УДК 517.5

А. Л. Шидліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАСИЧЕННЯ ЛІНІЙНИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є У ПРОСТОРАХ S^p_φ

We consider the problem of the saturation, in the spaces S^p_φ, of linear summation methods for Fourier series, which are determined by the sequences of functions defined on a subset of the space $\mathbb{C}$. We obtain sufficient conditions for the saturation of such methods in these spaces.

Рассматривается вопрос насыщения в пространствах S^p_φ линейных методов суммирования рядов Фурье, которые задаются произвольными последовательностями функций, определенных на некотором подмножестве пространства $\mathbb{C}$. Установлены достаточные условия насыщения таких методов в этих пространствах.

1. Вступ. У роботі продовжується вивчення загальних питань теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ, яке було розпочате в роботах [1 – 4].

Простори S^p_φ було введено О. І. Степанцем у роботі [5] (див. також [6]), і вони означаються таким чином. Нехай $\mathfrak{X}$ — довільний лінійний комплексний простір, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фіксована зчисленна система в ньому і для будь-якої пари $x,\ y \in \mathfrak{X}$, в якій хоча б один із елементів належить до φ, визначено операцію $(\cdot\,,\cdot)$, що задовольняє умови:

1) $(x, y) = \overline{(x, y)}$,

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — довільні числа,

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$

тобто визначено скалярний добуток елементів простору $\mathfrak{X}$ на елементи системи φ.

Кожному елементу $f \in \mathfrak{X}$ ставлять у відповідність систему чисел $\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, і при даному фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглядають множини

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X}) = \left\{ f \in \mathfrak{X} \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}.$$

При цьому елементи $x,\ y \in S^p_\varphi$ вважаються тотожними, якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Таким чином, простори S^p_φ породжуються простором $\mathfrak{X}$, системою φ, скалярним добутком $(\cdot\,,\cdot)$ і числом $p \in (0, \infty)$.

Для довільних елементів $x,\ y \in S^p_\varphi$ покладають

$$\rho(x, y)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нульовим елементом простору S^p_φ називається елемент θ, для якого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Величина $\rho(\theta, f)$, $f \in S^p_\varphi$, називається φ-нормою елемен-

© А. Л. ШИДЛІЧ, 2008

та f і позначається $\|f\|_p$, тобто

$$\|f\|_p = \|f\|_{\varphi,p} = \rho(\theta, f)_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Відомо (див., наприклад, [5]), що множина S_φ^p утворює лінійний простір. Крім того, при $p \geq 1$ функціонал $\|\cdot\|_p$, означений рівністю (1), задовольняє всі аксіоми норми, а при $p \in (0, 1)$ — аксіоми квазінорми. Тому при $p \geq 1$ S_φ^p — лінійний нормований простір, а при $p \in (0, 1)$ — простір із квазінормою.

Наявність у просторі $\mathfrak{X}$ системи φ зі вказаними властивостями дозволяє кожному елементу $f \in \mathfrak{X}$ ставити у відповідність його формальний ряд Фур'є за цією системою вигляду

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \tag{2}$$

який у тригонометричному випадку є звичайним рядом Фур'є функції $f \in L$. Тому задачі, що досліджуються в роботі, можна трактувати як задачі про підсумовування узагальнених рядів Фур'є, що означаються рівністю (2).

У роботах [1 – 4] вивчалися лінійні методи підсумовування рядів Фур'є вигляду (2), які задаються нескінченними трикутними числовими матрицями Λ. Зокрема, в [1] було означено поняття насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S_φ^p, встановлено достатні умови насиченості, а також необхідні та достатні умови збіжності таких методів в S_φ^p. В [4] показано, що насиченість лінійного методу, а також порядок насичення не залежать від вибору параметрів $\mathfrak{X}$, φ та p, що визначають простір $S_\varphi^p(\mathfrak{X})_\varphi$. У роботах [2, 3] знайдено точні значення найкращих n-членних наближень лінійними методами q-еліпсоїдів у просторах S_φ^p при всіх $0 < p$, $q < \infty$. Ці величини пов'язані з величинами найкращих n-членних наближень, які в просторах S_φ^p вивчалися в роботах [5 – 9] і які можна розглядати в цих просторах як найкращі n-членні наближення методом частинних сум Фур'є.

В даній роботі розглядаються загальні питання теорії лінійних методів підсумовування, що задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій підмножині множини комплексних чисел $\mathbb{C}$.

2. Загальні питання теорії лінійних методів підсумовування рядів Фур'є. Нехай $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність функцій, що залежать від параметра r, який визначений на деякій підмножині $M \subset \mathbb{C}$, що має єдину точку скупчення r_0.

Далі обмежимося випадком, коли послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ задовольняє умову

$$\lambda_k(r) \leq K, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

де K — деяка величина, яка може залежати від r, але не залежить від k, а простір S_φ^p є повним. Тоді кожному елементу $f \in S_\varphi^p$ на основі його розкладу (2) в ряд Фур'є за системою φ при будь-якому $r \in M$ можна поставити у відповідність елемент $U_r(f; \Lambda) \in S_\varphi^p$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$S[U_r(f;\Lambda)] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(r) \hat{f}_\varphi(k) \varphi_k, \tag{4}$$

тобто такий, що

$$\widehat{U_r(f;\Lambda)}_\varphi(k) = \big(U_r(f;\Lambda), \varphi_k\big) = \lambda_k(r)\hat{f}_\varphi(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

У такому випадку довільна послідовність функцій Λ, які задовольняють умову (3), задає метод побудови елементів $U_r(f;\Lambda)$ або, іншими словами, конкретну сукупність операторів $U_r(f;\Lambda)$, які відображають повний метричний простір S_φ^p в себе. В такому разі також кажуть, що послідовність функцій Λ визначає конкретний лінійний метод (Λ-метод) підсумовування рядів Фур'є.

