УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. ун-т,
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
М. Е. Ткаченко (Днепропетр. ун-т)

ВОПРОСЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО НЕСИММЕТРИЧНОГО L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В *KB*-ПРОСТРАНСТВАХ

We consider the problem of characterization for subspaces of the uniqueness of element of the best nonsymmetric L_1-approximation of functions that are continuous on a metric compact and have values in the *KB*-space. We establish classes of test functions which characterize the uniqueness of element of the best nonsymmetric approximation.

Розглянуто задачу характеризації підпросторів єдиності елемента найкращого несиметричного L_1-наближення неперервних на метричному компакті функцій зі значеннями в KB-просторі. Знайдено класи тестових функцій, які характеризують єдиність елемента найкращого несиметричного наближення.

В данной статье рассматриваются вопросы характеризации подпространств единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения непрерывных на метрическом компакте функций со значениями в KB-пространстве. Результаты данной статьи обобщают некоторые результаты из работ [1 – 4].

Приведем необходимые определения из теории упорядоченных векторных пространств (подробнее об этом см. в [5]).

Пусть X — частично упорядоченное векторное пространство, в котором порядок согласован с алгебраическими операциями.

Для непустого множества $E \subset X$ элемент $y \in X$, удовлетворяющий условиям:

1) $x \le y$ $(x \ge y)$ $\forall\, x \in E$;

2) если элемент $z \in X$ таков, что $x \le z$ $(x \ge z)$ для любого $x \in Z$, то $y \le z$ $(y \ge z)$,

называется супремумом (инфимумом) множества E и обозначается $\sup E$ $(\inf E)$; если же множество E состоит из конечного числа элементов x_1, $x_2, \ldots, x_n$, то их супремум и инфимум обозначаются соответственно $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ и $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$.

Если в X для любых двух элементов x, $y \in X$ существует их супремум $x \vee y$, то элемент $x_+ = x \vee 0$ называют положительной частью элемента $x \in X$, элемент $x_- = (-x) \vee 0$ — его отрицательной частью и элемент $|x| = x_+ + x_-$ — модулем элемента x. Два элемента x, $y \in X$ называются дизъюнктными (обозначение $x \,\Delta\, y$), если $|x| \wedge |y| = 0$.

Частично упорядоченное векторное пространство X, в котором порядок согласован с алгебраическими операциями и для любых двух элементов x, $y \in X$ существует $x \vee y$, называется KN-линеалом или нормированной решеткой, если в X определена монотонная норма, т. е. норма, удовлетворяющая условию $|x| \le |y|$, влечет $\|x\|_X \le \|y\|_X$. KN-линеалами, в частности, являются пространства $C[a, b]$, $L_p[a, b]$, 1_p и др.

KN-линеал, в котором любое (любое счетное) непустое ограниченное сверху или снизу множество имеет соответственно верхнюю или нижнюю грань, называется KN-пространством ($K_\sigma N$-пространством).

Пусть X — KN-линеал и X^* — пространство линейных и непрерывных в обычном смысле функционалов на X. Тогда X^* является полным в обычном смысле KN-пространством.

$K_\sigma N$-пространство, в котором норма удовлетворяет двум дополнительным условиям:

1) если $x_n \downarrow 0$, то $\|x_n\|_X \to 0$;

2) если $x_n \uparrow +\infty$ ($x_n \geq 0$), то $\|x_n\|_X \to +\infty$,

называется KB-пространством.

Пусть Q — метрический компакт с метрикой ρ, Σ — σ-поле борелевских подмножеств метрического компакта Q, μ — неотрицательная, конечная, безатомная мера, положительная на любом непустом открытом подмножестве Q. Пусть также X — KB-пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Обозначим через $C(Q, X)$ пространство непрерывных функций $f\colon Q \to X$.

Для каждого $x \in Q$ и положительных чисел α, β положим

$$|f(x)|_{\alpha,\beta} = \alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x),$$

$$|f(x)|_{X;\alpha,\beta} = \|\alpha \cdot f_+(x) + \beta \cdot f_-(x)\|_X,$$

где $f_\pm(x) = (\pm f(x)) \vee 0$.

Определим в $C(Q, X)$ несимметричную L_1-норму, положив

$$\|f\|_{1;\alpha,\beta} = \int_Q \|f(x)\|_{X;\alpha,\beta}\, d\mu(x).$$

Пусть $f \in C(Q, X)$, $H \subset C(Q, X)$. Величину

$$E(f, H)_{1;\alpha,\beta} = \inf\left\{\|f - g\|_{1;\alpha,\beta} \colon g \in H\right\} \tag{1}$$

будем называть наилучшим (α, β)-приближением функции f множеством H в метрике L_1. Элемент из H, реализующий точную нижнюю грань в (1), называется элементом наилучшего (α, β)-приближения. Множество элементов наилучшего (α, β)-приближения функции f в H обозначим через $P_H^{(\alpha,\beta)}(f)$, а множество нулей функции f на Q — через Z_f.

