УДК 514.17+513.83

М. В. Ткачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ КОЛА ТИПУ БЕЗИКОВИЧА – ДАНЦЕРА

The Besicovich – Danzer-type characterization of a circle is investigated in the class of compacts, whose boundary divides a plane on some components.

Исследована характеризация окружности типа Безиковича – Данцера в классе компактов, граница которых делит плоскость на несколько компонент.

В. Мізель поставив питання: чи є вірним твердження про те, що довільна опукла замкнена крива на площині є колом, якщо не існує прямокутника, що має рівно три свої вершини на кривій, а четверту поза нею?

В 1961 р. А. Безикович [1] дав ствердну відповідь на це питання, проте його доведення було досить складним. Пізніше Л. Данцер [2] опублікував геометричне доведення цього твердження і запропонував перевірити, чи має місце твердження при послабленні умови опуклості. Після цього Т. Замфіреску [3] довів твердження для замкненої жорданової кривої, а також послабив умову прямокутника (замість довільних прямокутників розглядаються тільки такі, у яких відношення довжини меншої сторони до довжини більшої не перевищує заданого числа).

У цій статті дане твердження доведено для довільної компактної множини, межа якої розбиває площину на декілька компонент. Вимога компактності множини викликана методом доведення теореми, а без вимоги розбиття площини клас таких множин істотно розширюється. Наприклад, умову $(*)$ задовольняють наступні множини: множина із трьох точок на площині така, що трикутник із вершинами в цих точках є гострокутним; дуга кола, радіанна величина якої менша π; множина $\Lambda = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, |y| \le 1/2\}$; множина раціональних точок на площині.

У подальшому для доведення теореми знадобляться наступні означення.

Означення 1. *Пряма l називається опорною до множини F в точці x на її межі, якщо вона проходить через x і множина F лежить в замкненій півплощині, що обмежена прямою l.*

Означення 2. *Кут p називається опорним до множини F в точці x на її межі, якщо точка x є його вершиною, а множина F лежить у замиканні однієї з компонент, на які кут p розбиває площину, і не лежить в жодній іншій множині, обмеженій кутом із вершиною в точці x.*

Теорема. *Кожна компактна множина σ на площині, що задовольняє умову $(*)$ (якщо три вершини прямокутника належать σ, то й четверта вершина належить σ) і межа якої ділить площину на декілька компонент, є опуклою кривою.*

Доведення. Візьмемо довільні точки $x \in \sigma$ і $y \in \sigma$ такі, що $\rho(x, y) = \max_{t \in \sigma} \rho(x, t)$. Через y проведемо пряму, перпендикулярну прямій xy; ця пряма не перетинає σ за рахунок вибору точки y. Тоді за умовою $(*)$ і пряма l_x, що проходить через точку x перпендикулярно прямій xy, перетинає σ тільки в точці x. Отже, для кожної точки $x \in \sigma$ існує пряма l_x, яка перетинає σ тільки в цій точці. Звідси безпосередньо випливає, що внутрішність σ порожня, а кожна обмежена компонента доповнення до σ є опуклою. Перше твердження є очевидним. Щоб довести друге твердження, припустимо протилежне.

© М. В. ТКАЧУК, 2008

Нехай A — обмежена, неопукла компонента доповнення до σ, точка $a \in \partial A \subset \subset \sigma$ така, що довільна пряма, яка її містить, не є опорною до A. Отже, довільна пряма, що проходить через a, перетинає A, а отже, перетинає $\partial A \subset \sigma$ ще в одній точці. Отримали суперечність.

Нехай A — обмежена компонента доповнення до σ, межа ∂A — опукла крива.

Доведемо, що ∂A не містить точок, через які проходить декілька різних опорних до A прямих. Такі точки далі будемо називати кутовими, інші назвемо регулярними. Точку $y \in \partial A$ назвемо протилежною до точки $x \in \partial A$, якщо пряма xy перпендикулярна прямій T_x, яка опорна до A і проходить через точку x. Пряму xy будемо називати нормаллю до опуклої кривої в точці x. Відповідно, бінормаллю назвемо пряму, що є нормаллю до опуклої кривої у двох точках їхнього перетину. Доведення того, що кожна нормаль опуклої кривої, яка задовольняє умову $(*)$, є бінормаллю, наведене в статті [1], застосовне й у цьому випадку до ∂A.