У випадку, коли параметр $r = n$ змінюється на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел, а точка скупчення $r_0 = \infty$, послідовності Λ утворюють нескінченні прямокутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, які відповідають так званим прямокутним Λ-методам підсумовування рядів Фур'є. Якщо ж при цьому $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = 0$ для довільного $k > n$, то методи підсумовування, породжені такою послідовністю (матрицею) Λ, називають трикутними Λ-методами (див., наприклад, [10, 11]).

У випадку, коли $\lambda_k(r)$ — функції, які залежать від неперервного параметра r, Λ-метод називають континуальним.

Наведемо кілька прикладів Λ-методів.

1. Якщо послідовність Λ така, що

$$\lambda_k(r) = \left(\frac{\sin(k-1)r}{(k-1)r}\right)^h, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad h > 0, \quad r_0 = 0, \quad \lambda_1(r) \equiv 1,$$

то ряди $S[U_r(f;\Lambda)]$ мають вигляд

$$S[U_r(f;\Lambda)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(k-1)r}{(k-1)r}\right)^h \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k.$$

Такий метод називають *методом Рімана*.

2. Методу Абеля – Пуассона відповідає послідовність функцій $\lambda_k(r) = r^{k-1}$, $0 < r < 1$, $r_0 = 1$. Ряди $S[U_r(f;\Lambda)]$ в цьому випадку мають вигляд

$$S[U_r(f;\Lambda)] = \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \overset{\mathrm{df}}{=} S[P_r(f)]. \tag{5}$$

3. Якщо послідовність (матриця) Λ така, що

$$\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то елементи $U_r(f;\Lambda) = U_n(f;\Lambda)$ збігаються з частинними сумами $S_n(f)$ порядку n ряду (2). Згідно з прийнятою термінологією такий метод називають *методом частинних сум Фур'є*.

4. Метод середніх арифметичних (*метод Фейєра*) визначається матрицею Λ, в якій $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = 1 - \dfrac{k-1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, і $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$. Елементи $U_n(f; \Lambda)$ в цьому методі називаються *сумами Фейєра* і мають вигляд

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(f).$$

5. У випадку, коли $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = \cos\dfrac{(k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, і $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$, $U_r(f; \Lambda)$ збігаються з поліномами, що відповідають *методу Рогозинського*. При цьому

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_\varphi(k) \cos\frac{(k-1)\pi}{2n}\varphi_k = R_n(f).$$

6. Якщо $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = 1 - \left(\dfrac{k-1}{n}\right)^s$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $s > 0$, і $\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$, то

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{(k-1)}{n}\right)^s\right)\hat{f}_\varphi(k)\varphi_k = Z_n^{(s)}(f).$$

Поліноми $Z_n^{(s)}(f)$ називають *сумами Зигмунда*. При $s = 1$ суми Зигмунда збігаються з сумами Фейєра $\sigma_n(f)$.

7. Якщо

$$\lambda_k(r) = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n-q, \\ 1 - \dfrac{k-n+q}{q+1}, & k = n-q+1, \ldots, n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то

$$U_r(f; \Lambda) = U_n(f; \Lambda) = \frac{1}{q+1}\sum_{k=n-q}^{n} S_k(f) = V_{n-q}^{n}(f).$$

Такий метод називається *методом Валле Пуссена*, а поліноми $V_{n-q}^{n}(f)$ — сумами *Валле Пуссена*. Якщо $q = 0$, то $V_{n-q}^{n}(f) = V_n^n(f) = S_n(f)$, якщо $q = n-1$, то $V_{n-q}^{n}(f) = V_1^n(f) = \sigma_n(f)$.

У зв'язку із заміною ряду Фур'є (2) функції f рядом (4) природно постає питання про регулярність лінійних методів у просторах S_φ^p, тобто питання про те, які умови повинна задовольняти послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$, щоб виконувалася рівність

$$\lim_{r \to r_0} \| f - U_r(f; \Lambda)\|_p = 0 \tag{6}$$

для всіх функцій $f \in S_\varphi^p(\mathfrak{X})$ незалежно від вибору параметрів $\mathfrak{X}$, φ та $p \in [1, \infty)$, які визначають простір $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$. Вичерпна відповідь на поставлене питання випливає з основних теорем функціонального аналізу:

для того щоб виконувалось співвідношення (6) *для всіх елементів* $f \in$

$\in S^p_\varphi(\mathfrak{X})$, *необхідно і достатньо, щоб при кожному фіксованому* k, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{r\to r_0} \lambda_k(r) = 1$$

і, крім того, послідовність чисел

$$L_r(\Lambda) = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|U_r(f;\Lambda)\|_p = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k(r)| \tag{7}$$

була обмеженою:

$$L_r(\Lambda) = O(1), \qquad r \to r_0.$$

Величини вигляду (7) інколи називають (див., наприклад, [11, с. 18]) *константами Лебега* даного методу $U_r(\Lambda)$.

