УДК 515.164.174

І. А. Юрчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

КОМБІНАТОРНІ АСПЕКТИ ТОПОЛОГІЧНОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ ФУНКЦІЙ НА КОЛІ

We prove a necessary and sufficient condition of topological equivalence of smooth functions which are given on a circle and have a finite number of local extrema.

Доказано необходимое и достаточное условие топологической эквивалентности гладких функций, заданных на окружности, с конечным числом локальных экстремумов.

В роботах [1, 2] вивчаються питання класифікації морсифікацій особливостей гладких функцій, топології біфуркаційних діаграм, а також описано їх зв'язки з комбінаторикою. Зокрема, було встановлено, що у випадку, коли число критичних точок дорівнює числу критичних значень функції, що задана на колі, її комбінаторним інваріантом є так звана змія (послідовність додатних цілих чисел, які задовольняють умови $x_0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$). У даній роботі розглянуто загальний випадок гладких функцій на колі, які мають скінченне число локальних екстремумів. Основна мета полягає в побудові комбінаторного інваріанта та встановленні критерію топологічної еквівалентності для функцій з даного класу.

1. Деякі комбінаторні відомості. Нагадаємо кілька означень, які можна знайти в [1, с. 4].

Означення 1. *Змією типу* A_n *називається послідовність додатних цілих чисел* x_i, *що задовольняють умови* $x_0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$, $x_i \neq x_j$, *де* $0 \leq x_i \leq n$.

Послідовність чисел, які задовольняють систему нерівностей $x_0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$ ($x_0 > x_1 < x_2 > \ldots x_n$), називається up down (down up)-послідовністю.

Позначимо через a_n число A_n-змій і запишемо експоненціальну генератрису числа даних змій:

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n / n!. \tag{1}$$

У формулі (1) числа a_n з непарними n утворюють коефіцієнти розкладу секанса та називаються числами Ейлера (позначають через E_i), а з парними n — коефіцієнти розкладу тангенса в ряд Тейлора в нулі і називаються числами тангенса (T_i). Ці числа утворюють трикутник типу Паскаля, з якого знаходять їх значення. Наведемо перші значення чисел T_i:

i	1	2	3	4	5	6
T_i	1	2	16	272	7936	353792

Означення 2. *Елементарною змією типу* L_m^n *назвемо послідовність додатних цілих чисел* x_i, *що задовольняють умови* $x_0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$, $x_i \neq x_j$, *де* $0 \leq x_i \leq m$, $m > n$.

Позначимо число елементарних змій типу L_m^n через l_m^n.

Лема 1. *Число* l_m^n *елементарних змій* L_m^n *дорівнює числу* $C_{m+1}^{n+1} a_n$, *де* a_n *— число* A_n*-змій.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо змію L_m^n: $x_0 < x_1 > > x_2 < \ldots x_n$, $x_i \neq x_j$, де $0 \leq x_i \leq m$, $m > n$. Тоді знайдемо $\min\limits_i \{x_i\} = x_{j_1}$ та покладемо $x_{j_1} = 0$, $\{x_i'\} = \{x_i\} \setminus x_{j_1}$. Далі, знайдемо $\min\limits_i \{x_i'\} = x_{j_2}$ та покладемо $x_{j_2} = 1$, $\{x_i''\} = \{x_i'\} \setminus x_{j_2}$ і т. д. В результаті ми множині $\{x_i\}$ поставимо у відповідність множину $\{0, 1, \ldots, n\}$. Скориставшись умовою $x_i \neq x_j$, отримаємо змію типу A_n. Зрозуміло, що біноміальний коефіцієнт виникає як число можливих варіантів вибору $n+1$ числа з $m+1$, оскільки $m > n$.

Лему доведено.