Припустимо, що x — кутова точка ∂A. Розглянемо множину λ точок $z \in \in \partial A$, протилежних точці x. Розглянемо відображення, яке кожній точці $z \in \in \lambda$ ставить у відповідність пряму $p \perp xz$, $z \in p$, яка є опорною до ∂A в точці z. Отримали неперервне відображення дуги λ на множину опорних елементів до дуги λ опуклої кривої ∂A [4]. Отже, дуга λ не може містити кутових точок, оскільки в цих точках відображення $p(z)$ буде мати розриви. Доведемо, що опорна пряма $p(z)$ у точці z буде дотичною до λ в класичному розумінні цього слова (як граничне положення січної). Відомо, що опуклу криву в околі довільної своєї точки можна подати як графік опуклої функції, вибравши відповідні осі координат. Опукла функція скрізь має похідні справа і зліва, проте в деяких точках вони можуть бути різними [4]. Доведемо, що дотичні до λ справа і зліва в усіх точках будуть збігатися з опорними прямими. Для довільної точки $z_0 \in \lambda$ візьмемо послідовність точок $z_n \in \lambda$, $z_n \to z_0$ справа відносно вибраної орієнтації осей. Пряма $z_n z_0$ прямує до правої дотичної в точці z_0. Внаслідок неперервності відображення $p(z)$ існує точка $t_n \in \bigcup z_0 z_n$ така, що $p(t_n) \| z_0 z_n$. Оскільки $z_n \to z_0$, $t_n \in \bigcup z_0 z_n$, то $t_n \to z_0$, а отже, $p(t_n)$ прямує до правої дотичної в точці z_0, яка збігається з $p(z_0)$. Аналогічно з лівою дотичною. Отже, дуга λ є гладкою дугою, тобто дифеоморфізмом відкритого відрізка на площину. З допомого диференціального числення, врахувавши умову $p(z) \perp xz$, можна довести, що λ є дугою кола. Для довільної точки дуги кола існує її окіл на дузі, симетричний відносно нормалі до дуги в цій точці, а окіл кутової точки x може бути симетричним тільки відносно бісектриси опорного кута (опорні прямі також повинні бути симетричними). Проведемо відмінну від бісектриси опорного кута бінормаль через точку x і внутрішню точку дуги кола, побудуємо прямокутник із двома симетричними відносно бінормалі точками дуги кола і з третьою вершиною в околі точки x. Четверта вершина, симетрична третій, належить σ. Отже, повинен існувати окіл кутової точки x, симетричний відносно даної бінормалі, що неможливо. Отже, і ∂A не містить кутових точок і є гладкою кривою.

Через довільну точку p доповнення до замикання $\mathrm{Cl}\,A$ проходить пряма, опорна до ∂A в точці q. Припустивши, що точка p належить σ, одержимо суперечність з існуванням прямої, що перетинає σ тільки в точці q. Отже, σ є опуклою кривою.

Теорему доведено.

У статті [2] доведено, що опукла крива, яка задовольняє умову $(*)$, є колом, звідки випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Компактна множина* σ *на площині, що задовольняє умову* $(*)$ (*якщо три вершини прямокутника належать* σ, *то й четверта вершина належить* σ) *і межа якої ділить площину на декілька компонент, є колом.*

***Наслідок* 2.** *Компактна множина* τ *в* R^3, *що задовольняє умову* $(*)$ *і межа якої ділить простір* R^3 *на декілька компонент, є сферою.*

Доведення. Оскільки межа τ ділить простір R^3 на декілька компонент, то існує площина така, що перетин τ з цією площиною ділить площину на декілька компонент (ця площина повинна містити внутрішню точку обмеженої компоненти доповнення до τ). Відповідно до наслідку 2 ця множина є колом. Далі, будь-який перетин τ площиною, що проходить через хорду даного кола, також є колом, оскільки довільна точка відкритого круга є внутрішньою для обмеженої компоненти доповнення до τ. Отже, τ є межею зв'язної області Σ в R^3, і кожний перетин τ площиною, що проходить через внутрішність цієї області, є колом. Оскільки Σ разом з двома своїми точками містить відкритий круг, що містить ці точки, то вона містить і відрізок, що з'єднує ці точки, і є опуклою. Отже, опуклим є її замикання. Виберемо на τ дві точки на максимальній відстані одна від одної. Відрізок, що їх з'єднує, не може належати τ (перетин τ площиною є колом), отже, він, за винятком кінців, належить Σ. Всі площини, що проходять через цей відрізок, перетинають τ по колах одного і того ж діаметра. Отже, τ є сферою.

1. *Besicovich A. S.* A problem on a circle // J. London Math. Soc. – 1961. – **36**. – P. 241 – 244.
2. *Danzer L. W.* A characterization of the circle // Convexity: Proc. Symp. Pure Math. – Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1963. – **7**. – P. 99 – 100.
3. *Zamfirescu Tudor.* An infinitesymal version of the Besicovich – Danzer characterization of the circle // Geom. dedic. – 1988. – **27**. – P. 209 – 212.
4. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества: Пер. с нем. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

Одержано 15.03.05,
після доопрацювання — 18.12.07