3. Постановка задачі про насичення, означення насичення та отримані результати. Нехай $U_r(\Lambda)$ — довільний Λ-метод, який породжує елементи $U_r(f;\Lambda)$, ряди Фур'є яких мають вигляд (4). Якщо при деякому $k_0 \in \mathbb{N}$ виконується співвідношення

$$\lim_{r\to r_0} \frac{\|f - U_r(f;\Lambda)\|_p}{\left|1 - \lambda_{k_0}(r)\right|} = 0, \tag{8}$$

то $\hat f_\varphi(k_0) = 0$. Дійсно, оскільки згідно з (1)

$$\|f - U_r(f;\Lambda)\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat f_\varphi(k)\right|^p |1 - \lambda_k(r)|^p \ge \left|1 - \lambda_{k_0}(r)\right|^p \left|\hat f_\varphi(k_0)\right|^p, \tag{9}$$

то співвідношення (8) виконується лише тоді, коли $\hat f_\varphi(k_0) = 0$.

Звідси випливає, що коли для даного методу $U_r(\Lambda)$ має місце (8) для всіх k починаючи з деякого номера k_1, то елемент $f = \sum_{k=1}^{k_1 - 1} \hat f_\varphi(k)\varphi_k$ є поліномом порядку не вище k_1. Зокрема, якщо при цьому $k_2 = 2$, то $f = \hat f_\varphi(1)\varphi_1$. Це означає, що порядок прямування до нуля величини $\|f - U_r(f;\Lambda)\|_p$ при $r \to r_0$ не може перевищувати максимального порядку прямування до нуля будь-якої з різниць $1 - \lambda_k(r)$, $k = 1, 2, \ldots$. Наприклад, для сум Фейєра $1 - \lambda_k(r) = 1 - \lambda_k^{(n)} = \dfrac{k-1}{n}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, тоді $\min\limits_{k=2,3,\ldots,n} \left(1 - \lambda_k^{(n)}\right) = n^{-1}$. Тому співвідношення

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p = o\left(n^{-1}\right), \quad n \to \infty,$$

виконується лише у випадку, коли $f = \hat f_\varphi(1)\varphi_1$. Тобто довільний елемент $f \ne \hat f_\varphi(1)\varphi_1$ за допомогою сум Фейєра можна наблизити з точністю не вище $O\left(n^{-1}\right)$:

$$\|f - \sigma_n(f)\|_p > Kn^{-1},$$

де K — деяка стала, що не залежить від n.

У випадку наближення методом Абеля – Пуассона

$$\|f - P_r(f)\|_p > K(1 - r), \qquad 0 < r < 1, \quad f \ne \hat f_\varphi(1)\varphi_1;$$

у випадку наближення сумами Зигмунда

$$\left\|f - Z_n^{(s)}(f)\right\|_p > Kn^{-s}, \quad f \ne \hat f_\varphi(1)\varphi_1.$$

У зв'язку з цим в теорії лінійних методів виникла задача про насичення, яка полягає в тому, щоб для конкретного лінійного методу за властивостями елементів послідовності Λ визначити найкращий порядок $\nu_\Lambda(r)$ прямування до нуля при $r \to r_0$ величини $\| f - U_r(f;\Lambda)\|_X$, який може бути досягнутий для даного методу в лінійному нормованому просторі X, і описати найширший клас елементів, на якому порядки наближень даним методом збігаються з $\nu_\Lambda(r)$.

Поняття насичення лінійних методів було введено Ж. Фаваром у 1947 р. в роботі [12] (див. також [13]). Проте ще в 1941 р. Д. Алексіч [14] показав, що для сум Фейєра співвідношення $\| f(\cdot) - \sigma_n(f;\cdot)\|_{C_{2\pi}} = O\big(n^{-1}\big)$ виконується тоді і лише тоді, коли $\tilde{f} \in \mathrm{Lip}(C_{2\pi};1)$. Доведення того важливого факту, що для цих сум із співвідношення $\| f(\cdot) - \sigma_n(f;\cdot)\|_{C_{2\pi}} = o\big(n^{-1}\big)$ випливає, що $f(x) = \mathrm{const}$ (який якраз встановлює насиченість методу Фейєра), було наведено А. Зигмундом у [15].

У подальшому цю тематику розвивали М. Заманський, Г. Суноучі, К. Ватарі, Ф. І. Харшиладзе, А. Х. Турецький, П. Бутцер, Р. Нессель та ін.

В роботі О. І. Степанця та В. Т. Гаврилюк [16] було сформульовано основні твердження, які характеризують властивість насичення у просторах C та L_p лінійних методів, що породжуються довільними нескінченними трикутними числовими матрицями. У просторах S^p_φ питання насичення таких лінійних методів вивчалося у роботах [1, 4], де, зокрема, було означено поняття насичення лінійних методів, а також показано, що насиченість лінійного методу і порядок насичення не залежать від вибору параметрів $\mathfrak{X}$, φ та p, що визначають простір $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$.

У цьому пункті встановимо аналогічні твердження для лінійних методів, які задаються довільними послідовностями функцій, визначених на деякій підмножині з $\mathbb{C}$.

Існують різні, хоча і близькі за змістом, означення поняття насичення (див., наприклад, [10] (гл. VIII), [16], [17], ч. V). Зокрема, в роботі [16] було сформульовано наступне означення насичення лінійного методу для просторів C та L_p, $p \in [1,\infty)$.