Означення 3. *Змією типу R_m^n називається послідовність додатних цілих чисел x_i, які задовольняють умови $x_0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$, де $0 \leq x_i \leq m$, $m < < n$, і для будь-якого k, $k \in [0, \ldots, m]$, існує принаймні одне значення i, $i \in \in [0, \ldots \ldots, n]$, таке, що $x_i = k$.*

У випадку, коли $m = n$, число R_m^n-змій дорівнює числу A_n-змій. Позначимо через $\alpha_{m,k}^n$ число R_m^n-змій, в яких $x_0 = 0$ і $k = x_1 - x_0 - 1 = x_1 - 1$.

Твердження 1. *Для будь-яких $n, m \in N$ справджується рівність*

$$\alpha_{m,k}^{n+1} = \sum_{j=m-k-1}^{m-1} \alpha_{m,j}^n + \sum_{j=m-k-1}^{m-2} \alpha_{m-1,j}^n, \tag{2}$$

де $0 \leq k \leq m - 1$.

Доведення. Не обмежуючи загальності, знайдемо значення $\alpha_{m,k}^{n+1}$, де n, $m \in N$, $0 \leq k \leq m-1$. Згідно з позначеннями, це число послідовностей, що задовольняють систему нерівностей

$$0 < k+1 > x_2 < x_3 > \ldots, \tag{3}$$

де $0 \leq x_2 \leq k$. Зауважимо, що число таких послідовностей дорівнює числу послідовностей вигляду

$$x_2 < x_3 > x_4 < \ldots, \tag{4}$$

де $0 \leq x_2 \leq k$. Розглянемо дифеоморфізм $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, який змінює напрям осі, і запишемо (4) у вигляді $x_2' > x_3' < \ldots$, де $m - k \leq x_2' \leq m$. В отриманій системі нерівностей, записавши зліва нуль, одержимо $0 < x_2' > x_3' < \ldots$. Розглянемо дві можливості: якщо існує $x_j' = m$, то їх число дорівнює $\sum_{i=m-k-1}^{m-1} \alpha_{m,i}^n$, в протилежному випадку це число $\sum_{i=m-k-1}^{m-2} \alpha_{m-1,i}^n$. Далі, додавши ці два числа, отримаємо (2). Зазначимо, що остання сума виникає з умови, якщо у послідовності (3) лише $x_0 = 0$, а інші $x_i \neq 0$, а при дифеоморфізмі f нулеві відповідає m.

Наслідок 1. *Для будь-яких $n, m \in N$ справджується рівність* $\alpha_{m,0}^{n+1} = = \alpha_{m,m-1}^n$.

Зрозуміло, що рівність (2) — це рекурентне співвідношення, яке пов'язує число R_m^n-змій з числом R_m^{n+1}-змій. У табл. 1 наведено значення $\alpha_{m,k}^n$ для випадків, коли $n = \overline{2, 6}$.

Позначимо через μ_m^n число R_m^n-змій, для яких тільки $x_0 = 0$, а всі інші $x_i \neq 0$, $i \in [1, \ldots, n]$. Очевидно, що виконується нерівність $\mu_m^n < \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{m,i}^n$.

Таблиця 1

m	n																			
	2		3			4				5					6					
	k																			
	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
1	1		1			1				1					1					
2	0	1	1	2		2	4			4	7				7	12				
3			0	1	1	1	4	5		5	13	16			16	36	45			
4						0	1	2	2	2	9	14	15		15	45	67	74		
5										0	2	4	5	5	5	25	43	54	56	
6															0	5	10	14	16	16
Σ	2		6			22				102					562					

Наслідок 2. *Для будь-яких* $n, m \in N$ *справджується рівність*

$$\mu_{m+1}^{n} = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{m,i}^{n} - \mu_{m}^{n}. \tag{5}$$

Доведення. Побудуємо послідовність $x_0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$, де $x_i \neq 0$, $0 < x_i \leq m+1$, $i \in [1, \ldots, n]$, враховуючи, що $0 < x_1 > x_2 < \ldots x_n$, де $0 \leq x_i \leq m$, $i \in [1, \ldots, n]$, за допомогою додавання числа 1 до всіх членів, крім $x_0 = = 0$. При цьому з числа побудованих послідовностей виключаємо число тих, де не існують $i \in [1, \ldots, n]$, для яких $x_i = 0$, в протилежному випадку в утвореній послідовності не існуватиме $x_i = 1$ і $0 \leq x_i \leq m$. А це рівносильне тому, щоб від числа всіх послідовностей відняти число μ_m^n.

