УДК 519.644

Э. А. Шамсиев (Ташкент. техн. ун-т, Узбекистан)

К ПОСТРОЕНИЮ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП

We study cubature formulas that are invariant under the dihedral group of order $16p$.

Вивчаються кубатурні формули, що інваріантні відносно діедральної групи порядку $16p$.

В 1961 г. С. Л. Соболевым был предложен метод построения кубатурных формул для двумерной сферы, инвариантных относительно конечных групп вращений [1]. Дальнейшее развитие этого метода связано с именами Г. Н. Салихова [2, 3], В. И. Лебедева [4, 5] и И. П. Мысовских [6 – 8]. Основные результаты приведены в [9]. Следует отметить, что во всех указанных работах построенные формулы инвариантны или относительно групп вращений, или групп преобразований правильных многогранников. В работах [10 – 12] для построения кубатурных формул использована диэдральная группа порядка $8(2p+1)$. Настоящая работа посвящена изучению кубатурных формул, инвариантных относительно диэдральной группы порядка $16p$.

Известно [13], что группа G_{4p} преобразований правильного $4p$-угольника в себя порождена отражениями и кольцо ее инвариантных форм порождается базисными инвариантными формами степеней 2 и $4p$. В силу ортогональности группы G_{4p} очевидно, что инвариантная форма степени 2 есть $r^2 = x^2 + y^2$. Базисную инвариантную форму степени $4p$ обозначим через $\Pi_{4p}(x, y)$, а вершины и проекции на единичную окружность S_1 середин ребер правильного $4p$-угольника — через $a^{(k)}$ и $b^{(k)}$ соответственно,

$$a^{(k)} = \left(\cos\frac{k\pi}{2p}, \sin\frac{k\pi}{2p}\right), \quad b^{(k)} = \left(\cos\frac{2k-1}{4p}\pi, \sin\frac{2k-1}{4p}\pi\right),$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, 4p.$$

Нам потребуется значение интеграла

$$\int_{S_1}\Pi_{4p}(x, y)\,dS = \int_0^{2\pi}\Pi_{4p}(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi.$$

Для этого воспользуемся тем, что многочлен $(x+iy)^{4p}$ (i — мнимая единица) инвариантен относительно группы $\tilde{G}_{4p}$ вращений правильного $4p$-угольника — подгруппы индекса 2 группы G_{4p} — и интеграл от него по S_1 равен нулю (вследствие ортогональности). Нетрудно убедиться, что

$$(x+iy)^{4p} = r^{4p} - 8p^2\Pi_{4p}(x, y) + i4p\Delta_{4p}(x, y),$$

где $\Delta_{4p}(x, y)$ — якобиан базисных инвариантных форм r^2 и $\Pi_{4p}(x, y)$. Таким образом,

$$\int_{S_1}(x+iy)^{4p}\,dS = \int_{S_1}\left(r^{4p} - 8p^2\Pi_{4p}(x, y)\right)dS + i\int_{S_1}4p\Delta_{4p}(x, y)\,dS = 0,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{S_1} r^{4p}\,dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi = 8p^2 \int\limits_{S_1} \Pi_{4p}(x, y)\,dS = 8p^2 \int\limits_0^{2\pi} \Pi_{4p}(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi,$$

т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi} \Pi_{4p}(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{4p^2}.$$

Учитывая, что инвариантный многочлен в точках одной орбиты принимает одинаковые значения и $a^{(4p)} = (1, 0)$, имеем

$$\Pi_{4p}(a^{(k)}) = \Delta_{4p}(a^{(k)}) = \Delta_{4p}(b^{(k)}) = 0,$$

так как произведение левых частей уравнений осей симметрии с точностью до постоянной совпадает с $\Delta_{4p}(x, y)$, а точки $a^{(k)}$ и $b^{(k)}$ расположены на осях симметрии.

