УДК 517.5
А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ОДНИМ ЛІНІЙНИМ МЕТОДОМ НАБЛИЖЕННЯ В РІВНОМІРНІЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ МЕТРИКАХ

We find asymptotic equalities for the least upper bounds of approximations of classes of the Poisson integrals of periodic functions by a certain linear approximation method of special form in metrics of the spaces C and L_p.

Найдены асимптотические равенства для точных верхних граней приближений классов интегралов Пуассона периодических функций некоторым линейным методом приближения специального вида в метриках пространств C и L_p.

Нехай L_p, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних у p-му степені функцій f з нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p};$$

L_∞ — простір 2π-періодичних, вимірних і суттєво обмежених функцій, у якому норму задано формулою

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, норму в якому задано таким чином:

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Інтегралами Пуассона сумовної функції $\varphi(\cdot)$ називають функції $f(x)$, що означаються за допомогою рівності

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\, P_{q,\beta}(t)\, dt, \quad A_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

у якій $P_{q,\beta}(t)$ — ядра Пуассона з параметрами $q \in (0, 1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$, тобто функції вигляду

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0, 1), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Множину всіх функцій, які допускають зображення у вигляді (1) при $\varphi \in \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина із L_1, позначатимемо через $L^q_\beta \mathfrak{N}$. В рамках даної роботи роль $\mathfrak{N}$ відіграватимуть множини

$$U^0_p = \left\{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \le 1,\ \varphi \perp 1\right\}.$$

При цьому для зручності покладемо $L^q_{\beta,p} \overset{\mathrm{df}}{=} L^q_\beta U^0_p$.

Кожній функції f із класу $L^q_\beta \mathfrak{N}$ поставимо у відповідність тригонометричний поліном $U^*_{n-1}(f;x)$ вигляду

$$U^*_{n-1}(f;x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\lambda_k^{(n)}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) + \nu_k^{(n)}\left(a_k\sin kx - b_k\cos kx\right)\right\},$$

де $a_k = a_k(\varphi)$, $b_k = b_k(\varphi)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — коефіцієнти Фур'є функції φ, а числа $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)}(q;\beta)$ і $\nu_k^{(n)} = \nu_k^{(n)}(q;\beta)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$, означаються за допомогою рівностей

$$\lambda_k^{(n)} = \left(q^k - q^{2n-k} - q^{2n+k}\right)\cos\frac{\beta\pi}{2},$$

$$\nu_k^{(n)} = \left(q^k - q^{2n-k} + q^{2n+k}\right)\sin\frac{\beta\pi}{2}.$$

Поліном $U^*_{n-1}(f;x)$ можна розглядати як лінійний метод наближення, що визначається системою чисел $\left\{\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{n-1}^{(n)}, \nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_{n-1}^{(n)}\right\}$. Уперше цей метод (у більш загальному випадку) було розглянуто в роботі [1]; там же було досліджено деякі апроксимативні властивості вказаного методу на запроваджених О. І. Степанцем [2, с. 33] класах (ψ, β)-диференційовних функцій. Зокрема, в [1] доведено, що для деяких класів нескінченно диференційовних функцій даний метод є найкращим (в сенсі сильної асимптотики) лінійним методом наближень тригонометричними поліномами в рівномірній метриці. Аналогічний результат має місце і для наближень у метриці простору L_1.

У даній роботі встановимо асимптотичні рівності для величин

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,p}; U^*_{n-1}\right)_C = \sup_{f\in L^q_{\beta,p}}\left\|f(x) - U^*_{n-1}(f;x)\right\|_C,$$

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,1}; U^*_{n-1}\right)_{L_s} = \sup_{f\in L^q_{\beta,1}}\left\|f(x) - U^*_{n-1}(f;x)\right\|_s$$

при довільних $1 \le p,\ s \le \infty$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^q_{\beta,p}; U^*_{n-1}\right)_C = q^n\left(\frac{2^{1/p}\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}}M_{q,p'} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{\sigma(p)}}\right),$$

де $p' = \dfrac{p}{p-1}$,

$$M_{q,p'} = \frac{1-q^2}{2}\left\|\frac{1}{1-2q\cos t + q^2}\right\|_{p'}, \tag{2}$$

$$\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p = \infty, \\ 2, & 1 \le p < \infty, \end{cases}$$

а величина $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, q, p *і* β.