Наслідок доведено.

У табл. 2 наведено значення чисел μ_m^n при $n = 3, \ldots, 9$. Згідно з співвідношенням (5) число $\mu_4^5 = \alpha_{3,0}^5 + \alpha_{3,1}^5 + \alpha_{3,2}^5 - \mu_3^5 = 5 + 13 + 16 - 10 = 24$. Зрозуміло, що $\mu_n^n = a_{n-1}$.

Таблиця 2

m	n						
	3	4	5	6	7	8	9
2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	5	10	18	31	52	86
4		5	24	79	223	579	1432
5			16	122	602	2439	8856
6				61	680	4682	25740
7					272	4155	38072
8						1385	27776
9							7936

Зазначимо, що всі значення чисел $\alpha^n_{m,k}$ та μ^n_m у табл. 1 і 2 отримано аналогічно за допомогою рекурентних співвідношень.

2. Окремі випадки функцій на S^1. Позначимо через S^1 коло, тобто множину комплексних чисел z таких, що $|z| = 1$. Далі будемо розглядати S^1 як диференційовний многовид розмірності 1. Задамо на S^1 орієнтацію і розглянемо довільну *гладку функцію f на S^1 зі скінченним числом локальних екстремумів*. Слід зазначити, що число локальних екстремумів завжди є парним. Позначимо через m_i та M_j, $i, j = \overline{1, n}$, відповідно точки мінімуму та максимуму даної функції. Рухаючись по колу в заданому напрямі та нумеруючи окремо локальні мінімуми та максимуми, отримаємо одну з двох можливих послідовностей, які утворюють локальні екстремуми: $M_1,\ m_1,\ M_2, \ldots, M_n,\ m_n$ або $m_1, M_1, m_2, \ldots, m_n, M_n$. Очевидно, що перша послідовність має місце тоді, коли ми розпочинаємо рух з локального максимуму функції, а друга — з локального мінімуму.

Нагадаємо, що функції f та g, які задані на колі, називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h: S^1 \to S^1$ і $r: R^1 \to R^1$, які зберігають орієнтацію і такі, що $f = r^{-1} \circ g \circ h$.

Означення 4. *Функція f називається спеціальною, якщо в довільних двох локальних екстремумах вона набуває різних значень.*

Зауважимо, що топологічні класифікації функцій Морса загального положення та спеціальних функцій на колі збігаються.

Теорема 1. *Число топологічно нееквівалентних спеціальних функцій f, заданих на S^1, з $2n$ локальними екстремумами дорівнює T_n.*

Доведення. Розглянемо S^1 та спеціальну функцію f, яка має $2n$ локальних екстремумів. Зауважимо, що серед локальних екстремумів завжди існують дві точки глобального мінімуму та максимуму. Не обмежуючи загальності, починаючи з глобального мінімуму та в заданому напрямі на S^1, позначимо локальні екстремуми через $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{2n-1}$ і отримаємо послідовність значень функції $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots, y_{2n-1} = f(x_{2n-1})$, які задовольняють систему нерівностей $y_0 < y_1 > \ldots < y_{2n-3} > y_{2n-2} < y_{2n-1}$. Задамо відображення $y_i \to z_i$, де $i, z_i \in [0, 1, \ldots, 2n-1]$ і z_i дорівнює числу значень y_l таких, що $y_l < y_i$. Числа z_i утворюють up down-послідовність, яка визначає A_{2n-1}-змію. Зауважимо, що це відображення є взаємно однозначним: топологічно нееквівалентним функціям відповідають різні змії і, навпаки, кожна змія реалізує деяку функцію. Отриману змію можемо записати таким чином:

$$0 < z_1 > z_2 < \ldots z_{2n-1}. \tag{6}$$

Позначимо число таких змій через a'_{2n-1}. Очевидно, що виконується нерівність $a'_{2n-1} < a_{2n-1}$. Доведемо, що $a'_{2n-1} = a_{2n-2}$, або, що те ж саме, числу T_n. Запишемо дану систему нерівностей у вигляді

$$z_1 > z_2 < \ldots < z_{2n-1}, \tag{7}$$

де $2 \le z_1 \le 2n-1$, та отримаємо down up-послідовність. Зауважимо, що числа послідовностей (6) та (7) рівні між собою. За допомогою гомеоморфізму осі z, який змінює напрям осі і зберігає порядок, перетворимо (7) у up down-послідовність та отримаємо $z'_0 < z'_1 > \ldots z'_{2n-2}$, де $0 \le z'_0 \le 2n-3$. Звідси випливає, що число послідовностей дорівнює числу a_{2n-2}.

Теорему доведено.

Зауваження **1.** У роботі [2, с. 550] вказано, що число топологічно нееквівалентних спеціальних функцій на колі дорівнює числу E_n, а не T_n.

Зауваження **2.** L. I. Nicolaescu в [3] довів гіпотезу Арнольда про те, що для числа топологічно нееквівалентних функцій Морса загального положення $f: S^2 \to \mathbb{R}$ з $2n+2$ критичними точками справджується рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log g(n)}{n \log n} = 2.$$

Якщо позначити через $G(n)$ число топологічно нееквівалентних спеціальних функцій $f: S^1 \to \mathbb{R}$ з $2n+2$ критичними точками, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log G(n)}{n \log n} = 2.$$

Оскільки $G(n) = T_n$ і для T_n має місце співвідношення $T_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_n$, $B_n \sim \frac{2(2n)!}{2^{2n}\pi^{2n}}$, то запишемо $T_n \sim \frac{2(2^{2n}-1)(2n-1)!}{\pi^{2n}}$ і, згідно з формулою Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log G(n)}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{2(2^{2n}-1)(2n-1)!}{\pi^{2n}}\right)}{n \log n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n \log\left(\frac{2}{\pi}\right) + 2n \log n}{n \log n} + \theta(n) = 2,$$

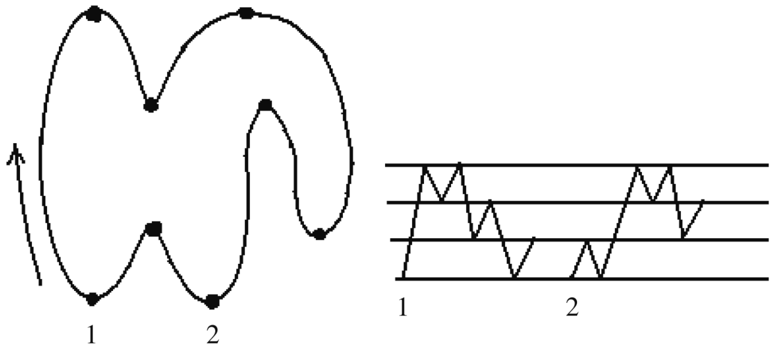
де $\theta(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Твердження 2. *Число топологічно нееквівалентних функцій* f *з* $2n$ *локальними екстремумами, серед яких лише один глобальний мінімум* (*максимум*) *та* k *різних значень, яких набуває функція в даних екстремумах* $(k < 2n)$, *дорівнює* μ_{k-1}^{2n-1}.