Означення А. *Нехай* X *— один із просторів* C *або* L_p, $p \in [1,\infty)$, *і* $U_n(\Lambda)$ *— лінійний метод підсумовування рядів Фур'є, який породжує поліноми* $U_n(f;x;\Lambda)$ *вигляду*

$$U_n(f;x;\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Якщо існує додатна монотонно спадна до нуля функція $\varphi_\Lambda(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *така, що із співвідношення*

$$\| f(x) - U_n(f;x;\Lambda)\|_X = o(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \to \infty, \tag{10}$$

випливає, що $f(x) \equiv \mathrm{const}$ *при* $X = C$, $f(x) = \mathrm{const}$ *майже скрізь при* $X = L_p$ *і знайдеться принаймні одна функція* $f(\cdot)$, *відмінна від сталої, для якої*

$$\| f(x) - U_n(f;x;\Lambda)\|_X = O(\varphi_\Lambda(n)), \quad n \to \infty, \tag{11}$$

то кажуть, що метод $U_n(\Lambda)$ *є насиченим у просторі X. Множина* $\Phi(\Lambda)_X$ *всіх функцій, для яких виконується співвідношення* (11), *називається класом* *насичення, а функція* $\varphi_\Lambda(n)$ — *порядком насичення.*

Інколи вимагається (див., наприклад, [10]), щоб із співвідношення (10) випливало, що функція $f(x)$ належить деякій скінченновимірній множині, або ж, як у монографії [17], що функція $f(x)$ є так званим інваріантним елементом для сім'ї операторів $U_n(f; x; \Lambda)$.

Здебільшого означення властивості насичення відрізняються одне від одного лише тим, як у них вводиться поняття інваріантного елемента. Наприклад, в означенні A інваріантними елементами даного лінійного методу є функції $f(x) \equiv \text{const}$ при $X = C$ і $f(x) = \text{const}$ майже скрізь при $X = L_p$. Однак згідно з таким означенням метод Валле Пуссена (нагадаємо, що в цьому випадку

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n - q, \\ 1 - \dfrac{k - n + q}{q + 1}, & k = n - q + 1, \ldots, n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

де $q = q(n)$ — деякий цілий параметр, $0 \le q(n) \le n - 1$, який може залежати від n) не є насиченим при будь-якому виборі параметра q. З іншого боку, у випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q(n)}{n} = 1$ і $n - q(n) = c_n < c \ne 0$, будь-яку функцію f, що не є тригонометричним поліномом порядку меншого за c_n, можна наблизити сумами Валле Пуссена з точністю не вище $O\left(n^{-1}\right)$. Тобто в цьому випадку метод Валле Пуссена дає наближення таке ж саме, як і метод Фейєра, який, як відомо, є насиченим. У зв'язку з цим в роботі [1] (див. також [4]) було означено насиченість лінійного методу (у випадку, коли послідовності Λ утворюють нескінченні трикутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k(r)\} = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$) так, щоб воно охоплювало якомога більше лінійних методів, які в певному розумінні мають цю властивість, і зокрема, метод Валле Пуссена у розглянутому вище випадку.

В цьому пункті розповсюдимо це поняття на випадок довільної послідовності функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$.

Для довільного $\delta > 0$ через $O_\delta(r_0)$ позначимо δ-окіл точки r_0 в множині M:

$$O_\delta(r_0) = \{r \in M : |r - r_0| < \delta\} \quad \text{при} \quad r_0 < \infty$$

і

$$O_\delta(r_0) = \{r \in M : |r| \ge \delta\} \quad \text{при} \quad r_0 = \infty.$$

Для даної послідовності функцій Λ розглянемо множину B_Λ всіх натуральних чисел k, для яких існує функція $\delta_\Lambda = \delta_\Lambda(k)$ така, що $\lambda_k(r) = 1$ для всіх $r \in O_{\delta_\Lambda}(r)$, тобто

$$B_\Lambda = \left\{k \in \mathbb{N} : \exists \delta_\Lambda(k) : \lambda_k(r) = 1, \ r \in O_{\delta_\Lambda}(r)\right\}.$$

Елемент f простору S_φ^p називається *інваріантним елементом методу* $U_r(\Lambda)$, якщо його коефіцієнти Фур'є $\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k)$ дорівнюють нулю принаймні для всіх $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$.

Множину всіх інваріантних елементів методу $U_r(\Lambda)$ у просторі S_φ^p позначимо через $F_\Lambda\left(S_\varphi^p\right)$. Легко бачити, що будь-який лінійний метод $U_r(\Lambda)$ має у просторі S_φ^p хоча б один інваріантний елемент. Таким є, зокрема, нульовий елемент простору S_φ^p.

Зауваження **1.** У випадку, коли при деяких параметрах $\mathfrak{X}$, p та φ множина $F_\Lambda\big(S_\varphi^p(\mathfrak{X})\big)$ збігається з усім простором $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$, виконується рівність $B_\Lambda = \mathbb{N}$, і навпаки, якщо $B_\Lambda = \mathbb{N}$, то $F_\Lambda\big(S_\varphi^p(\mathfrak{X})\big) = S_\varphi^p(\mathfrak{X})$ для будь-яких $\mathfrak{X}$, p та φ.

Оскільки для методів Фейєра, Рімана, Абеля – Пуассона, Рогозинського та Зигмунда $\lambda_k^{(n)} \neq 1$ для всіх $k = 2, 3, \ldots$, то $B_\Lambda = \{1\}$, і інваріантними елементами цих методів у S_φ^p будуть елементи $f \in S_\varphi^p$, які можна подати у вигляді $f = \hat{f}_\varphi(1)\varphi_1$.