Доведення. Згідно з лемою 2 з роботи [1, с. 302], для будь-якої функції $f \in L^q_\beta\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$, має місце інтегральне зображення

$$f(x) - U_{n-1}^{*}(f;x) =$$

$$= \frac{2q^n}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt - \frac{q^{2n}}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt, \tag{3}$$

в якому

$$\mathcal{P}_q(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k\cos kt, \quad q\in(0,1),$$

$$\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q\in(0,1), \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Внаслідок рівності (3) та інваріантності множини U_p^0 відносно зсуву аргументу для довільного $1\le p\le\infty$ маємо

$$\mathcal{E}\left(L_{\beta,p}^{q}; U_{n-1}^{*}\right)_C = \frac{2q^n}{\pi}\sup_{\varphi\in U_p^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_C + R_n, \tag{4}$$

де

$$|R_n| \le \frac{q^{2n}}{\pi}\sup_{\|\varphi\|_p\le 1}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_C. \tag{5}$$

Відомо (див., наприклад, [3, с. 137, 138]), що якщо $\varphi\in L_p$, $1\le p\le\infty$, і $K\in L_{p'}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, то

$$\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)K(t)\,dt\right\|_C \le \|\varphi\|_p\|K\|_{p'}. \tag{6}$$

Застосовуючи нерівність (6) при $K(t)=\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)$, із (5) одержуємо оцінку

$$|R_n| \le \frac{q^{2n}}{\pi}\left\|\mathcal{P}_{q,\beta,n}(\cdot)\right\|_{p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{7}$$

У роботі [4, с. 1083, 1087, 1088] одержано результати, з яких при $1\le p'\le\infty$ випливають рівності

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\right\|_{p'} \\[2ex] \inf\limits_{\lambda\in\mathcal{R}}\left\|\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)-\lambda\right\|_{p'} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\sup\limits_{h\in\mathcal{R}}\left\|\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t+h)-\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\right\|_{p'}\end{array}\right\} = q^n\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1/p'}}\|Z_q\|_{p'} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p')}}\right), \tag{8}$$

де

$$Z_q(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}},$$

$$s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1, \\ 2, & p \in (1, \infty], \end{cases} \tag{9}$$

а величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно параметрів p', q і n.

Враховуючи (7) і (8), маємо

$$|R_n| = O(1)\frac{q^{3n}}{1-q}, \tag{10}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена за всіма розглядуваними параметрами.

Для оцінки першого доданка у правій частині рівності (4) скористаємось співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [5, с. 27]):

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|x(t)-\lambda\|_{p'} = \sup_{y\in U_p^0}\int\limits_0^{2\pi} x(t)\,y(t)\,dt, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad x\in L_{p'}, \quad 1\le p'\le\infty. \tag{11}$$

Покладаючи в (11) $x(t) = \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)$, $y(t) = \varphi(t)$, отримуємо

$$\sup_{\varphi\in U_p^0}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)-\lambda\right\|_{p'}. \tag{12}$$

Щоб знайти точну асимптотичну оцінку величини $\inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t) - \lambda\right\|_{p'}$, скористаємось наступним твердженням з роботи [4, с. 1083].

