УДК 517.518.4

П. В. Задерей, Е. Н. Пелагенко, О. В. Иващук
(Киев. нац. ун-т технологий и дизайна)

ОБ УСЛОВИЯХ ТИПА СИДОНА – ТЕЛЯКОВСКОГО ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

For the trigonometric series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}, \quad a_k \to 0, \quad k \to \infty,$$

given on $[-\pi, \pi)^m$, where V is some polyhedron in R^m, we prove that the inequality

$$\int_{T^m} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} \right| dx \le C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k|,$$

holds if the coefficients a_k satisfy the following conditions of the Sidon – Telyakovskii type:

$$A_k \to 0, \quad |\Delta a_k| \le A_k \quad \forall k \ge 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty.$$

Показано, що для тригонометричних рядів вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}, \quad a_k \to 0, \quad k \to \infty,$$

що задані на $[-\pi, \pi)^m$, де V — деякий поліедр у R^m, виконується нерівність

$$\int_{T^m} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} \right| dx \le C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k|,$$

якщо коефіцієнти a_k задовольняють умови типу Сідона – Теляковського

$$A_k \to 0, \quad |\Delta a_k| \le A_k \quad \forall k \ge 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty.$$

Пусть V — замкнутый ограниченный полиэдр в R^m с вершинами в точках с рациональными координатами, звездный относительно начала координат, являющегося его внутренней точкой, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через начало координат; $nV = \{x \in R^m : x/n \in V\}$ — гомотет V. Множество полиэдров с указанными свойствами обозначим через W.

Пусть Z^m — целочисленная решетка в R^m.

Обозначим через $L_1(T^m)$ пространство определенных на T^m 2π-периодических интегрируемых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \int_{T^m} |f(x)|\, dx < \infty,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $T^m = [-\pi, \pi)^m = [-\pi, \pi) \underbrace{\times \ldots \times}_{m} [-\pi, \pi)$.

В данной работе исследуется сходимость кратных тригонометрических рядов вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}, \tag{1}$$

где $x \in T^m$, $l \in Z^m$, $(l, x) = l_1 x_1 + \ldots + l_m x_m$, коэффициенты которых стремятся к нулю при $k \to \infty$ и удовлетворяют условиям типа Сидона – Теляковского: существуют числа A_k такие, что

$$A_k \to 0, \quad k \to \infty,$$

для всех $k \geq 0$

$$|\Delta a_k| \leq A_k, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty. \tag{3}$$

Приведем некоторые результаты, относящиеся к рассматриваемой задаче.

В работе [1] (теорема А) установлено, что если коэффициенты ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{4}$$

можно представить в виде

$$a_k = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{p_m}{m} \sum_{i=k}^{m} \alpha_i, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $|\alpha_i| \leq 1$ и $\sum_{m=1}^{\infty} |p_m| < \infty$, то ряд (4) является рядом Фурье.

С. А. Теляковский в работе [2] (теорема 1) придал условиям (5) более удобный вид, а именно, показал, что они эквивалентны условиям: $a_k \to 0$, $k \to \infty$, и существуют такие числа A_k, что

$$A_k \downarrow 0, \quad |\Delta a_k| \leq A_k \quad \forall\, k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty. \tag{6}$$

При этом получена оценка

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Здесь и далее через C будем обозначать абсолютные положительные константы, возможно, разные в разных формулах.

Кроме того, в [2] (теорема 2) показано, что для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \tag{7}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям (6), равномерно относительно $p = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\frac{\pi}{p+1}}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx\right|dx = \sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|}{k} + O\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_k\right).$$

При этом (7) является рядом Фурье в том и только в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k} < \infty.$$

Условия (6) называют условиями Сидона – Теляковского.

Ю. Л. Носенко [3] обобщил результаты работы [2] на случай двойных рядов (из косинусов, синусов и косинусов, а также синусов). Сходимость двойных тригонометрических рядов в [3] понимается в смысле Принсгейма.

Обширная библиография, посвященная интегрируемости кратных тригонометрических рядов, имеется в [4].

В работе О. И. Кузнецовой [5] (теорема 2.1) доказано, что ряд (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям Сидона – Теляковского (6), сходится почти всюду на T^m к некоторой функции $f \in L_1(T^m)$, является ее рядом Фурье и справедлива оценка

$$\int\limits_{T^m}\left|a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{l\in kV\setminus(k-1)V}e^{i(l,x)}\right|dx \le C\sum_{k=0}^{\infty}A_k.$$

Целью работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть коэффициенты* a_k *ряда* (1) *стремятся к нулю при* $k \to \to \infty$ *и удовлетворяют условиям* (2), (3). *Тогда ряд* (1) *сходится почти всюду на* T^m *к некоторой функции* $f \in L_1(T^m)$, *является ее рядом Фурье и справедлива оценка*

$$\int\limits_{T^m}\left|a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{l\in kV\setminus(k-1)V}e^{i(l,x)}\right|dx \le C\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta A_k|, \tag{8}$$

а равенство

$$\lim_{n\to\infty}\|f - S_n(f)\|_1 = 0,$$

где

$$S_n(f,x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\sum_{l\in kV\setminus(k-1)V}e^{i(l,x)}$$

— *последовательность частных сумм ряда* (1), *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}a_n\ln^m n = 0. \tag{9}$$

Замечание. В теореме последовательность $\{A_k,\ k \ge 0\}$ стремится к нулю не обязательно монотонно в отличие от условий (6) и, кроме того, указано необходимое и достаточное условие сходимости в среднем кратных тригонометрических рядов вида (1).