Чтобы найти $\Pi_{4p}(b^{(k)})$, выполним следующее. Наряду с многочленом $(x + iy)^{4p}$ инвариантным относительно группы $\tilde{G}_{4p}$ является и многочлен

$$(x - iy)^{4p} = r^{4p} - 8p^2\Pi_{4p}(x, y) - i4p\Delta_{4p}(x, y).$$

Перемножая многочлены $(x + iy)^{4p}$ и $(x - iy)^{4p}$, получаем

$$(x + iy)^{4p}(x - iy)^{4p} = [r^{4p} - 8p^2\Pi_{4p}(x, y)]^2 - i^2 16p^2\Delta_{4p}^2(x, y)$$

или

$$(x^2 + y^2)^{4p} = r^{8p} = [r^{4p} - 8p^2\Pi_{4p}(x, y)]^2 + 16p^2\Delta_{4p}^2(x, y).$$

Подставляя вместо (x, y) значение $b^{(k)}$, находим $1 = [1 - 8p^2\Pi_{4p}(b^{(k)})]^2$. Отсюда следует, что $1 - 8p^2\Pi_{4p}(b^{(k)}) = -1$, $\Pi_{4p}(b^{(k)}) = \dfrac{1}{4p^2}$.

Заметим, что $1 - 8p^2\Pi_{4p}(b^{(k)})$ не может быть равен 1, так как в этом случае $8p^2\Pi_{4p}(b^{(k)}) = 0$, что противоречит квадратурной формуле

$$\int\limits_{S_1} f(x, y)\,dS \cong \frac{\pi}{4p}\sum_{k=1}^{4p}[f(a^{(k)}) + f(b^{(k)})],$$

инвариантной относительно группы G_{8p} и имеющей $(8p - 1)$-ю степень точности. Противоречие заключается в том, что $\int_{S_1} \Pi_{4p}(x, y)\,dS \neq 0$, но квадратурная сумма равна 0.

Рассмотрим в трехмерном вещественном пространстве R^3 группу G_{4p}, дополненную преобразованием симметрии относительно плоскости Oxy. В результате получим диэдральную группу DG_{4p} порядка $16p$, порожденную отражениями [14, с. 17 – 20]. Очевидно, что кольцо инвариантных форм группы DG_{4p} порождается базисными инвариантными формами r^2, $\Pi_{4p}(x, y)$, z^2. На поверхности сферы $S_2 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ одна из базисных инвариантных форм второй степени линейно выражается через другую, например $r^2 = 1 - z^2$. Поэтому в этом случае базис составляют многочлены $\Pi_{4p}(x, y)$

и z^2. Переходя в сферическую систему координат, нетрудно подсчитать, что

$$\int\limits_{S_2} z^{2q}\,dS = 2\pi\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2q}\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{4\pi}{2q+1},$$

$$\int\limits_{S_2}\Pi_{4p}(x,y)z^{2q}\,dS = \int\limits_0^{2\pi}\Pi_{4p}(\cos\varphi,\sin\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^{4p}\theta\cos^{2q}\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4p^2}\,\frac{2(4p)!!(2q-1)!!}{(4p+2q+1)!}\,\pi, \quad q = 0,1,2,\ldots,$$

где $(2m)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m$, $(2m+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)$.

1. Запишем все линейно независимые инвариантные многочлены группы DG_{4p} до $(4p+4s-3)$-й степени на S_2, $s\le p$:

$$1, z^2, z^4, z^6, \ldots, z^{4p+4s-4}, \Pi_{4p}(x,y), \Pi_{4p}(x,y)\cdot z^2, \Pi_{4p}(x,y)\cdot z^4, \ldots, \Pi_{4p}(x,y)\cdot z^{4s-4}. \tag{1}$$

Кубатурную формулу $(4p+4s-3)$-й степени точности будем строить в виде

$$\int\limits_{S_2} f(x,y,z)\,dS \cong A_0\sum_{k=1}^{4p} f\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p},\ \sin\frac{(2k-1)\pi}{4p},\ 0\right) +$$

$$+\sum_1^2\left[B_0 f(0,0,\pm 1) + \sum_{i=1}^{s-1}A_i\sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-m_i^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p}, \sqrt{1-m_i^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4p}, \pm m_i\right) +\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{p+s-1}B_j\sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-n_j^2}\cos\frac{k\pi}{2p}, \sqrt{1-n_j^2}\sin\frac{k\pi}{2p}, \pm n_j\right)\right], \tag{2}$$

где внешняя сумма во втором слагаемом соответствует изменению знака последней координаты узлов, A_0, B_0, A_i, m_i, B_j, n_j — подлежащие определению параметры $(0 < m_i, n_j < 1)$.