Лема 1. *Нехай* $1\le s\le\infty$ *і* 2π*-періодичні функції* $g(t)$ *та* $h(t)$ *мають обмежену варіацію, якщо* $s=1$, *або належать класу Гельдера* KH^1, *якщо* $1<s\le\infty$. *Тоді для функції* $\varphi(t) = g(t)\cos(nt+\alpha) + h(t)\sin(nt+\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, *виконуються асимптотичні рівності*

$$\|\varphi\|_s = (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\|r\|_s + O(1)Mn^{-1}, \tag{13}$$

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\|\varphi-c\|_s = (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\|r\|_s + O(1)Mn^{-1}, \tag{14}$$

$$\sup_{h\in\mathbb{R}}\|\varphi(t+h)-\varphi(t)\|_s = (2\pi)^{-1/s}\|\cos t\|_s\|r\|_s + O(1)Mn^{-1}, \tag{15}$$

в яких

$$r(t) = \sqrt{g^2(t)+h^2(t)},$$

$$M = M_s = \begin{cases} \bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(g) + \bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(h) & \text{при} \quad s=1, \\ K + s^{-1}\|r\|_s^{1-s}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(r^s) & \text{при} \quad 1<s<\infty, \\ K & \text{при} \quad s=\infty, \end{cases}$$

а величини $O(1)$ *рівномірно обмежені відносно усіх розглядуваних параметрів.*

Записуючи функцію $\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)$ у вигляді

$$\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t) = \left(\cos\frac{\beta\pi}{2}\mathcal{P}_q(t)\right)\cos nt + \left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\mathcal{P}_q(t)\right)\sin nt \tag{16}$$

і застосовуючи лему 1, покладаючи в її умовах $s = p'$,

$$g(t) = \cos\frac{\beta\pi}{2}\mathcal{P}_q(t), \qquad h(t) = \sin\frac{\beta\pi}{2}\mathcal{P}_q(t),$$

із рівності (14) одержуємо

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t) - \lambda\right\|_{p'} = \frac{\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1/p'}}\left\|\mathcal{P}_q(t)\right\|_{p'} + \frac{O(1)}{n}\gamma_{p'}, \tag{17}$$

де

$$\gamma_{p'} = \begin{cases} \bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(\mathcal{P}_q) & \text{при} \quad p' = 1, \\ \left\|\mathcal{P}_q'(\cdot)\right\|_C + \dfrac{1}{p'}\left\|\mathcal{P}_q(\cdot)\right\|_{p'}^{1-p'}\bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\mathcal{P}_q^{p'}\right) & \text{при} \quad 1 < p' < \infty, \\ \left\|\mathcal{P}_q'(\cdot)\right\|_C & \text{при} \quad p' = \infty. \end{cases} \tag{18}$$

Оскільки, як неважко переконатись,

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}(\mathcal{P}_q) = 2\big(\mathcal{P}_q(0) - \mathcal{P}_q(\pi)\big) = \frac{4q}{1-q^2},$$

$$\left\|\mathcal{P}_q'(\cdot)\right\|_C \le \sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2},$$

$$\bigvee_{-\pi}^{\pi}\left(\mathcal{P}_q^{p'}\right) = 2\left(1-q^2\right)p'\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{P}_q^{p'}(t)\left|h_q(t)\right|dt \le 2\left(1-q^2\right)p'\left\|h_q(\cdot)\right\|_C\left\|\mathcal{P}_q(\cdot)\right\|_{p'}^{p'},$$

де

$$h_q(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{q\sin t}{1 - 2q\cos t + q^2},$$

то на підставі формул (17) і (18) та очевидних нерівностей

$$\left\|h_q(\cdot)\right\|_C \le \frac{q}{1-q}, \qquad \left\|\mathcal{P}_q(\cdot)\right\|_{p'} \le \frac{(2\pi)^{1/p'}(1+q)}{2(1-q)}$$

отримуємо рівність

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t) - \lambda\right\|_{p'} = \frac{\|\cos t\|_{p'}}{(2\pi)^{1/p'}}\left\|\mathcal{P}_q(t)\right\|_{p'} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p')}}, \tag{19}$$

у якій $s(p')$ означається формулою (9), а величина $O(1)$ рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Об'єднуючи формули (4), (10), (12) і (19), маємо

$$\mathcal{E}\left(L_{\beta,p}^q; U_{n-1}^*\right)_C = q^n\left(\frac{2^{1/p}\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+1/p'}}\left\|\mathcal{P}_q(t)\right\|_{p'} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p')}}\right).$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\Big(L^q_{\beta,1}; U^*_{n-1}\Big)_{L_p} = q^n\left(\frac{2^{1-1/p}\|\cos t\|_p}{\pi^{1+1/p}} M_{q,p} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right),$$

де величини $M_{q,p}$ *та* $s(p)$ *визначаються за допомогою формул* (2) *і* (9) *відповідно*, *а величина* $O(1)$ *рівномірно обмежена по* n, q, p *і* β.