Означення 1. *Лінійний метод $U_r(\Lambda)$ називається насиченим у просторі $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$, $p \in [1, \infty)$, якщо існує додатна монотонно спадна до нуля при $r \to r_0$ функція $\nu_\Lambda(r)$, для якої виконуються такі умови*:

1) *із співвідношення*

$$\| f - U_r(f; \Lambda)\|_p = o(\nu_\Lambda(r)), \quad r \to r_0, \tag{12}$$

випливає, що $f \in F_\Lambda\big(S_\varphi^p(\mathfrak{X})\big)$;

2) *існує принаймні один елемент $f \in S_\varphi^p(\mathfrak{X}) \setminus F_\Lambda\big(S_\varphi^p(\mathfrak{X})\big)$, для якого при всіх $r \in M$ виконуються співвідношення*

$$\| f - U_r(f; \Lambda)\|_p = O(\nu_\Lambda(r)), \quad r \to r_0. \tag{13}$$

Функція $\nu_\Lambda(r)$ називається порядком насичення, а множина $\Phi(\Lambda)_p$ всіх елементів простору $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$, для яких виконується (13), — *класом насичення методу $U_r(\Lambda)$.*

Означення 2. *Якщо для даного методу не існує додатної монотонно спадної до нуля при $r \to r_0$ функції $\nu_\Lambda(r)$, що задовольняє умови означення* 1, *то кажуть, що цей метод не є насиченим у просторі S_φ^p.*

У випадку, коли послідовності Λ утворюють нескінченні прямокутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k(r)\} = \big\|\lambda_k^{(n)}\big\|$ $(r_0 = \infty)$, з даних означень можна легко отримати означення поняття насичення, сформульовані в роботах [1, 4].

Наступна теорема вказує на інваріантність поняття насичення лінійного методу відносно просторів $S_\varphi^p(\mathcal{X})$.

Теорема 1. *Якщо лінійний метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$ при даних фіксованих параметрах $\mathfrak{X}$, p, φ з порядком насичення $\nu_\Lambda(r)$, то даний метод є насиченим і у просторах $S_{\varphi'}^{p'}(X')$ для будь-яких інших параметрів X', p', φ' з тим самим порядком насичення $\nu_\Lambda(r)$.*

Доведення. Нехай лінійний метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(n)$ і для деякого елемента $f \in S_{\varphi'}^{p'}(X')$ виконується співвідношення

$$\| f - U_r(f; \Lambda)\|_{p'} = o(\nu_\Lambda(r)), \quad r \to r_0. \tag{12$'$}$$

Покажемо, що тоді $f \in F_\Lambda\big(S_{\varphi'}^{p'}(X')\big)$, тобто $\hat{f}_{\varphi'}(k_0) = 0$ для будь-якого $k_0 \in \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$.

За означенням співвідношення ($12'$) виконується тоді і лише тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх $r \in O_\delta(r_0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1-\lambda_k(r)|^{p'}}{\nu_\Lambda(r)^{p'}} \left|\hat{f}_{\varphi'}(k)\right|^{p'} < \varepsilon. \tag{14}$$

Зафіксуємо довільне $k_0 \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ і розглянемо елемент φ_{k_0}. Зрозуміло, що φ_{k_0} не є інваріантним елементом методу $U_r(\Lambda)$ у просторі $S^p_\varphi(X)$, тобто $\varphi_{k_0} \in S^p_\varphi \setminus F_\Lambda$, і оскільки метод є насиченим в $S^p_\varphi(X)$, то

$$\left\|\varphi_{k_0} - U_r(\varphi_{k_0}; \Lambda_0)\right\|_p \neq o(\nu_\Lambda(r)), \quad r \to r_0.$$

Це означає, що існує стала $C_{k_0} > 0$ така, що для будь-якого δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, знайдеться число $r = r(\delta_1) \in O_{\delta_1}(r_0)$, для якого виконується співвідношення

$$\frac{\left\|\varphi_{k_0} - U_r(\varphi_{k_0}; \Lambda_0)\right\|_p}{\nu_\Lambda(r)} = \frac{\left|1-\lambda_{k_0}(r)\right|}{\nu_\Lambda(r)} \geq C_{k_0} > 0.$$

Звідси внаслідок довільності ε випливає, що нерівність (14) виконується лише у випадку, коли $\hat{f}_{\varphi'}(k_0) = 0$. Таким чином, показано, що для будь-якого $k_0 \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ коефіцієнт $\hat{f}_\varphi(k_0) = 0$, тобто $f \in F_\Lambda\left(S^{p'}_{\varphi'}(X')\right)$, і умова 1 означення 1 для простору $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ виконується.

Покажемо тепер, що умова 2 означення 1 у просторі $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ також виконується. Оскільки метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$, то існує $f \in S^p_\varphi(\mathfrak{X}) \setminus F_\Lambda\left(S^p_\varphi(\mathfrak{X})\right)$, для якого правильним є співвідношення (13), причому $\hat{f}_\varphi(k_1) \neq 0$ хоча б для одного $k_1 \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$. Покладемо $f = \hat{f}_\varphi(k_1)\varphi'_{k_1}$. Тоді $f \in S^{p'}_{\varphi'}(X') \setminus F_\Lambda\left(S^{p'}_{\varphi'}(X')\right)$ і виконується співвідношення

$$\| f_1 - U_r(f_1; \Lambda)\|_{p'} \leq \| f - U_r(f; \Lambda)\|_p = O(\nu_\Lambda(r)), \quad r \to r_0,$$

тобто умова 2 для простору $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ також виконується, і лінійний метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим у просторі $S^{p'}_{\varphi'}(X')$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(r)$.