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо випадок єдиного глобального мінімуму. Тоді, починаючи з нього, в заданому напрямі на S^1 позначимо локальні екстремуми через $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ і отримаємо наступну послідовність критичних значень функції $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-1}$, серед яких є k різних. Задамо відображення $y_i \to z_i$, де $z_i \in [0, \ldots, k]$ і дорівнює числу критичних значень y_l таких, що $y_l < y_i$. Згідно з умовою, існує єдиний локальний екстремум — мінімум x_0, для якого $z_0 = 0$. Рухаючись по колу в заданому напрямі, утворюємо деяку послідовність цілих чисел $0 < z_1 > z_2 < \ldots \ldots < z_{2n-1}$, де $z_i \neq 0$, $z_i \leq k-1$. Тоді, згідно з означенням, це змія типу R_{k-1}^{2n-1}, до того ж лише $z_0 = 0$, а всі інші $z_i \neq 0$. Число таких змій дорівнює μ_{k-1}^{2n-1}.

Зазначимо, що для доведення твердження у випадку одного глобального максимуму достатньо розглянути функцію $(-f)$.

Зауваження **3.** При знаходженні числа топологічно нееквівалентних функцій у доведенні твердження 2 суттєвим було те, що ми однозначно починали будувати змію з глобального мінімуму. У випадку довільної функції f, заданої на S^1, однозначної відповідності між функцією та змією не існує. Розглянемо одну й ту ж функцію висоти на колі (рисунок), але, починаючи будувати змію з „різних” глобальних мінімумів, ми утворимо різні змії.



Функція з двома глобальними мінімумами та максимумами
і відповідні їй різні змії.

3. Загальний випадок функцій на S^1. Нехай $f: S^1 \to R$ — деяка гладка функція зі скінченним $(2n)$ числом локальних екстремумів, серед яких m глобальних максимумів та k різних значень, яких набуває функція в $2n$ екстремумах $(k < 2n)$. Зрозуміло, що тоді серед локальних екстремумів існує принаймні два, значення функції в яких збігаються. Далі під функцією f будемо розуміти лише таку, що задовольняє вказані вище умови.

Побудуємо комбінаторний інваріант для функції f. Зафіксуємо деякий напрям обходу на колі і позначимо m глобальних максимумів через $x_0, x_1, \dots$ $\dots, x_{m-1}$. Для кожного x_i знайдемо дугу S_i^0 таку, що значення функції y_i в локальних екстремумах дуги S_i^0 є різними. При цьому кінцями даних дуг будуть локальні мінімуми. Нехай $x_{1,i}$ — перший локальний екстремум (мінімум), що лежить на колі за максимумом x_i в напрямі, протилежному до напрямку обходу, а $x^{i,1}$ — перший екстремум (мінімум) в напрямі, що збігається з напрямком обходу, $x_{2,i}$ і $x^{i,2}$ — відповідно другі і т. д. Утворимо послідовність локальних екстремумів $x_{l^i,i}, \dots, x_{1,i}, x_i, x^{i,1}, \dots, x^{i,r^i+1}$, що відповідає глобальному максимуму x_i і належить дузі S_i^0, кінцями якої є $x_{l^i,i}$ і x^{i,r^i+1} (локальні мінімуми). Кожній такій послідовності екстремумів відповідає послідовність значень функції. Оскільки вони є різними і локальний мінімум чергується з локальним максимумом, то має місце система нерівностей $y_{l^i,i} < \dots > y_{1,i} <$ $< y_i > y^{i,1} < \dots < y^{i,r^i}$ (відкинемо значення y^{i,r^i+1}, що відповідає x^{i,r^i+1}), а згідно з означенням це є елементарна змія $L_{k-1}^{l^i+r^i}$. При цьому можливі такі випадки:

C1) $S_j^0 \cap S_{j+1}^0 = \varnothing$;

C2) $S_j^0 \cap S_{j+1}^0 = x^{j,t_2^j+1} = x_{t_1^{j+1},j+1}$;

C3) $S_j^0 \cap S_{j+1}^0 = S_{j,j+1}^0$, де $S_{j,j+1}^0 \subset S_j^0 \cup S_{j+1}^0$.

