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\Big(k^*_{1,p} l(\gamma_{1+1/n}) n^2\Big)^{-1/n} \beta^{-1}\big(\alpha(n+1)/\xi^*\big)\left(1 - \frac{2}{\beta^{-1}\big(\alpha(n+1)/\xi^*\big)}\right)^{1/n}\right)} =$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(\beta^{-1}\big(\alpha(n+1)/\xi^*\big)\Big)} = \xi + \varepsilon. \tag{62}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ — произвольное число, из (62) имеем

$$\eta \leq \xi. \tag{63}$$

Установим противоположное неравенство $\xi \leq \eta$. Очевидно, что целая функция $f \in \mathcal{E}'_\infty(G)$. Пусть $\widetilde{p}_{n-1}(f, z) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} c_k F_k(z)$ — многочлен наилучшего приближения функции f в метрике пространства $\mathcal{E}'_\infty(G)$. Используя формулу (4) и теорему A, получаем

$$|a_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|w|=1} \frac{f\big(\Psi(w)\big) - \widetilde{p}_{n-1}\big(f, \Psi(w)\big)}{w^{n+1}} dw \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Big| f\big(\Psi(e^{it})\big) - \widetilde{p}_{n-1}\big(f, \Psi(e^{it})\big)\Big| dt \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq t < 2\pi} \Big| f\big(\Psi(e^{it})\big) - \widetilde{p}_{n-1}\big(f, \Psi(e^{it})\big)\Big| = E_{n-1}\big(f, \mathcal{E}'_\infty(G)\big). \tag{64}$$

Из (10) и (64) следует неравенство

$$\xi = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\big(1/\sqrt[n]{|a_n(f)|}\big)} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(1\Big/\sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}'_\infty(G)\big)}\Big)}. \tag{65}$$

Используя соотношение (54), где $p_1 = \infty$, и учитывая, что β — функция медленного роста, из (65) имеем

$$\xi \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha(n)\Big/\beta\left(1\Big/\left(\Big(E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)\Big)^{1/n}\big(\mu_{p,\infty}n^{1/p}\big)^{1/n}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\mu_{p,\infty}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{1/p-1}E_\nu\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)\right)^{1/n}\right)\right) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(1\Big/\sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)}\Big)} = \eta. \tag{66}$$

Сравнивая неравенства (63) и (66), получаем требуемое равенство (53).

При доказательстве необходимости условия (53) полагаем, что f является целой трансцендентной функцией, имеющей обобщенный порядок $\rho^*_f(\alpha,\beta) = \xi$. Справедливость равенства $\xi = \eta$ показываем так же, как и в случае рассмотрения достаточности условия (53).

Теорема 2 доказана.

7. Пусть функция $z = \Psi_0(w)$ конформно и однолистно отображает круг $|w| < 1$ на ограниченную односвязную область G при условиях $\Psi_0(0) = z_0$, $\Psi'_0(0) > 0$, где z_0 — некоторая фиксированная точка из G; $\widetilde{\gamma}_r$ — линия уровня в области G, в которую переходит окружность $|w| = r$, $0 < r < 1$, при отображении $z = \Psi_0(w)$. Если для функции f, аналитической в G, при любых $r \in (0,1)$ выполнено неравенство

$$\left(\int\limits_{\gamma_r} \big|f(z)\big|^p |dz|\right)^{1/p} < M, \quad p > 0,$$

где $M > 0$ — произвольная постоянная, то говорят, что f принадлежит пространству $\mathcal{E}_p(G)$ [22]. При $p \geq 1$ пространство $\mathcal{E}_p(G)$ банахово с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{E}_p(G)} = \left(\int\limits_{\gamma} \big|f(z)\big|^p |dz|\right)^{1/p},$$

где γ — спрямляемая кривая, являющаяся границей области G.