Требование, чтобы кубатурная формула (2) была точна для многочленов (1), приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$2B_0 + 8p\sum_{j=1}^{p+s-1}B_j + 4pA_0 + 8p\sum_{i=1}^{s-1}A_i = 4\pi,$$

$$2B_0 + 8p\left[\sum_{j=1}^{p+s-1}n_j^{2q}B_j + \sum_{i=1}^{s-1}m_i^{2q}A_i\right] = \frac{4\pi}{2q+1}, \quad q = 1,2,\ldots,2(p+s-1),$$

$$4pA_0 + 8p\sum_{i=1}^{s-1}(1-m_i^2)^{2p}A_i = \frac{2(4p)!!}{(4p+1)!!}\,\pi,$$

$$8p\sum_{i=1}^{s-1}(1-m_i^2)^{2p}m_i^{2q}A_i = \frac{2(4p)!!(2q-1)\pi}{(4p+2q+1)!!}, \quad q = 1,2,\ldots,2(s-1).$$

Выполняя подстановки

$$T_0 = \frac{4p}{\pi}A_0, \quad T_i = \frac{8p}{\pi}(1-m_i^2)^{2p}A_i, \quad t_i = m_i^2, \quad i = 1,2,3,\ldots,s-1,$$

из последних $2s - 1$ уравнений системы получаем

$$T_0 + \sum_{i=1}^{s-1} T_i = 2\,\frac{(4p)!!}{(4p+1)!!},$$

$$\sum_{i=1}^{s-1} t_i^q T_i = \frac{2(4p)!!(2q-1)!!}{(4p+2q+1)!}, \quad q = 1, 2, \ldots, 2s-2,$$

откуда следует, что T_0, T_i и t_i являются параметрами квадратурной формулы Гаусса – Маркова для отрезка $[0, 1]$ с весом $\dfrac{(1-t)^{2p}}{\sqrt{t}}$ и одним фиксированным узлом $t_0 = 0$:

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{2p}}{\sqrt{t}}\,\varphi(t)\,dt \cong \sum_{i=1}^{s-1} T_i \varphi(t_i) + T_0 \varphi(0).$$

Таким образом,

$$A_0 = \frac{\pi}{4p} T_0, \quad A_i = \frac{\pi}{8p(1-t)^{2p}} T_0, \quad m_i = \sqrt{t_i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, s-1.$$

Остальные параметры кубатурной формулы (2) определяем из системы

$$2B_0 + 8p \sum_{j=1}^{p+s-1} B_j = 4\pi - \pi\left[\sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{(1-t_i)^{2p}} T_i + T_0\right],$$

$$2B_0 + 8p \sum_{j=1}^{p+s-1} n_j^{2q} B_j = \frac{4\pi}{2q+1} - \pi \sum_{i=1}^{s-1} \frac{t_i^q}{(1-t_i)^{2p}} T_i, \quad q = 1, 2, \ldots, 2(p+s-1),$$

которая после введения новых обозначений решается стандартным образом [9, с. 105 – 107]. Число $N = 4p(2p + 4s - 3) + 2$ узлов кубатурной формулы (2) на $4p^2 + 8ps - 4s^2 - 10p + 2s + 2$ единиц превышает соответствующую нижнюю границу для числа узлов [9, с. 203]. Приведем значения параметров кубатурной формулы для двух частных случаев:

а) $p = 1$, $s = 1$:

$$A_0 = \frac{4\pi}{15}, \quad B_0 = \frac{4\pi}{15}, \quad B_1 = \frac{3\pi}{10}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{1}{3}};$$

б) $p = 2$, $s = 1$:

$$A_0 = \frac{2\pi}{3^2 \cdot 5 \cdot 7}, \quad B_0 = \frac{1807954451\pi}{3164988099},$$

$$B_1 = \frac{66624616453 - 36295045\sqrt{610177}}{759597143760}\,\pi, \quad n_1 = \sqrt{\frac{16789 - \sqrt{158127145}}{50058}},$$

$$B_2 = \frac{66624616453 + 36295045\sqrt{610177}}{759597143760}\,\pi, \quad n_2 = \sqrt{\frac{16789 + \sqrt{158127145}}{50058}}.$$