Для $f, g \in C(Q, X)$ положим

$$\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f(x), g(x)) = \lim_{t \to -0} \frac{\|f(x) + tg(x)\|_{X;\alpha,\beta} - \|f(x)\|_{X;\alpha,\beta}}{t}.$$

При $\alpha = \beta = 1$ такой функционал рассматривается, например, в [6, с. 3]. Как и в [6], легко показать, что, так как функция

$$r_{\alpha,\beta}(f, g; t, x) = \frac{\|f(x) + tg(x)\|_{X;\alpha,\beta} - \|f(x)\|_{X;\alpha,\beta}}{t}$$

не убывает по t и ограничена сверху на $(-\infty, 0)$, $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f, g)$ существует для произвольных $f, g \in C(Q, X)$, а также обладает следующими свойствами:

i) для любого $x \in Q$ и любой положительной действительной функции

$\gamma(x)$

$$\tau_-^{(\alpha,\beta)}(\gamma(x)f(x), g(x)) = \tau_-^{(\alpha,\beta)}(f(x), g(x));$$

ii) для любого $x \in Q$

$$\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f(x), g(x)) \geq -\| g(x)\|_{X;\beta,\alpha}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее обобщение известного критерия элемента наилучшего L_1-приближения (см., например, [6] (теорема 2.1), [7] (теорема 4.1)) на случай наилучшего (α, β)-приближения функций из $C(Q, X)$.

Теорема 1. *Пусть* H *— подпространство пространства* $C(Q, X)$. *Элемент* $p \in H$ *является элементом наилучшего* (α, β)*-приближения функции* $f \in C(Q, X)$ *в* H *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{Q\setminus Z_{f-p}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-p)(x), g(x))\,d\mu(x) \leq \int\limits_{Z_{f-p}} \| g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x) \quad \forall g \in H. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $p \in P_H^{(\alpha,\beta)}(f)$. Поскольку H — подпространство, для любого $g \in H$

$$\| f-p\|_{1;\alpha,\beta} \leq \| f-p+tg\|_{1;\alpha,\beta} \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Тогда, с одной стороны, вследствие того, что $r_{\alpha,\beta}(f-p, g; t, x)$ не убывает по t и ограничена сверху на $(-\infty, 0)$, согласно теореме Б. Леви

$$\int\limits_Q \tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-p)(x), g(x))\,d\mu(x) = \int\limits_Q \lim_{t\to -0} r_{\alpha,\beta}(f-p, g; t, x)\,d\mu(x) =$$

$$= \lim_{t\to -0} \frac{\int_Q \left(\|(f-p)(x)+tg(x)\|_{X;\alpha,\beta} - \|(f-p)(x)\|_{X;\alpha,\beta}\right)d\mu(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to -0} \frac{\| f-p+tg\|_{1;\alpha,\beta} - \| f-p\|_{1;\alpha,\beta}}{t} \leq 0 \quad \forall g \in H.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_Q \tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-p)(x), g(x))\,d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q\setminus Z_{f-p}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-p)(x), g(x))\,d\mu(x) - \int\limits_{Z_{f-p}} \| g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x) \quad \forall g \in H. \tag{3}$$

Сопоставляя два последний соотношения, получаем (2).

Необходимость доказана.

Пусть теперь выполняется неравенство (2). В силу (3) имеем

$$\int\limits_Q \tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-p)(x), g(x))\,d\mu(x) \leq 0 \quad \forall g \in H.$$

Поскольку функция

$$r_{\alpha,\beta}(f-p, g; t) = \int\limits_Q r_{\alpha,\beta}(f-p; t, x)\,d\mu(x)$$

также не убывает на $(-\infty, 0)$, полагая $t = -1$, получаем

$$\| f-p\|_{1;\alpha,\beta} - \| f-g\|_{1;\alpha,\beta} \leq \int\limits_Q \tau_-^{(\alpha,\beta)}((f-p)(x), (g-p)(x))\,d\mu(x) \leq 0 \quad \forall g \in H,$$

и, следовательно, $p \in P_H^{(\alpha,\beta)}(f)$.

Теорема доказана.

Пусть далее X — строго нормированное KB-пространство, т. е. X — KB-пространство, в котором равенство $\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$ для $x \neq 0$, $y \neq 0$ возможно только когда $x = cy$, где $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$.

Определим в X строго монотонную норму следующим образом: $|x| < |y|$ влечет $\|x\|_X < \|y\|_X$.