Через $E_n\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big) \stackrel{\text{df}}{=} \inf\big\{\|f-p_n\|_{\mathcal{E}_p(G)} : p_n \in \mathcal{P}_n\big\}$ обозначим величину наилучшего полиномиального приближения функции $f \in \mathcal{E}_p(G)$ элементами подпространства $\mathcal{P}_n$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* $f \in \mathcal{E}_p(G)$, *где* $p \geq 1$, G — *область, удовлетворяющая условиям теоремы* 2. *Для того чтобы* f *была целой функцией конечного обобщенного порядка* $\rho^*_f(\alpha,\beta) = \eta$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(1\Big/\sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)}\Big)} = \eta. \tag{67}$$

Доказательство. Установим вначале достаточность условия (67), полагая, что для функции $f \in \mathcal{E}_p(G)$ оно выполнено. Из (67) следует, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)} = 0,$$

а это означает, что функция f — целая [17]. Полагая ее обобщенный порядок $\rho_f^*(\alpha,\beta)$, определенный формулой (10), равным ξ, покажем справедливость равенства $\xi = \eta$. Нам потребуется один результат И. И. Ибрагимова и Н. И. Шихалиева, который приведем в удобном для нас виде.

Лемма В [15]**.** *Пусть G — конечная односвязная область комплексной плоскости с границей $\gamma \in \Lambda^*$, функция $f \in \mathcal{E}_p(G)$, $1 \le p < p_1 \le \infty$, и*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)\nu^{1/p-1/p_1-1} < \infty.$$

Тогда f принадлежит $\mathcal{E}_{p_1}(G)$ и неравенство

$$E_n\big(f,\mathcal{E}_{p_1}(G)\big) \le$$

$$\le \theta_{p,p_1}\left\{E_n\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)n^{1/p-1/p_1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)\nu^{1/p-1/p_1-1}\right\}, \tag{68}$$

где θ_{p,p_1} — константа, не зависящая от n, выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что целая функция f принадлежит $\mathcal{E}'_p(G)$ при любом $p \ge 1$. Поэтому

$$E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big) \le \sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)}E_n\big(f,\mathcal{E}'_\infty(G)\big). \tag{69}$$

Поскольку $\mathcal{E}'_\infty(G) \equiv \mathcal{E}_\infty(G)$ и все условия леммы В для целой функции f выполнены, из (68) имеем

$$E_n\big(f,\mathcal{E}_\infty(G)\big) \le \theta_{p,\infty}\left\{E_n\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)n^{1/p} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)}{\nu^{1-1/p}}\right\}. \tag{70}$$

Неравенство

$$E_n\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big) \ge n^{-1/p}\left\{\frac{E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)}{\theta_{p,\infty}\sqrt[p]{\mathrm{mes}(G)}} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)}{\nu^{1-1/p}}\right\} \tag{71}$$

следует из (69), (70). Используя теорему 2 и соотношения (67) и (71), получаем

$$\eta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(1\Big/\sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}_p(G)\big)}\Big)} \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\Big(1\Big/\sqrt[n]{E_n\big(f,\mathcal{E}'_p(G)\big)}\Big)} = \xi. \tag{72}$$

Противоположное неравенство $\eta \le \xi$ доказывается на основании соображений, аналогичных использованным при получении такого же соотношения в ходе доказательства теоремы 2. Следовательно, $\eta = \xi$.

Покажем необходимость условия (67). Пусть f является целой функцией обобщенного порядка $\rho_f^*(\alpha,\beta)=\xi$. Неравенство $\eta\le\xi$ устанавливается на основе рассуждений, аналогичных использованным при установлении подобного факта в ходе доказательства теоремы 2. Отличие состоит лишь в том, что в соотношениях вида (55), (61) вместо $\mathcal{E}'_p(G)$ и $\mathrm{mes}(G)$ записываем соответственно $\mathcal{E}_p(G)$ и $l(\gamma)$. Неравенство $\eta\ge\xi$ устанавливается подобно тому, как это сделано при получении соотношения (72). Следовательно, $\eta=\xi$, и теорема 3 доказана.

Использовав неравенства (21) и (64), рассмотрим вопрос о возможности сопоставления скорости стремления к нулю величины наилучшего полиномиального приближения $E_n\big(f,\mathcal{E}_\infty(G)\big)$ и величины $\big|a_{n+1}(f)\big|$ для целой трансцендентной функции f конечного обобщенного порядка $\rho_f^*(\alpha,\beta)$.