Теорему доведено.

Для формулювання достатніх умов насичення введемо ще деякі позначення. Нехай $\psi_k = \psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, — послідовність комплексних відмінних від нуля чисел, $\psi(k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо через ψS^p_φ множину всіх елементів $f \in S^p_\varphi$, для яких виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\psi(k)|^p} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p < \infty. \tag{15}$$

Теорема 2. *Якщо для даної послідовності функцій* Λ *множина* B_Λ *не збігається з усією множиною* $\mathbb{N}$ *і існує додатна монотонно спадна до нуля при* $r \to r_0$ *функція* $\nu_\Lambda(r)$ *така, що при всіх* $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$

$$\lim_{r \to r_0} \frac{1-\lambda_k(r)}{\nu_\Lambda(r)} = \frac{c}{\psi_0(k)}, \quad \textit{де} \quad \psi_0(k) > 0, \quad |c| > 0, \tag{16}$$

то:

1) *метод* $U_r(\Lambda)$ *є насиченим в усіх просторах* $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$, *незалежно від вибору параметрів* X, p, φ, *з порядком насичення* $\nu_\Lambda(r)$;

2) *справедливе вкладення*

$$\Phi(\Lambda)_p \subseteq \psi S^p_\varphi, \tag{17}$$

де послідовність $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^\infty$ *така, що при* $k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ $\psi(k) = \psi_0(k)$, *а при* $k \in B_\Lambda$ $|\psi(k)| \geq K_0 > 0$, *де* K_0 — *деяка стала*;

3) *якщо ж при цьому існує окіл* $O_\delta(r_0)$, *який міститься в усіх околах* $O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$: $O_\delta(r_0) \subset O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$, $k \in B_\Lambda$, *і виконується умова*

$$\mu_k(r) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\psi_0(k)\,|1-\lambda_k(r)|}{\nu_\Lambda(r)} \leq K_1, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda, \quad r \in O_{\delta_1}(r_0), \tag{18}$$

де $O_{\delta_1}(r_0)$ — *деякий окіл з* $O_\delta(r_0)$, *то є правильною рівність*

$$\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi. \tag{19}$$

Зауваження 2. Окіл $O_\delta(r_0)$, який міститиметься в усіх околах $O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$, $k \in \mathbb{N}$, буде існувати, зокрема, у випадку скінченної множини B_Λ.

У випадку, коли послідовності Λ утворюють нескінченні трикутні матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k(r)\} = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$ $(r_0 = \infty)$, дане твердження доведено в [1]; якщо ж множина B_Λ містить лише один елемент, то його можна отримати із результатів монографії [17] (ч. V).

Доведення. За теоремою 1 для доведення даного твердження достатньо переконатися, що метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим в $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$ хоча б при одному виборі параметрів X, φ та p. Зафіксуємо довільним чином параметри X, φ та p і покажемо, що за виконання умов теореми даний метод є насиченим у просторі $S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X})$.

Згідно з (9), якщо $\lambda_k(r) \neq 1$, то для будь-якого елемента $f \in S^p_\varphi$

$$0 \leq \left|\hat{f}_\varphi(k)\right| \leq \frac{\|f - U_r(f;\Lambda)\|_p}{|1-\lambda_k(r)|} = \frac{\nu_\Lambda(r)}{|1-\lambda_k(r)|}\frac{\|f - U_r(f;\Lambda)\|_p}{\nu_\Lambda(r)}. \tag{20}$$

Якщо виконуються співвідношення (12) і (16), то права частина (20) прямує до нуля при $r \to r_0$. Це означає, що $\hat{f}_\varphi(k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \setminus B_\Lambda$. Звідси випливає, що f — інваріантний елемент методу $U_r(\Lambda)$.

Нехай k_0 — довільне число із множини $\mathbb{N} \setminus B_\Lambda$ і $f_0 = \varphi_{k_0}$. Зрозуміло, що f_0 — неінваріантний елемент методу $U_r(\Lambda)$. Враховуючи (16), отримуємо

$$\|f_0 - U_r(f_0;\Lambda)\|_p = \left\|\nu_\Lambda(r)\frac{1-\lambda_{k_0}(r)}{\nu_\Lambda(r)}\varphi_{k_0}\right\|_p =$$

$$= \nu_\Lambda(r)\frac{\left|1-\lambda_{k_0}(r)\right|}{\nu_\Lambda(r)} \leq C_{k_0}\,\nu_\Lambda(r),$$

де C_{k_0} — деяка стала.

Це означає, що метод $U_r(\Lambda)$ є насиченим у просторі S^p_φ, $p \in (0,\infty)$, і порядок насичення цього методу $\nu_\Lambda(r)$.

Переконаємось тепер у правильності вкладення (17). Для цього розглянемо довільний елемент $f \in S^p_\varphi$, який задовольняє співвідношення (13), і покажемо, що цей елемент належить множині ψS^p_φ, тобто справджується співвідношення (15).