Пусть H — подпространство пространства $C(Q, X)$. Положим

$$H' = \{h \in C(Q, X) \colon \exists g_h \in H \ \ \forall x \in Q \ \ h(x) = \pm g_h(x)\}.$$

Следующая теорема обобщает теорему 1 из [1], а также теоремы 1 из [3] и 2 из [4] на случай несимметричного приближения функций из $C(Q, X)$.

Теорема 2. *Пусть X — строго нормированное KB-пространство со строго монотонной нормой. Каждая функция $f \in C(Q, X)$ имеет не более одного элемента наилучшего (α,β)-приближения элементами из H тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in H'$ имеет не более одного элемента наилучшего (α,β)-приближения в H.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $h \in H' \setminus \{0\}$, $0 \in P_H^{(\alpha,\beta)}(h)$ и g_h — функция из H такая, что $h(x) = \pm g_h(x)$ $\forall x \in Q$. Тогда $g_h \in P_H^{(\alpha,\beta)}(h)$.*

Доказательство. Ясно, что $Z_h \subset Z_{h-g_h}$ и $h(x) - g_h(x) = 2h(x)$ $\forall x \in Q \setminus Z_{h-g_h}$.

В силу свойства ii) функционала $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f, g)$ и теоремы 1, так как $0 \in P_H^{(\alpha,\beta)}(h)$, получаем

$$\int\limits_{Q \setminus Z_{h-g_h}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}((h-g_h)(x), g(x))\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q \setminus Z_{h-g_h}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(2h(x), g(x))\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q \setminus Z_h} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), g(x))\, d\mu(x) - \int\limits_{Z_{h-g_h} \setminus Z_h} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), g(x))\, d\mu(x) \le$$

$$\le \int\limits_{Z_h} \|g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x) + \int\limits_{Z_{h-g_h} \setminus Z_h} \|g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Z_{h-g_h}} \|g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x) \quad \forall g \in H.$$

Следовательно, $g_h \in P_H^{(\alpha,\beta)}(h)$, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Пусть каждая функция $h \in H'$ имеет не более одного элемента наилучшего (α,β)-приближения в H в метрике L_1, но существует функция $f \in C(Q, X)$ такая, что $p_1, p_2 \in P_H^{(\alpha,\beta)}(f)$, $p_1 \neq p_2$. Тогда $\dfrac{p_1 + p_2}{2} \in P_H^{(\alpha,\beta)}(f)$ и

$$\left\| f - \frac{p_1 + p_2}{2} \right\|_{1;\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \| f - p_1 \|_{1;\alpha,\beta} + \frac{1}{2} \| f - p_2 \|_{1;\alpha,\beta}$$

или

$$\int_Q \left\| \left(f - \frac{p_1 + p_2}{2} \right)(x) \right\|_{X;\alpha,\beta} d\mu(x) =$$

$$= \int_Q \frac{1}{2} \left(\|(f - p_1)(x)\|_{X;\alpha,\beta} + \|(f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} \right) d\mu(x).$$

Поскольку подынтегральные функции непрерывны и неотрицательны, а мера μ положительна на любом непустом открытом подмножестве Q, то

$$\|(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} =$$

$$= \|(f - p_1)(x)\|_{X;\alpha,\beta} + \|(f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} \quad \forall x \in Q. \tag{4}$$

Согласно теореме III.4.3 из [5] $(f + g)_\pm \le f_\pm + g_\pm$. Таким образом, учитывая монотонность нормы и неравенство треугольника для норм, получаем

$$\|(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} =$$

$$= \|\alpha[(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)]_+ + \beta[(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)]_- \|_X \le$$

$$\le \|\alpha(f - p_1)(x)_+ + \alpha(f - p_2)(x)_+ + \beta(f - p_1)(x)_- + \beta(f - p_2)(x)_- \|_X \le$$

$$\le \|(f - p_1)(x)\|_{X;\alpha,\beta} + \|(f - p_2)(x)\|_{X;\alpha,\beta} \quad \forall x \in Q,$$

и так как выполняется (4), то везде имеет место знак равенства. Учитывая строгую монотонность нормы в X, имеем

$$[(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)]_\pm = (f - p_1)(x)_\pm + (f - p_2)(x)_\pm \quad \forall x \in Q \tag{5}$$

или

$$|(f - p_1)(x) + (f - p_2)(x)| = |(f - p_1)(x)| + |(f - p_2)(x)| \quad \forall x \in Q \tag{6}$$

и

$$\left\| |(f - p_1)(x)|_{\alpha,\beta} + |(f - p_2)(x)|_{\alpha,\beta} \right\|_X =$$

$$= \|\alpha(f - p_1)(x)_+ + \beta(f - p_1)(x)_- \|_X +$$

$$+ \|\alpha(f - p_2)(x)_+ + \beta(f - p_2)(x)_- \|_X \quad \forall x \in Q. \tag{7}$$

В силу строгой нормированности X равенство (7) возможно тогда и только тогда, когда для каждого $x \in Q$ либо одна из величин $|(f - p_1)(x)|_{\alpha,\beta}$ и $|(f - p_2)(x)|_{\alpha,\beta}$ равна нулю, либо $|(f - p_1)(x)|_{\alpha,\beta} = c(x)|(f - p_2)(x)|_{\alpha,\beta}$, где $c(x)$ — положительная действительная функция.

Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$\alpha[(f - p_1)(x)_+ - c(x)(f - p_2)(x)_+] +$$

$$+ \beta[(f - p_1)(x)_- - c(x)(f - p_2)(x)_-] = 0 \quad \forall x \in Q.$$

Из (5) следует, что

$$(f - p_1)_\pm(x) \Delta (f - p_2)_\mp(x) \quad \forall x \in Q, \tag{8}$$

и в силу теоремы III.6.3 из [5]

$$(\alpha[(f-p_1)_+(x)-c(x)(f-p_2)_+(x)])\Delta(\beta[(f-p_1)_-(x)-c(x)(f-p_2)_-(x)]) \quad \forall x\in Q.$$

Согласно следствию 1 из теоремы III.6.6 из [5] находим, что для любого $x\in Q$

$$\alpha[(f-p_1)_+(x)-c(x)(f-p_2)_+(x)] = 0$$

и

$$\beta[(f-p_1)_-(x)-c(x)(f-p_2)_-(x)] = 0.$$

Следовательно, равенство (7) возможно тогда и только тогда, когда для каждого $x\in Q$ либо одна из величин $(f-p_1)(x)$ и $(f-p_2)(x)$ равна нулю, либо $(f-p_1)(x) = c(x)(f-p_2)(x)$, где $c(x)$ — положительная действительная функция, причем $c(x)\neq 1$ $\forall x\in Q\setminus Z_{p_1-p_2}$. Теперь, полагая

$$f_0(x) = f(x) - \frac{(p_1+p_2)(x)}{2},$$

получаем, что существует действительная функция $\gamma(x)$ такая, что для $x\in Q\setminus Z_{p_1-p_2}$

$$f_0(x) = \gamma(x)(p_1-p_2)(x),$$

причем $0\in P_H^{(\alpha,\beta)}(f_0)$.

Пусть

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\gamma(x)(p_1-p_2)(x), & x\in Q\setminus Z_{p_1-p_2}, \\ 0, & x\in Z_{p_1-p_2}. \end{cases}$$

Используя равенство (6), легко показать, что $Z_{f_0}\subset Z_{p_1-p_2}$. Поэтому $h\in C(Q,X)$ и $h\in H'$, где $g_h = p_1-p_2$, $h\neq 0$.

Поскольку $0\in P_H^{(\alpha,\beta)}(f_0)$, согласно теореме 1, учитывая свойства функционала $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f,g)$, получаем

$$\int_{Q\setminus Z_h}\tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x),g(x))\,d\mu(x) = \int_{Q\setminus Z_h}\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x),g(x))\,d\mu(x) =$$

$$= \int_{Q\setminus Z_{f_0}}\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x),g(x))\,d\mu(x) - \int_{Z_h\setminus Z_{f_0}}\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x),g(x))\,d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int_{Z_{f_0}}\|g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x) + \int_{Z_h\setminus Z_{f_0}}\|g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x) =$$

$$= \int_{Z_h}\|g(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x) \quad \forall g\in H.$$

Таким образом, $0\in P_H^{(\alpha,\beta)}(h)$, и по лемме 1 $p_1-p_2\in P_H^{(\alpha,\beta)}(h)$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Как следствие теоремы 2, получаем следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы 8 из работы [1]. Для конечномерных подпространств (а такие подпространства, как известно, являются множествами существования элемента наилучшего приближения) пространства $C(Q,X)$, где X — банахово пространство, и $\alpha=\beta=1$ аналогичный результат получен в [2] (теорема 1).

Теорема 3. *Пусть X — строго нормированное KB-пространство со* *строго монотонной нормой, H — подпространство пространства $C(Q, X)$. Каждая функция $f \in C(Q, X)$ будет иметь не более одного элемента наилучшего (α, β)-приближения в H тогда и только тогда, когда для каждой функции $h \in H' \setminus \{0\}$ нулевой элемент не будет элементом наилучшего (α, β)-приближения в H.*

Рассмотрим далее пространства следующего вида. Пусть $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$ — система линейно независимых функций из $C(Q, \mathbf{R})$. Положим

$$H_n = \left\{ p(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x) \colon a_i \in X,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Заметим, что H_n является подпространством слабой размерности n. Впервые подпространства конечной слабой размерности были определены в [9]. Приведем это определение.