Замечание. *Пусть для любого натурального числа $n>n_1^*(r)$ и некоторого вещественного числа $r>\max\big(r(n_0),1\big)$ имеют место равенства*

$$|a_n(f)|=\frac{\lambda_n}{(2r)^n}, \tag{73}$$

где числа $\{\lambda_n\}$ образуют невозрастающую последовательность, а $n_1^*(r)$ и $r(n_0)$ определены формулами (27) *и* (28) *соответственно. Тогда справедливо соотношение*

$$E_n\big(f,\mathcal{E}_\infty(G)\big)\asymp\big|a_{n+1}(f)\big|. \tag{74}$$

Действительно, известно [19], что в области G, ограниченной кривой $\gamma\in$ $\in\Lambda^*$, многочлены Фабера ограничены в совокупности, т. е. существует абсолютная константа $\mathcal{K}>0$ такая, что для произвольного $n\in\mathbb{Z}_+$ $\|F_n\|_{\mathcal{E}_\infty(G)}\le\mathcal{K}$. Используя (73), для $n>n_1^*(r)$ получаем

$$E_n\big(f,\mathcal{E}_\infty(G)\big)\le\big\|f-p_n^*(f)\big\|_{\mathcal{E}_\infty(G)}\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\big|a_k(f)\big|\|F_k\|_{\mathcal{E}_\infty(G)}\le$$

$$\le\mathcal{K}\sum_{k=n+1}^{\infty}\big|a_k(f)\big|=\mathcal{K}\big|a_{n+1}(f)\big|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_{n+1+k}}{\lambda_{n+1}}\left(\frac{1}{2r}\right)^k. \tag{75}$$

Поскольку по условию теоремы $\lambda_{n+1+k}/\lambda_{n+1}\le1$ для любого $k\in\mathbb{Z}_+$, из (75) имеем

$$E_n\big(f,\mathcal{E}_\infty(G)\big)\le\frac{2\mathcal{K}r}{2r-1}\big|a_{n+1}(f)\big|. \tag{76}$$

Из (64) следует оценка снизу $\big|a_{n+1}(f)\big|\le E_n\big(f,\mathcal{E}_\infty(G)\big)$. Сравнивая последнее неравенство с (76), получаем соотношение (74).

1. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.
2. *Varga R. S.* On an extension of a result of S. N. Bernstein // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**, № 2. – P. 176 – 179.
3. *Reddy A. R.* Approximation of an entire functions // Ibid. – 1970. – **3**, № 1. – P. 128 – 137.
4. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100 – 108.

5. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений // Там же. – 1968. – № 6. – С. 115 – 121.
6. *Балашов С. К.* О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней // Там же. – 1972. – № 8. – С. 10 – 18.
7. *Shah S. M.* Polynomial approximation of an entire function and generalized orders // J. Approxim. Theory. – 1977. – **19**, № 4. – P. 315 – 324.
8. *Reddy A. R.* A contribution to best approximation in the L_2 norm // Ibid. – 1974. – **11**, № 1. – P. 110 – 117.
9. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 2. – С. 280 – 283.
10. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении в некоторых банаховых пространствах аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки. – 1994. – **55**, № 4. – С. 6 – 14.
11. *Вакарчук С. Б., Жир С. И.* О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 4. – С. 595 – 603.
12. *Вакарчук С. Б., Жир С. И.* Некоторые вопросы полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1155 – 1162.
13. *Вакарчук С. Б., Жир С. И.* О полиномиальной аппроксимации целых трансцендентных функций в комплексной плоскости // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**. – С. 27 – 42.
14. *Батырев А. В.* К вопросу о наилучшем приближении аналитических функций полиномами // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 2. – С. 173 – 175.
15. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О конструктивной характеристике одного класса функций комплексного переменного // Докл. АН СССР. – 1977. – **236**, № 4. – С. 789 – 791.
16. *Giroux A.* Approximation of entire functions over bounded domains // J. Approxim. Theory. – 1980. – **28**, № 1. – P. 45 – 53.
17. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1123 – 1133.
18. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. II // Там же. – № 10. – С. 1318 – 1322.
19. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – **19**, № 3. – С. 423 – 444.
20. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.; Л.: Наука, 1964. – 438 с.
21. *Дзядык В. К.* О приближении аналитических функций в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей // Третья летн. мат. школа (Конструктивная теория функций). Кацивели, июнь-июль 1965 г. – Киев: Наук. думка, 1966. – С. 29 – 83.
22. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
23. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 1. – С. 53 – 84.
24. *Мергелян С. Н.* Некоторые вопросы конструктивной теории функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **37**. – С. 3 – 90.

Получено 18.02.08