З означення послідовності $\psi_k = \psi(k)$ випливає, що для кожного $f \in S^p_\varphi$

$$\sum_{k\in B_\Lambda} \frac{1}{|\psi(k)|^p} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \le \frac{1}{K_0} \sum_{k\in B_\Lambda} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \le \frac{\|f\|_p^p}{K_0} < \infty,$$

і для доведення (15) досить показати, що справджується співвідношення

$$\sum_{k\in \mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{1}{|\psi(k)|^p} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p < \infty. \tag{21}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли множина $\mathbb{N}\setminus B_\Lambda$ є скінченною, останнє співвідношення виконується, а тому виконується і співвідношення (15).

Нехай тепер множина $\mathbb{N}\setminus B_\Lambda$ містить нескінченну кількість елементів. Для довільного натурального числа m покладемо $A_m = [1; m] \bigcap (\mathbb{N}\setminus B_\Lambda)$ і розглянемо частинну суму порядку не вище m ряду в (21):

$$\sum_{k\in A_m} \left|\frac{\hat{f}_\varphi(k)}{\psi(k)}\right|^p. \tag{22}$$

Нехай $k \in A_m$ — довільне число. Внаслідок (16) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta_k = \delta(\varepsilon, k) > 0$ таке, що для всіх $r \in O_{\delta_k}(r_0)$ $\lambda_k(r) \ne 1$ і справджується нерівність

$$\frac{\nu_\Lambda(r)}{\psi_0(k)|1-\lambda_k(r)|} < \frac{1}{|c|} + \varepsilon. \tag{23}$$

Покладемо $\delta_* = \min\limits_{k\in A_m} \delta_k$. Тоді нерівність (23) буде справджуватись для довільного $r \in O_{\delta_*}(r_0)$ при всіх $k \in A_m$.

Помноживши чисельник та знаменник кожного доданка суми (22) на величину $\dfrac{|1-\lambda_k(r)|^p}{\nu^p_\Lambda(r)}$, де $k \in A_m$, $r \in O_{\delta_*}(r_0)$, на підставі (23), (13) та означення послідовності ψ_k отримаємо

$$\sum_{k\in A_m} \left|\frac{\hat{f}_\varphi(k)}{\psi(k)}\right|^p = \sum_{k\in A_m} \frac{\left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p}{\psi_0^p(k)} = \sum_{k\in A_m} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p}{\nu^p_\Lambda(r)} \frac{\nu^p_\Lambda(r)}{\psi_0^p(k)|1-\lambda_k(r)|^p} \le$$

$$\le (1/|c|+\varepsilon)^p \sum_{k\in A_m} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p}{\nu^p_\Lambda(r)} \le K_2,$$

тобто співвідношення (21) виконується, а тому виконуються співвідношення (15) і вкладення (17).

Переконаємось нарешті, що у випадку, коли всі околи $O_{\delta_\Lambda(k)}(r_0)$ містять деякий окіл $O_\delta(r_0)$ і виконуються умови теореми, правильним є і протилежне включення:

$$\Phi(\Lambda)_p \supseteq \psi S^p_\varphi, \tag{24}$$

тобто для довільного елемента f, який задовольняє співвідношення (15), виконується нерівність (13).

Дійсно, в цьому випадку для всіх $r \in O_\delta(r_0)$ і $k \in B_\Lambda$ $\lambda_k(r) = 1$. Звідси випливає, що

$$\sum_{k\in B_\Lambda} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \le \max_{r\in M\setminus O_\delta(r_0)} \max_{k\in B_\Lambda} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \|f\|_p^p = K_3. \qquad (25)$$

Крім того, на підставі співвідношень (15) та (18) при будь-якому $r \in O_{\delta_1}(r_0)$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p}{\nu_\Lambda^p(r)} = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{\left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p}{\psi_0^p(k)} \frac{|1-\lambda_k(r)|^p\, \psi(k)^p}{\nu_\Lambda^p(r)} \le$$

$$\le K_1^p \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_\Lambda} \frac{\hat{f}_\varphi(k)}{\psi(k)} = K_4. \qquad (26)$$

З (25) та (26) випливає, що при $K = K_3 + K_4$ для всіх $r \in O_{\delta_1}(r_0)$ виконується нерівність

$$\|f - U_r(f;\Lambda)\|_p \le K\nu_\Lambda(r),$$

тобто $f \in \Phi(\Lambda)_p$ і справджується вкладення (24).

Об'єднуючи співвідношення (24) та (17), отримуємо (19).

Теорему доведено.

***Зауваження* 3.** При формулюванні даної теореми у роботах [1, 4] було пропущено умову (18).

4. Приклади. Як вже зазначалось, питання насичення в S_φ^p лінійних методів підсумовування рядів Фур'є, що задаються трикутними нескінченними числовими матрицями, розглядалися у роботах [1, 4]. Зокрема, було показано, що, як і в періодичному випадку, методи Зигмунда, Рогозинського, Фавара, а також метод Валле Пуссена, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n} = 1$ і $n - q(n) \to c_n < c$, є насиченими в усіх просторах $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$ незалежно від вибору параметрів $\mathfrak{X}$, φ та p. Для цих методів вказано порядки та класи насичення. Також показано, що метод Валле Пуссена в усіх інших випадках не є насиченим в $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$.

У цьому пункті встановимо, чи мають властивість насичення деякі відомі лінійні методи, що задаються послідовностями функцій, визначених на деякій підмножині з $\mathbb{C}$.