Определение 1. *Пусть $O(Q, X)$ — множество ограниченных отображений $f\colon Q \to X$, $\{F_k\} \subset O(Q, X)$ — некоторая совокупность элементов. Элементы F_k называются слабо линейно зависимыми, если для любого ненулевого функционала $G \in X^*$ числовые функции $\langle G, F_k \rangle$ аргумента $x \in Q$ являются линейно зависимыми. В противоположном случае элементы F_k называются слабо линейно независимыми.*

Определение 2. *Говорят, что линейное подпространство H пространства $O(Q, X)$ имеет слабую размерность n, если*:

1) *найдутся n элементов в H, которые слабо линейно независимы*;

2) *любые $n + 1$ элемент из H слабо линейно зависимы.*

В [4] показано, что определенное выше подпространство H_n является множеством существования элемента наилучшего L_1-приближения. Аналогичный факт имеет место для наилучших (α, β)-приближений. Для полноты изложения приведем его с доказательством.

Теорема 4. *Пусть X — KB-пространство. Подпространство H_n пространства $C(Q, X)$ является множеством существования элемента наилучшего (α, β)-приближения для любой функции $g \in C(Q, X)$.*

Доказательство. Пусть $g \in C(Q, X) \setminus H_n$. Для каждого $j \in \mathbf{N}$ существует элемент $p_j(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{(j)} u_i(x)$ из H_n такой, что

$$\| g - p_j \|_{1;\alpha,\beta} < E(g, H_n)_{1;\alpha,\beta} + \frac{1}{j}. \tag{9}$$

Ясно, что

$$\| p_j \|_{1;\beta,\alpha} \le \| g - p_j \|_{1;\alpha,\beta} + \| g \|_{1;\beta,\alpha} < E(g, H_n)_{1;\alpha,\beta} + 1 + \| g \|_{1;\beta,\alpha},$$

т. е. существует постоянная $C \in \mathbf{R}$ такая, что $\int_Q \| p_j(x) \|_{X;\beta,\alpha} d\mu(x) \le C$, а следовательно, существует и постоянная $C_1 \in \mathbf{R}$ такая, что $\int_Q \| p_j(x) \|_X d\mu(x) \le$ $\le C_1$. Поэтому для любого функционала $G \in X^*$ с нормой $\| G \|_{X^*} = 1$

$$\int_Q \left| \sum_{i=1}^n \left\langle G, a_i^{(j)} \right\rangle u_i(x) \right| d\mu(x) = \int_Q \left| \left\langle G, p_j(x) \right\rangle \right| d\mu(x) \le \int_Q \| p_j(x) \|_X d\mu(x) \le C_1,$$

и, следовательно,

$$\exists C_2 \in \mathbf{R}_+ : \quad \forall j \in \mathbf{N} \quad \max_{i=1,\ldots,n} \left| \left\langle G, a_i^{(j)} \right\rangle \right| \le C_2 .$$

Поскольку X^* является полным KN-пространством, то по теореме Банаха – Штейнхауса найдется постоянная $C_3 \in \mathbf{R}_+$ такая, что $\left\| a_i^{(j)} \right\|_X \le C_3$ для всех $i = 1, \ldots, n$; $j \in \mathbf{N}$. Тогда по теореме Бурбаки (см., например, [5, с. 279]) последовательности $\left\{ a_i^{(j)} \right\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, n$, компактны в слабой топологии. Значит, найдется последовательность $j_k \in \mathbf{N}$, $j_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такая, что при любом $i = 1, \ldots, n$ последовательность $\left\{ a_i^{(j_k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к элементу a_i^0 из X, и, следовательно, существует последовательность элементов $p_{j_k}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j_k)} u_i(x)$, слабо сходящаяся при любом $x \in Q$ к элементу $p_0(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(0)} u_i(x)$ из H_n при $k \to \infty$. А так как при этом для любого $x \in Q$ $\left(g(x) - p_{j_k}(x) \right)_{\pm}$ слабо сходится к $\left(g(x) - p_0(x) \right)_{\pm}$, то и $\left| g(x) - p_{j_k}(x) \right|_{\alpha,\beta}$ слабо сходится к $\left| g(x) - p_0(x) \right|_{\alpha,\beta}$ для каждого $x \in Q$. Тогда (см., например, [8, с. 217]) $\varliminf_{k\to\infty} \left\| g(x) - p_{j_k}(x) \right\|_{X;\alpha,\beta} \ge \left\| g(x) - p_0(x) \right\|_{X;\alpha,\beta}$ $\forall x \in Q$, причем нижний предел конечен.