Аналогичным образом получается и следующая кубатурная формула $(4p + 4s - 3)$-й степени точности, также инвариантная относительно группы DG_{4p} и содержащая на $(4p - 2)$ узла больше, чем формула (2):

$$\int\limits_{S_2} f(x,y,z)\,dS \;\cong\; B_0 \sum_{k=1}^{4p} f\left(\cos\frac{k\pi}{2p},\, \sin\frac{k\pi}{2p},\, 0\right) +$$

$$+\; A_0 \sum_{k=1}^{4p} f\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p},\, \sin\frac{(2k-1)\pi}{4p},\, 0\right) +$$

$$+\; \sum_{1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{p+s-1} D_j \sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-l_j^2}\cos\frac{k\pi}{2p},\, \sqrt{1-l_j^2}\sin\frac{k\pi}{2p},\, \pm l_j\right) +\right.$$

$$\left. +\; \sum_{i=1}^{s-1} A_i \sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-m_i^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p},\, \sqrt{1-m_j^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4p},\, \pm m_i\right)\right]. \tag{3}$$

Здесь значения A_0, A_i, m_i те же, что и в кубатурной формуле (2). Параметры D_j и l_j определяются из системы

$$4pB_0 \;+\; 8p\sum_{j=1}^{p+s-1} D_j \;=\; 4\pi \;-\; \pi\left[\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{(1-t_i)^{2p}}\,T_i + T_0\right],$$

$$8p\sum_{j=1}^{p+s-1} l_j^{2q} D_j \;=\; \frac{4\pi}{2q+1} \;-\; \pi\sum_{i=1}^{s-1}\frac{t_i^q}{(1-t_i)^{2p}}\,T_i\,, \quad q \;=\; 1, 2, \ldots, 2(p+s-1).$$

Кубатурная формула (3) при $s = 1$ и произвольном p имеет параметры

$$A_0 \;=\; \frac{(4p)!!}{2p(4p+1)!!}\,\pi, \qquad B_0 \;=\; \frac{\pi}{p}\left[1 - \frac{(4p)!!}{2(4p+1)!!} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\tau_j}\,K_j\right],$$

$$l_j \;=\; \sqrt{\tau_j}\,, \qquad D_j \;=\; \frac{\pi}{4p\tau_j}\,K_j,$$

где τ_j и K_j — параметры квадратурной формулы типа Гаусса для отрезка $[0, 1]$ с весом $\sqrt{t}$:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{t}\,\varphi(t)\,dt \;\cong\; \sum_{j=1}^{p} K_j \varphi(\tau_j). \tag{4}$$

2. Перейдем к построению кубатурной формулы $(4p + 4s - 1)$-й степени точности. Будем искать ее в виде

$$\int\limits_{S_2} f(x,y,z)\,dS \;\cong\; A_0 \sum_{k=1}^{4p} f\left(\cos\frac{k\pi}{2p},\, \sin\frac{k\pi}{2p},\, 0\right) +$$

$$+\; \sum_{1}^{2}\left[B_0 f(0,0,\pm 1) \;+\; \sum_{j=1}^{p+s-1} B_j \sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-n_j^2}\cos\frac{k\pi}{2p},\, \sqrt{1-n_j^2}\sin\frac{k\pi}{2p},\, \pm n_j\right) +\right.$$

$$\left. +\; \sum_{i=1}^{s} A_i \sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-m_i^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p},\, \sqrt{1-m_i^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4p},\, \pm m_i\right)\right]. \tag{5}$$

Требуя, чтобы кубатурная формула (5) точно интегрировала многочлены (1) и $\Pi_{4p}(x,y)z^{4s-2}$, $z^{4p+4s-2}$, получаем систему уравнений

$$2B_0 + 4pA_0 + 8p\left[\sum_{j=1}^{p+s-1} B_j + \sum_{i=1}^{s} A_i\right] = 4\pi,$$

$$2B_0 + 8p\left[\sum_{j=1}^{p+s-1} n_j^{2q} B_j + \sum_{i=1}^{s} m_i^{2q} C_i\right] = \frac{4\pi}{2q+1}, \quad q = 1, 2, \ldots, 2(p+s)-1,$$

$$8p\sum_{i=1}^{s-1}(1-m_i^2)^{2p} m_i^{2q} A_i = \frac{2(4p)!!(2q-1)!!}{(4p+2q+1)!!}\pi, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, 2s-1.$$

После замены $T_i = \dfrac{8p}{\pi}(1-m_i^2)A_j,\ t_i = n_i^2,\ i = 1, 2, \ldots, s,$ убеждаемся, что T_i и t_i являются параметрами квадратурной формулы Гаусса для отрезка $[0, 1]$ с весом $\dfrac{(1-t)^{2p}}{\sqrt{t}}$:

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{2p}}{\sqrt{t}}\varphi(t)\,dt \cong \sum_{i=1}^{s} T_i\varphi(t_i).$$

Отсюда следует, что

$$m_i = \sqrt{t_i}, \quad A_i = \frac{\pi}{8p(1-t_i)^{2p}}T_i.$$

Остальные параметры кубатурной формулы определяются из системы

$$2B_0 + 4pA_0 + 8p\sum_{j=1}^{p+s-1} B_j = 4\pi - \pi\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{(1-t_i)^{2p}}T_i,$$

$$2B_0 + 8p\sum_{j=1}^{p+s-1} n_j^{2q} B_j = \frac{4\pi}{2q+1} - \pi\sum_{i=1}^{s}\frac{t_i^q}{(1-t_i)^{2p}}T_i, \quad q = 1, 2, \ldots, 2(p+s)-1.$$

Число $N = 4p(2p+4s-1)+2$ узлов кубатурной формулы (5) на $4p^2 - 4s^2 + 8ps - 6p - 2s + 2$ единицы превышает соответствующую нижнюю границу для числа узлов. При $s = 0$ имеем известную формулу, полученную методом повторного применения квадратурных формул [9, с. 119 – 123]. Приведем значения параметров кубатурной формулы (5) для двух частных случаев:

а) $p = s = 1$:

$$A_0 = \frac{\pi}{5}, \quad B_0 = \frac{4\pi}{27}, \quad A_1 = \frac{49\pi}{270}, \quad B_1 = \frac{49\pi}{270}, \quad m_1 = \sqrt{\frac{1}{7}}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{4}{7}};$$

число $N = 22$ узлов на две единицы превышает соответствующую нижнюю границу;

б) $p = 2,\ s = 1$:

$$A_0 = -\frac{5581\pi}{3^3\cdot 5^5\cdot 7}, \quad B_0 = \frac{11096\pi}{3^2\cdot 5^3\cdot 7}, \quad A_1 = \frac{14641\pi}{3^2\cdot 5^5\cdot 7},$$

$$B_1 = \frac{1403780618 + 9541127\sqrt{606}}{2^4\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 7\cdot 23\cdot 101}\pi, \quad m_1 = \sqrt{\frac{1}{11}}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{141 - 2\sqrt{606}}{253}},$$

$$B_2 = \frac{1403780618 - 9541127\sqrt{606}}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 101}\,\pi, \qquad n_2 = \sqrt{\frac{141 + 2\sqrt{606}}{253}}.$$

Другая кубатурная формула $(4p + 4s - 1)$-й степени точности, также инвариантная относительно группа DG_{4p}, имеет вид

$$\int\limits_{S_2} f(x, y, z)\,dS \cong \sum_{1}^{2}\Bigg[\sum_{j=1}^{p+s} D_j \sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-l_j^2}\cos\frac{k\pi}{2p}, \sqrt{1-l_j^2}\sin\frac{k\pi}{2p}, \pm l_j\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} A_i \sum_{k=1}^{4p} f\left(\sqrt{1-m_i^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p}, \sqrt{1-m_i^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4p}, \pm m_i\right)\Bigg], \tag{6}$$

где A_i и m_i принимают те же значения, что и в кубатурной формуле (5). Значения параметров D_j и l_j определяются из системы

$$8p\sum_{j=1}^{p+s-1} D_j = 4\pi - \pi\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{(1-t_i)^{2p}}\,T_i,$$

$$8p\sum_{j=1}^{p+s} l_j^{2q} D_j = \frac{4\pi}{2q+1} - \pi\sum_{i=1}^{s}\frac{t_i^q}{(1-t_i)^{2p}}\,T_i, \quad q = 1, 2, \ldots, 2(p+s)-1.$$

Число узлов кубатурной формулы (6) на $4p - 2$ единицы больше числа узлов кубатурной формулы (5).

Отметим, что кубатурная формула (6) при $s = 0$ также известна [9, с. 119 – 123].