4.1. Узагальнений метод Абеля – Пуассона визначається послідовністю функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ таких, що

$$\lambda_k(r) = r^{(k-1)^s}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s > 0, \quad 0 < r < 1, \quad r \to 1.$$

Цей метод є насиченим в усіх просторах $S_\varphi^p(\mathfrak{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - r$, $\Phi(\Lambda)_p = \psi S_\varphi^p$, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-s}, & k = 2, 3, \ldots, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Дійсно, оскільки в даному випадку

$$\lim_{r\to 1} \frac{1-\lambda_k(r)}{\nu_\Lambda(r)} = (k-1)^{-s}, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$, величини $\mu_k(r)$ обмежені (що легко перевірити), то згідно з теоремою 2 метод є насиченим з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - r$ і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$.

У випадку, коли $s = 1$, елементи $U_r(f;\Lambda)$ цього методу збігаються з операторами $P_r(f)$, які означаються рівністю (5) і відповідають звичайному *методу Абеля – Пуассона*. Звідси випливає, що даний метод також є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - r$, причому клас насичення $\Phi(\Lambda)_p$ збігається з множиною ψS^p_φ, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-1}, & k = 2, 3, \ldots, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

4.2. Метод Рімана задається послідовністю функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$, які визначаються рівностями

$$\lambda_k(r) = \left(\frac{\sin(k-1)r}{(k-1)r}\right)^h, \quad k = 2, 3, \ldots, \qquad \lambda_1(r) \equiv 1, \quad h > 0, \quad r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad r \to 0.$$

Даний метод є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \left(\frac{\sin r}{r}\right)^h$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-2}, & k = 2, 3, \ldots, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Дійсно, в цьому випадку

$$\lim_{r\to 1} \frac{1 - \lambda_k(r)}{\nu_\Lambda(r)} = (k-1)^2, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$, а величини $\mu_k(r)$ є обмеженими. Тому на підставі теореми 2 метод є насиченим з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \left(\frac{\sin r}{r}\right)^h$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$.

4.3. Бігармонічний метод Абеля – Пуассона. В цьому випадку послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ така, що

$$\lambda_k(r) = \left(1 + \frac{k-1}{2}\left(1 - r^2\right)\right) r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad 0 < r < 1, \quad r \to 1.$$

Цей метод також є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \frac{r}{2}\left(3 - r^2\right)$, причому клас насичення $\Phi(\Lambda)_p$ збігається з множиною ψS^p_φ, де $\psi(k) \equiv 1$, тобто $\Phi(\Lambda)_p = S^p_\varphi$.

Дійсно, на підставі теореми 2, оскільки

$$\lim_{r\to 1} \frac{1 - \lambda_k(r)}{\nu_\Lambda(r)} = 1, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$, а величини $\mu_k(r)$ обмежені, метод є насиченим в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$ з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - \frac{r}{2}\left(3 - r^2\right)$, і $\Phi(\Lambda)_p = S^p_\varphi$.

4.4. Метод модуля неперервності. Послідовність функцій $\Lambda = \{\lambda_k(r)\}$ цього методу визначається рівностями

$$\lambda_k(r) = e^{i(k-1)(1-r)}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad 0 < r < 1, \quad r \to 1.$$

Цей метод насичений в усіх просторах $S^p_\varphi(\mathfrak{X})$, $1 \le p < \infty$, з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - e^{i(1-r)}$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$, де

$$\psi(k) = \begin{cases} (k-1)^{-1}, & k = 2, 3, \ldots, \\ 1, & k = 1. \end{cases}$$

Справді, оскільки в цьому випадку

$$\lim_{r\to 1} \frac{1-\lambda_k(r)}{\nu_\Lambda(r)} = k-1, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

$B_\Lambda = \{1\}$ і величини $\mu_k(r)$ обмежені, то за теоремою 2 метод є насиченим з порядком насичення $\nu_\Lambda(r) = 1 - e^{i(1-r)}$, і $\Phi(\Lambda)_p = \psi S^p_\varphi$.

1. *Шидліч А. Л.* Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 215 – 232.
2. *Степанець О. І., Шидліч А. Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами у просторах S^p_φ // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1107 – 1126.
3. *Шидліч А. Л.* Найкращі n-членні наближення Λ-методами у просторах S^p_φ // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 283 – 306.
4. *Шидліч А. Л.* Про насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є у просторах S^p_φ // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 33 – 138.
5. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ. – Киев, 2000. – 52 с. – (Препринт/ НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений // Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. 2. – С. 303 – 405.
7. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
8. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
9. *Рукасов В. И.* Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Там же. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.
11. *Степанец А. И.* Методы теории приближений // Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. 1. – С. 15 – 111.
12. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions d'une variable reele // Anal. Harmon. Colloq. Int. Cent. Nat. Rech. Sci. – 1949. – **15**. – P. 97 – 100.
13. *Favard J.* Sur la saturation des procedes de summation // J. math. pures et appl. – 1957. – **36**, № 4. – P. 359 – 372.
14. *Alexets G.* Sur l'otdre de grandeur de l'approximation d'une function par les moyennes de sa serie de Fourier // Mat. es Fis. Lapok. – 1941. – **48**. – P. 410 – 433.
15. *Zygmund A.* The approximation functions by typical of their Fourier series // Duke Math. J. – 1945. – **12**, № 4. – P. 695 – 704.
16. *Гаврилюк В. Т., Степанец А. И.* Вопросы насыщения линейных методов // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 291 – 308.
17. *Butzer P., Nessel R.* Fourier analysis and approximation. One-dimensional theory. – Basel; New York, 1971. – 554 p.

Одержано 11.06.07