Используя теорему Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\varliminf_{k\to\infty} \left\| g - p_{j_k} \right\|_{1;\alpha,\beta} = \varliminf_{k\to\infty} \int_Q \left\| g(x) - p_{j_k}(x) \right\|_{X;\alpha,\beta} d\mu(x) \ge$$
$$\ge \int_Q \varliminf_{k\to\infty} \left\| g(x) - p_{j_k}(x) \right\|_{X;\alpha,\beta} d\mu(x) \ge \int_Q \left\| g(x) - p_0(x) \right\|_{X;\alpha,\beta} d\mu(x) =$$
$$= \left\| g - p_0 \right\|_{1;\alpha,\beta}.$$

Тогда в силу (9)

$$\left\| g - p_0 \right\|_{1;\alpha,\beta} \le \varliminf_{k\to\infty} \left\| g - p_{j_k} \right\|_{1;\alpha,\beta} \le E(g, H_n)_{1;\alpha,\beta}.$$

Следовательно, $p_0 \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(g)$.

Теорема доказана.

Теперь теорему 2 для подпространства H_n можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2*. *Каждая функция* $f \in C(Q, X)$, *где* X *— строго нормированное* KB*-пространство со строго монотонной нормой, имеет единственный элемент наилучшего* (α, β)*-приближения в* H_n *тогда и только тогда, когда каждая функция* $h \in H'$ *имеет единственный элемент наилучшего* (α, β)*-приближения в* H_n.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2 из [3] и теоремы 5 из [4] на случай несимметричного приближения функций из $C(Q, X)$ элементами подпространства H_n.

Как обычно, через $\omega(u, x)$ обозначим модуль непрерывности функции $u \in C(Q, \mathbf{R})$. В [9] доказано, что для того чтобы $\omega(u, x)$ был неубывающей, непрерывной и полуаддитивной функцией, равной нулю в нуле, необходимо и достаточно, чтобы Q был метрически выпуклым, т. е. для любых точек x_0, $x_1 \in Q$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ существовала точка $x_\lambda \in Q$ такая, что $\rho(x_0, x_\lambda) =$

$= \lambda\cdot\rho(x_0, x_1)$ и $\rho(x_\lambda, x_1) = (1-\lambda)\cdot\rho(x_0, x_1)$. Поэтому далее будем считать Q метрически выпуклым.

Для $g \in C(Q, X)$ положим

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{\|g(x)\|_X}, & x \in Q \setminus Z_g, \\ 0, & x \in Z_g. \end{cases}$$

Пусть также $\omega(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \omega(u_i, x)$, для $x \in Q$ и непустого множества $M \subset Q$

$$E(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y).$$

Положим

$$H'' = \left\{h \in C(Q, X)\colon \exists\, p_h \in H_n \ \ \forall\, x \in Q \ \ h(x) = \pm\bar{p}_h(x)\cdot\omega\big(E\big(x, Z_{p_h}\big)\big)\right\}.$$

Теорема 5. *Пусть X — строго нормированное KB-пространство со строго монотонной нормой, Q — метрически выпуклый компакт. Каждая функция $f \in C(Q, X)$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в H_n тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в H_n.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Пусть каждая функция $h \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения в H_n, но существует $f \in C(Q, X)$ такая, что $p_1 = \sum_{i=1}^n a_i^1 u_i \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(f)$ и $p_2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 u_i \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(f)$, причем $p_1 \neq p_2$.

Как и при доказательстве теоремы 2, полагая

$$f_0(x) = f(x) - \frac{(p_1 + p_2)(x)}{2},$$

получаем, что существует действительная функция $\gamma(x)$ такая, что

$$f_0(x) = \gamma(x)(p_1 - p_2)(x) \quad \forall\, x \in Q \setminus Z_{p_1 - p_2}.$$

Пусть

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\gamma(x)\cdot\big(\overline{p_1 - p_2}\big)(x)\,\omega\big(E\big(x, Z_{p_1 - p_2}\big)\big), & x \in Q \setminus Z_{p_1 - p_2}, \\ 0, & x \in Z_{p_1 - p_2}. \end{cases}$$

В силу (6) $Z_{f_0} \subset Z_{p_1 - p_2}$, поэтому $h \subset H''$, причем $p_h = p_1 - p_2$.