Найпростішими є випадки C_1 та C_2, в яких дуги, що відповідають глобальним максимумам x_i, або не мають спільних точок, або мають лише одну — локальний мінімум. У випадку C_3 послідовність екстремумів дуги $S_{j,j+1}^0$ можемо записати у вигляді $x^{j,r'}, \dots, x^{j,r^i+1}$ або $x_{l^{j+1},j+1}, \dots, x_{l',j+1}$, де $x_{k,j+1} \in S_{j+1}^0$,

$x^{j,k} \in S_j^0$. Зрозуміло, що значення функції в цих локальних екстремумах утворюють елементарну змію.

Тоді з двох даних дуг утворимо три, одна з яких $S_{j,j+1}^0$, а інші дві такі, що $S_j^0 \setminus S_{j,j+1}^0$ і $S_{j+1}^0 \setminus S_{j,j+1}^0$. Перепозначимо отримані дуги і запишемо наступне розбиття: $\Gamma_0 = \bigcup_{i=0}^{n} \tilde{S}_i^0$ (зрозуміло, що в загальному випадку $n \geq m-1$).

Далі, розглянемо $S^1 \setminus \Gamma_0 = \bigcup \gamma_i^0$, де $\bigcap \gamma_i^0 = \varnothing$. Для кожної з дуг γ_i^0 знайдемо локальні максимуми, значення функції в яких є найбільшим, та утворимо розбиття дуг γ_i^0 на $\Gamma_1^i = \bigcup_s S_{i,s}^1$, де кожній дузі $S_{i,s}^1$ відповідає елементарна змія, утворена значеннями функції в локальних екстремумах, які їй належать. Далі розглянемо $S^1 \setminus \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1^i = \gamma_i^1$ та за аналогією для кожної з дуг γ_i^1 знайдемо локальні максимуми, значення функції в яких є найбільшим, і т. д. Оскільки число локальних екстремумів є скінченним, то за деяке число кроків ми розіб'ємо коло S^1 на дуги $\tilde{S}_i$, яким відповідають елементарні змії $L_{k-1}^{a_i}$. Слід зазначити, що для довільної пари сусідніх дуг $\tilde{S}_{i-1}$ та $\tilde{S}_i$ має місце умова C_2.

Означення 5. *$\Omega(f)$-розбиттям кола, що відповідає деякій функції f, назвемо його розбиття на дуги S_i з кінцями в локальних мінімумах і такі, що значення функції в локальних екстремумах даних дуг утворюють елементарні змії $L_{k-1}^{a_i}$.*

Лема 2. *Для довільної функції f існує і до того ж єдине, з точністю до циклічного порядку дуг S_i, $\Omega(f)$-розбиття.*

Доведення випливає з наведених вище міркувань та однозначності побудови $\Omega(f)$-розбиття.

Означення 6. *Два розбиття $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ кола назвемо ізоморфними ($\Omega(f) \sim \Omega(g)$), якщо:*

1) *для довільної дуги $S_i \subset \Omega(f)$ існує єдина дуга $S'_j \subset \Omega(g)$ така, що відповідні їм елементарні змії $L_{k-1}^{a_i}$ та $L_{k-1}^{b_j}$ збігаються;*

2) *циклічний порядок відповідних дуг розбиттів $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ збігається.*

Теорема 2. *Дві функції f та g на колі топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\Omega(f) \sim \Omega(g)$.*

Доведення. *Необхідність* випливає з леми 2 та означення топологічної еквівалентності.

Достатність. Нехай f та g — деякі функції на колі такі, що $\Omega(f) \sim \Omega(g)$, де $\Omega(f)$ і $\Omega(g)$ — розбиття кола, що їм відповідають. Доведемо, що функції f та g топологічно еквівалентні. Зрозуміло, що число дуг для $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$ одне й те ж, покладемо його рівним q. Оскільки набори чисел $\{a_i\}$ і $\{b_j\}$ збігаються, то числа локальних екстремумів функцій f та g, які визначаються за допомогою рівностей $\sum_i a_i + q$ та $\sum_j b_j + q$ відповідно, рівні між собою.