Приведем значения параметров кубатурной формулы (6) при $p = s = 1$:

$$A_1 = \frac{49\pi}{270}, \quad D_1 = \frac{3053 - 29\sqrt{71}}{1917}\,\pi, \quad D_2 = \frac{3053 + 29\sqrt{71}}{1917}\,\pi,$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{7}}, \quad l_1 = \sqrt{\frac{32 - 3\sqrt{71}}{77}}, \quad l_2 = \sqrt{\frac{32 + 3\sqrt{71}}{77}}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Не существует инвариантной относительно группы DG_{4p} кубатурной формулы вида* (5) *или* (6), *имеющей алгебраическую степень точности выше чем* $8p - 1$.

Доказательство. Плоскости симметрии группы DG_{4p} задаются уравнениями [15]

$$x\sin\frac{k\pi}{4p} - y\cos\frac{k\pi}{4p} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 4p-1,$$

и $z = 0$. Перемножая левые части первых $4p$ уравнений, получаем многочлен

$$P(x, y) = \prod_{k=0}^{4p-1}\left(x\sin\frac{k\pi}{4p} - y\cos\frac{k\pi}{4p}\right)$$

степени $4p$. Многочлен $P^2(x, y)$ неотрицателен всюду на S_2 и интеграл от него по сфере положителен. Но кубатурная формула будет давать нулевое значение независимо от количества множеств узлов, так как узлы лежат на плоскостях симметрии.

Теорема доказана.

В заключение приведем кубатурную формулу $(4p+1)$-й степени точности, которая не получается из формул (2) и (3) при $s=1$:

$$\int\limits_{S_2} f(x,y,z)\,dS \;\cong\; B_0 \sum_{k=1}^{4p} f\left(\cos\frac{k\pi}{2p},\ \sin\frac{k\pi}{2p},\ 0\right) +$$

$$+\ A_0 \sum_{k=1}^{4p} f\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p},\ \sin\frac{(2k-1)\pi}{4p},\ 0\right) +$$

$$+\ \sum_{1}^{2}\sum_{j=1}^{p} A_j f\left(\sqrt{1-m_j^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4p},\ \sqrt{1-m_j^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4p},\ \pm m_j\right),$$

где

$$A_0 \;=\; \frac{\pi}{2p}\left[\frac{(4p)!!}{(4p+1)!!} - \sum_{j=1}^{p}\frac{1-\tau_j}{\tau_j}\,K_j\right],$$

$$B_0 \;=\; \frac{\pi}{2p}\left[2 - \frac{(4p)!!}{(4p+1)!!} + \sum_{j=1}^{p}\frac{(1-\tau_j)^{2p}}{\tau_j}\,K_j - \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\tau_j}\,K_j\right],$$

параметры K_j и τ_j определены в квадратурной формуле (4).

Отметим также работу [16], в которой предложен алгоритм построения весовых кубатурных формул для двумерной сферы, инвариантных относительно группы DG_m (в самой работе группа $\overline{D}_m$). Алгебраическая степень точности n этих формул не зависит от числа m, так как узлами могут быть не только точки, лежащие на плоскостях симметрии группы DG_m, но и точки общего положения. В качестве инвариантной формы степени m взят многочлен $\operatorname{Re}(x+iy)^m$, который при четных значениях m содержит в себе степень многочлена x^2+y^2 ($(x^2+y^2)^{m/2}$ выделяется со знаком плюс, если $m=4p$, и со знаком минус, если $m=4p+2$; оставшееся выражение есть базисная инвариантная форма $\Pi_m(x,y)$ с некоторым коэффициентом). При этом процесс вычисления значений многочлена $\operatorname{Re}(x+iy)^m$ в узлах кубатурной формулы усложняется, но упрощается вычисление интеграла с участием этого многочлена (он равен нулю вследствие ортогональности $\operatorname{Re}(x+iy)^m$). Поэтому изложение алгоритма ведется в моментной форме. Система для определения параметров кубатурной формулы сводится к нескольким поочередно решаемым подсистемам, для решения которых предлагается более устойчивый метод, чем известные. Качество получаемых формул оценивается коэффициентом эффективности $\eta = \dfrac{(n+1)^2}{3N}$, где $(n+1)^2$ — число точно интегрируемых кубатурной формулой сферических многочленов, N — число узлов. Авторами отмечается, что предлагаемый ими алгоритм позволяет получать кубатурные формулы с коэффициентами эффективности $\eta = \dfrac{2}{3}$ и $\eta = \dfrac{8}{9}$ при $n\to\infty$.