Доведення. Виходячи із зображення (3), для довільного $1 \le p \le \infty$ можемо записати рівність

$$\mathcal{E}\Big(L^q_{\beta,1}; U^*_{n-1}\Big)_{L_p} = \frac{2q^n}{\pi}\sup_{\varphi \in U_1^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_p + \tilde{R}_n, \tag{20}$$

де

$$\left|\tilde{R}_n\right| \le \frac{q^{2n}}{\pi}\sup_{\varphi \in U_1^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\,\mathcal{P}_{q,\beta,n}(t)\,dt\right\|_p. \tag{21}$$

Використовуючи твердження 1.5.5 із [5, c. 43], згідно з яким при $\varphi \in L_1$, $K \in L_p$, $1 \le p \le \infty$,

$$\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\,K(t)\,dt\right\|_p \le \|K\|_p\|\varphi\|_1,$$

із (21) одержуємо нерівність

$$\left|\tilde{R}_n\right| \le \frac{q^{2n}}{\pi}\left\|\mathcal{P}_{q,\beta,n}(\cdot)\right\|_p,$$

яка разом із формулами (8) дозволяє записати оцінку

$$\left|\tilde{R}_n\right| = O(1)\frac{q^{3n}}{1-q}, \tag{22}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена за всіма розглядуваними параметрами.

Для остаточного доведення теореми необхідно знайти асимптотично точну оцінку першого доданка у правій частині рівності (20).

Згідно з лемою 1 із роботи [6, c. 1398], якщо $K(t) \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, то для величини

$$\mathcal{E}(K)_p = \sup_{\varphi \in U_1^0}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\,K(t)\,dt\right\|_p$$

виконується співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h \in \mathbb{R}}\|K(\cdot) - K(\cdot + h)\|_p \le \mathcal{E}(K)_p \le \frac{1}{\pi}\|K\|_p. \tag{23}$$

Використавши нерівності (23) при $K(t) = \cos\left(nt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)$, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\sup_{h\in\mathbb{R}}\left\|\cos\left(n(\cdot)-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(\cdot)-\cos\left(n(\,\cdot+h)-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(\,\cdot+h)\right\|_p \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_p \le$$

$$\le \left\|\cos\left(n(\cdot)-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(\cdot)\right\|_p, \quad 1\le p\le\infty. \tag{24}$$

На основі зображення (16) і леми 1 $\Big($покладаючи в її умовах $s = p$, $\varphi(t) = \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\Big)$ із ланцюжка нерівностей (24) і асимптотичної рівності (19) безпосередньо одержуємо

$$\sup_{\varphi\in U_1^0}\left\|\int_0^{2\pi}\varphi(x-t)\cos\left(nt-\frac{\beta\pi}{2}\right)\mathcal{P}_q(t)\,dt\right\|_p =$$

$$= \frac{\|\cos t\|_p}{(2\pi)^{1/p}}\left\|\mathcal{P}_q(t)\right\|_p + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}. \tag{25}$$

Об'єднуючи формули (20), (22) і (25), маємо

$$\mathcal{E}\Big(L^q_{\beta,1};U^*_{n-1}\Big)_{L_p} = q^n\left(\frac{2^{1/p'}\|\cos t\|_p}{\pi^{1+1/p}}\left\|\mathcal{P}_q(t)\right\|_p + O(1)\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}}\right).$$

Теорему 2 доведено.

1. *Сердюк А. С.* Про один лінійний метод наближення періодичних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 1. – С. 295 – 336.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**, ч. 1. – 427 с.
4. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1079 – 1096.
5. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
6. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1395 – 1408.

Одержано 09.02.07