Поскольку модуль непрерывности не убывает и непрерывен, а $Z_{\omega(E(x, Z_{p_1 - p_2}))} \subset Z_{p_1 - p_2}$, как легко видеть,

$$\|(p_1 - p_2)(x)\|_X \le \omega\big(E\big(x, Z_{p_1 - p_2}\big)\big) \sum_{i=1}^n \|a_i^1 - a_i^2\|_X.$$

Следовательно, если $\delta > 0$ достаточно мало, то для каждого $x \in Q \setminus Z_{p_1 - p_2}$

$$h(x) - \delta(p_1 - p_2)(x) = h(x)\left\{1 - \frac{\delta\|(p_1 - p_2)(x)\|_X}{\operatorname{sgn}\gamma(x)\,\omega\big(E\big(x, Z_{p_1 - p_2}\big)\big)}\right\} = h(x)\mu(x),$$

причем функция $\mu(x) > 0$ $\forall\, x \in Q \setminus Z_{p_1 - p_2}$.

Принимая во внимание значение функции f_0, получаем

$$h(x) = \frac{\omega\left(E\left(x, Z_{p_1-p_2}\right)\right)}{|\gamma(x)|\cdot\left\|(p_1-p_2)(x)\right\|_X} f_0(x) \quad \forall\, x \in Q \setminus Z_{p_1-p_2}.$$

Учитывая последнее равенство и свойства функционала $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f, g)$, а также то, что $0 \in P_H^{(\alpha,\beta)}(f_0)$, для каждой функции $p \in H_n$ имеем

$$\int\limits_{Q\setminus Z_{p_1-p_2}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x) - \delta(p_1-p_2)(x), p(x))\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q\setminus Z_{p_1-p_2}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x), p(x))\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q\setminus Z_{f_0}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x), p(x))\, d\mu(x) - \int\limits_{Z_{p_1-p_2}\setminus Z_{f_0}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(f_0(x), p(x))\, d\mu(x) \le$$

$$\le \int\limits_{Z_{f_0}} \| p(x)\|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x) + \int\limits_{Z_{p_1-p_2}\setminus Z_{f_0}} \| p(x)\|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Z_{p_1-p_2}} \| p(x)\|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x).$$

Отсюда следует, что для всех достаточно малых $\delta > 0$ $\delta(p_1-p_2) \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(h)$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть X — строго нормированное KB-пространство со строго монотонной нормой, Q — метрически выпуклый компакт. Каждая функция $h \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего (α,β)-приближения подпространством H_n тогда и только тогда, когда для каждой функции $h \in H''$ нулевой элемент не будет элементом наилучшего (α,β)-приближения подпространством H_n.*

Доказательство. Пусть каждая функция $h \in H''$ имеет только один элемент наилучшего (α,β)-приближения в H_n в метрике L_1, но существует функция $h_1 \in H''$, $h_1 \ne 0$, такая, что $0 \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(h_1)$. Поскольку $h_1 \in H''$, существует элемент $p_1 = \sum_{i=1}^n a_i^1 u_i \in H_n$ такой, что

$$h_1(x) = \pm\, \overline{p}_1(x)\omega\left(E\left(x, Z_{p_1}\right)\right), \quad x \in Q.$$

Ясно, что $Z_{h_1} = Z_{p_1} \subset Z_{p_1-h_1}$.

Учитывая, что

$$\| p_1(x)\|_X \le \omega\left(E\left(x, Z_{p_1}\right)\right) \sum_{i=1}^n \left\| a_i^1 \right\|_X \quad \forall\, x \in Q,$$

получаем, что существует константа $\delta_0 > 0$ такая, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\delta\cdot\| p_1(x)\|_X < \omega\left(E\left(x, Z_{p_1}\right)\right), \quad x \in Q.$$

Как и при доказательстве теоремы 5, получаем, что для каждого $x \in Q \setminus Z_{p_1}$

$$h_1(x) - \delta\, p_1(x) = \mu(x) h_1(x),$$

где $\mu(x)$ — действительная положительная функция.

Учитывая последнее равенство и свойства функционала $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f, g)$, а также то, что $0 \in P_H^{(\alpha,\beta)}(f_0)$, по теореме 1 для каждой функции $p \in H_n$ имеем

$$\int\limits_{Q \setminus Z_{h_1 - \delta p_1}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}\big((h_1 - \delta p_1)(x), p(x)\big)\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q \setminus Z_{h_1 - \delta p_1}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}\big(h_1(x), p(x)\big)\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q \setminus Z_{h_1}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}\big(h_1(x), p(x)\big)\, d\mu(x) - \int\limits_{Z_{h_1 - \delta p_1} \setminus Z_{h_1}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}\big(h_1(x), p(x)\big)\, d\mu(x) \le$$

$$\le \int\limits_{Z_{h_1}} \| p(x) \|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x) + \int\limits_{Z_{h_1 - \delta p_1} \setminus Z_{h_1}} \| p(x) \|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Z_{h_1 - \delta p_1}} \| p(x) \|_{X;\beta,\alpha}\, d\mu(x).$$

Отсюда следует, что $\delta p_1 \in P_{H_n}(h_1)$ для любого $\delta \in (0, \delta_0)$, что противоречит предположению.