В работе также указываются поверхности, для которых можно применить рассматриваемый метод. В заключении отмечается, что А. Н. Казаковым этот алгоритм реализован в программе QR для IBM совместимых персональных компьютеров.

Предлагаемый нами метод позволяет строить кубатурные формулы, инвариантные относительно группы DG_{2m}, алгебраическая степень точности которых не может превышать $4m-1$. За счет удачного подбора множеств узлов и использования упрощенного вида многочлена $\Pi_{2m}(x, y)$ система для определения параметров кубатурной формулы распадается на две стандартно решаемые подсистемы, все уравнения которых записываются явно. Приходится различать случаи четного и нечетного m, так как в одном случае $\Pi_{2m}(x, y)$ равен нулю в узлах, проекции которых на плоскость Oxy лежат на радиусах-векторах вершин $2m$-угольника, в другом — на радиусах-векторах середин ребер. Кубатурная формула содержит параметр s, $0 \le s \le p$, в зависимости от значения которого коэффициент эффективности кубатурной формулы в асимптотике может принимать значения от $\eta = \dfrac{2}{3}$ $(s = 0)$ до $\eta = \dfrac{8}{9}$ $(s = p)$.

В заключение отметим работу [17], где диэдральные группы используются при построении кубатурных формул для тора, и работу [18], где предлагаемый нами алгоритм реализован для круга.

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур по поверхности сферы // Сиб. мат. журн. – 1962. – **3**, № 5. – С. 769 – 791.
2. *Салихов Г. Н.* К теории групп правильных многогранников // Докл. АН СССР. – 1972. – **205**, № 1. – С. 33 – 35.
3. *Салихов Г. Н.* Кубатурные формулы для гиперсферы, инвариантные относительно группы правильного многогранника // Там же. – № 5. – С. 1075 – 1078.
4. *Лебедев В. И.* Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса – Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – **15**, № 1. – С. 48 – 54.
5. *Лебедев В. И.* Об одном типе квадратурных формул повышенной алгебраической точности для сферы // Докл. АН СССР. – 1976. – **231**, № 1. – С. 32 – 34.
6. *Мысовских И. П.* О вычислении интегралов по поверхности сферы // Там же. – 1977. – **235**, № 2. – С. 269 – 272.
7. *Мысовских И. П.* О кубатурных формулах, инвариантных относительно групп преобразований // Методы вычислений. – 1978. – Вып. 11. – С. 3 – 21.
8. *Мысовских И. П.* Об инвариантных кубатурных формулах // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. сем. С. Л. Соболева. – 1978. – № 1. – С. 69 – 76.
9. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
10. *Таджиев Ш. И., Шамсиев Э. А.* К построению кубатурных формул для сферы // Вопросы вычислит. и прикл. математики. Методы и алгоритмы решения задач математической физики и математической кибернетики. – 1989. – Вып. 86. – С. 88 – 95.
11. *Шамсиев Э. А., Сагдиев Х. М.* Кубатурные формулы $(4p+4s+7)$-й степени точности для сферы // Вопросы вычислит. и прикл. математики. Методы и алгоритмы решения задач математической физики и дискретной математики. – 1995. – Вып. 99. – С. 114 – 117.
12. *Шамсиев Э. А.* Кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно диэдральной группы порядка $8(2p+1)$ // Узб. мат. журн. – 2006. – № 4. – С. 91 – 99.
13. *Coxeter H.-S. M.* The product of the generators of a finite group generated by reflections // Duke Math. J. – 1951. – **18**. – P. 765 – 782.
14. *Клейн Ф.* Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
15. *Игнатенко В. Ф.* О плоских алгебраических кривых с осями симметрии // Укр. геом. сб. – 1978. – Вып. 21. – С. 31 – 33.
16. *Казаков А. Н., Лебедев В. И.* Квадратурные формулы типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы диэдра // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1994. – **203**. – С. 100 – 112.
17. *Носков М. В., Федотова И. М.* Об инвариантных кубатурных формулах для тора в R^3 // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2003. – **43**, № 9. – С. 1323 – 1329.
18. *Шамсиев Э. А.* Кубатурные формулы для круга, инвариантные относительно групп преобразований правильных многоугольников в себя // Там же. – 2006. – **46**, № 7. – С. 1211 – 1218.

Получено 11.04.06,
после доработки — 28.09.07