Не обмежуючи загальності, розглянемо $S_0 \subset \Omega(f)$. Тоді згідно з означенням існує $S'_i \subset \Omega(g)$ така, що $L_{k-1}^{a_0} = L_{k-1}^{\prime b_i}$ і $a_0 = b_i$.

Запишемо наступні дві послідовності, що утворені елементарними зміями: $(L_{k-1}^{a_0}, L_{k-1}^{a_1}, \ldots, L'^{a_q}_{k-1})$ та $(L'^{b_i}_{k-1}, L'^{b_{i+1}}_{k-1}, \ldots, L'^{b_{i-1}}_{k-1})$. Зрозуміло, що вони збігаються і $f \sim g$.

Теорему доведено.

Знайдемо верхню оцінку числа $N(f, g)$ топологічно нееквівалентних функцій із заданим інваріантом: $\Omega(f) = L_{k-1}^{t_0}, L_{k-1}^{t_1}, \ldots, L_{k-1}^{t_q}$. Згідно з лемою 1 $l_{k-1}^{t_i} = C_k^{t_i+1} a_{t_i}$. Проте слід зауважити, що, по-перше, вибір значення t_{i+1} з набору $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ для змії $L_{k-1}^{t_{i+1}}$ залежить від вибору чисел, що утворюють попередню змію $L_{k-1}^{t_i}$, тому число таких можливостей менше за коефіцієнт $C_k^{t_i+1}$. І по-друге, не всі змії типу A_{t_i} можливі, оскільки положення останнього максимуму змії $L_{k-1}^{t_i}$ залежить від положення першого мінімуму наступної змії $L_{k-1}^{t_{i+1}}$. Тому, врахувавши циклічний порядок $q+1$ числа дуг на колі, отримаємо оцінку зверху

$$\Theta(q) = q! C_k^{t_0+1} a_{t_0} C_k^{t_1+1} a_{t_1} \ldots C_k^{t_q+1} a_{t_q}. \tag{8}$$

Лема 3. *Для числа* $N(f, q)$ *топологічно нееквівалентних функцій із заданим інваріантом* $\Omega(f) = L_{k-1}^{t_0}, L_{k-1}^{t_1}, \ldots, L_{k-1}^{t_q}$ *виконується* $N(f, q) < \Theta(q)$, *де число* $\Theta(q)$ *задовольняє рівність* (8).

Зауважимо, що $N(f, q) = \Theta(q)$ у випадку, коли $q = 1$, тобто f є спеціальною функцією.

4. Висновки. В даній статті побудовано комбінаторний інваріант гладких функцій, заданих на колі, зі скінченним число локальних екстремумів. Розглянуто випадок, коли число критичних значень функції не дорівнює числу локальних екстремумів. Інваріантом такої функції є $\Omega(f)$-розбиття кола S^1 на дуги S_i, значення функції в їх локальних екстремумах утворюють елементарні змії. Доведено, що необхідною та достатньою умовою топологічної еквівалентності функцій f та q, заданих на колі, є ізоморфізм розбиттів $\Omega(f)$ та $\Omega(g)$, що їм відповідають.

1. *Арнольд В. И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, вып. 1 (283). – С. 3 – 45.
2. *Arnold V. I.* Bernoulli – Euler updown numbers, associated with function singularities, their combinatorics and a mathematics // Duke Math. J. – 1991. – **63**, № 2. – P. 537 – 555.
3. *Nicolaescu L. I.* Morse functions statistics // arXiv: math.GT/0604437 vI 20 Apr 2006.

Одержано 23.08.06,
після доопрацювання — 27.04.07