Пусть теперь для любой функции $h \in H''$ нулевой элемент не является элементом наилучшего (α, β)-приближения подпространством H_n в метрике L_1, но существует функция $h_0 \in H''$ такая, что $p_1, p_2 \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(h_0)$, $p_1 \ne p_2$.

Тогда $\dfrac{p_1 + p_2}{2} \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(h_0)$ и для всех $x \in Q$ выполняется равенство

$$\big\| (h_0 - p_1)(x) + (h_0 - p_2)(x) \big\|_{X;\alpha,\beta} = \big\| (h_0 - p_1)(x) \big\|_{X;\alpha,\beta} + \big\| (h_0 - p_2)(x) \big\|_{X;\alpha,\beta}.$$

Полагая $H_0 = h_0 - \dfrac{p_1 + p_2}{2}$ и рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что существует действительная функция $\gamma(x)$ такая, что для $x \in Q \setminus Z_{p_1 - p_2}$

$$H_0(x) = \gamma(x) \cdot (p_1 - p_2)(x)$$

и имеет место включение $Z_{h_0 - (p_1 + p_2)/2} \subset Z_{p_1 - p_2}$.

Положим

$$h_1(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \gamma(x) \cdot \big(\overline{p_1 - p_2}\big)(x)\, \omega\big(E\big(x, Z_{p_1 - p_2}\big)\big), & x \in Q \setminus Z_{p_1 - p_2}, \\ 0, & x \in Z_{p_1 - p_2}. \end{cases}$$

Ясно, что $h_1 \in H''$, $Z_{h_1} = Z_{p_1 - p_2}$.

Учитывая свойства функционала $\tau_-^{(\alpha,\beta)}(f, g)$, получаем, что для любой функции $p \in H_n$

$$\tau_-\big(h_1(x), p(x)\big) = \tau_-\big(H_0(x), p(x)\big) \quad \forall\, x \in Q \setminus Z_{p_1 - p_2}.$$

Поскольку $0 \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(H_0)$, согласно теореме 1 для каждой функции $p \in H_n$ имеем

$$\int\limits_{Q\setminus Z_{h_1}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(h_1(x), p(x))\,d\mu(x) = \int\limits_{Q\setminus Z_{h_1}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(H_0(x), p(x))\,d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Q\setminus Z_{H_0}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(H_0(x), p(x))\,d\mu(x) - \int\limits_{Z_{h_1}\setminus Z_{H_0}} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(H_0(x), p(x))\,d\mu(x) \le$$

$$\le \int\limits_{Z_{H_0}} \| p(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x) + \int\limits_{Z_{h_1}\setminus Z_{H_0}} \| p(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x) =$$

$$= \int\limits_{Z_{h_1}} \| p(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x).$$

Таким образом, $0 \in P_{H_n}^{(\alpha,\beta)}(h_1)$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Из теорем 1, 5 и 6 вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть X — строго нормированное KB-пространство со строго монотонной нормой, Q — метрически выпуклый компакт. Каждая функция $f \in C(Q, X)$ имеет единственный элемент наилучшего (α, β)-приближения подпространством H_n тогда и только тогда, когда для каждой функции $h \in H''$ $(h \ne 0)$ существует функция $p \in H_n$ такая, что*

$$\int\limits_{Q\setminus Z_h} \tau_-^{(\alpha,\beta)}(h(x), p(x))\,d\mu(x) > \int\limits_{Z_h} \| p(x)\|_{X;\beta,\alpha}\,d\mu(x).$$

1. *Strauß H.* Eindeutigkeit in der L_1-approximation // Math. Z. – 1981. – S. 63 – 74.
2. *Kroo A.* A general approach to the study of Chebyshev subspaces in L_1-approximation of continuous functions // J. Approxim. Theory. – 1987. – **51**. – P. 98 – 111.
3. *Бабенко В. Ф., Глушко В. Н.* О единственности элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_1 // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 475 – 483.
4. *Бабенко В. Ф., Горбенко М. Е.* О единственности элемента наилучшего L_1-приближения для функций со значениями в банаховом пространстве // Там же. – 2000. – **52**, № 1. – С. 30 – 34.
5. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.
6. *Pinkus A.* L_1-approximation // Cambridge Tracts Math. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 239 p.
7. *Rosema E.* Almost Chebyshev subspaces of $L_1(\mu, E)$ // Pacif. J. Math. – 1974. – **53**. – P. 585 – 604.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.
9. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Аппроксимация непрерывных вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1435 – 1448.

Получено 22.06.06