При доказательстве будем использовать прием, предложенный С. А. Теляковским в [6].

Покажем сначала, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ сходится. Поскольку ряд $\sum_{j=k}^{\infty} \Delta A_j$ сходится к A_k, то

$$A_k = \sum_{j=k}^{\infty} \Delta A_j . \tag{10}$$

Следовательно, используя преобразование Абеля и условие (3), находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, \Delta A_k \le \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty. \tag{11}$$

Из (2) и (11) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty. \tag{12}$$

Зафиксируем натуральное n и к конечной сумме

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}$$

применим преобразование Абеля $(a_{-1} := 0)$:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_{kV}(x) + a_n D_{nV}(x),$$

где

$$D_{kV}(x) := \sum_{l \in kV} e^{i(l,x)}$$

— ядра Дирихле, соответствующие множеству V.

Поскольку последовательность $\{D_{nV}(x),\ n \ge 0\}$ ограничена почти всюду на T^m [5] (лемма 2.4) и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, для почти всех $x \in T^m$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k D_{kV}(x), \tag{13}$$

из которого, в силу сходимости ряда (12), следует сходимость ряда (1) почти всюду на T^m. Обозначим сумму ряда (1) через $f(x)$.

Перейдем теперь к доказательству неравенства (8) и, следовательно, суммируемости функции $f(x)$.

Заметим, что для всех $k \ge 0$

$$\alpha_k := \left| \frac{\Delta a_k}{A_k} \right| \le 1,$$

почти для всех $x \in T^m$ и для любого $k \ge 0$

$$\alpha_k D_{kV}(x) \le C_x < \infty, \tag{14}$$

где константа C_x зависит от x.

Рассмотрим частную сумму ряда в правой части равенства (13):

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta a_k D_{kV}(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \alpha_k D_{kV}(x)$$

и выполним преобразование Абеля $(A_{-1} := 0)$

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta a_k D_{kV}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k \sum_{j=0}^{k} \alpha_j D_{jV}(x) + A_n \sum_{k=0}^{n} \alpha_k D_{kV}(x) := S_1 + S_2.$$

Из (14) следует, что для почти всех $x \in T^m$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D_{kV}(x) \leq C_x(n+1). \tag{15}$$

Используя неравенство (15) и соотношение (10), для почти всех $x \in T^m$ при $n \to \infty$ получаем

$$S_2 = \sum_{j=n}^{\infty} \Delta A_j \sum_{k=0}^{n} \alpha_k D_{kV}(x) \leq C_x \sum_{j=n}^{\infty} (j+1)\left|\Delta A_j\right| \to 0. \tag{16}$$

В силу сходимости ряда в правой части равенства (13) и оценки (16) имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta A_k \sum_{j=0}^{k} \alpha_j D_{jV}(x). \tag{17}$$

Используя представление функции (17), а также оценку [5] (лемма 2.3)

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{k} \alpha_j D_{jV}(x) \right| dx \leq Ck, \tag{18}$$

находим

$$\int_{T^m} |f(x)| dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta A_k| \int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{k} \alpha_j D_{jV}(x) \right| dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k|.$$

Осталось показать, что условие (9) является критерием сходимости ряда (1) в метрике пространства $L_1(T^m)$.

Применяя метод А. Н. Колмогорова [7] для доказательства сходимости в среднем ряда (1), получаем

$$\| f - S_n(f) \|_1 = \int_{T^m} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} \right| dx = \int_{T^m} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta a_k D_{kV}(x) - a_{n+1} D_{nV}(x) \right| dx. \tag{19}$$

Покажем, что интеграл от первой суммы в последнем равенстве (19) стремится к нулю при $n \to \infty$. Выполняя преобразование Абеля и используя оценку (18), находим

$$\int_{T^m} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta a_k D_{kV}(x) \right| dx = \int_{T^m} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \alpha_k D_{kV}(x) \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{T^m} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta A_k \sum_{j=0}^{k} \alpha_j D_{jV}(x) \right| dx + A_{n+1} \int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{n} \alpha_j D_{jV}(x) \right| dx \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\,|\Delta A_k| + A_{n+1}(n+1)\right) \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\,|\Delta A_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty}|\Delta A_k|(n+1)\right) \to 0 \qquad (20)$$

при $n \to \infty$.

На основании (20) соотношение (19) можно записать так:

$$\|f - S_n(f)\|_1 = |a_{n+1}| \int_{T^m} |D_{nV}(x)|dx + o(1).$$

Известно [8], что для любого полиэдра V существуют константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \ln^m n \leq \int_{T^m} |D_{nV}(x)|dx \leq C_2 \ln^m n.$$

Теорема доказана.

В настоящее время известны другие условия интегрируемости кратных тригонометрических рядов вида (1) [9]. Однако полученные в этой работе условия в некоторых случаях более удобны в применении.

Рассмотрим следующий пример. Пусть для любых $n,\ p > 0$ таких, что $n/p = O(1)$, коэффициенты $a_k = \lambda_k^{(n)}$, где

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n-p-1, \\ \dfrac{n-k+1}{p+1}, & n-p \leq k \leq n, \\ 0, & k \geq n+1. \end{cases}$$

Выберем коэффициенты $A_k^{(n)}$ следующим образом:

$$A_k^{(n)} := \Delta\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-p-1, \\ \dfrac{1}{p+1}, & n-p \leq k \leq n, \\ 0, & k \geq n+1. \end{cases} \qquad (21)$$

Покажем, что последовательность $\{A_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Действительно, из (21) следует, что $A_k^{(n)} \to 0$ при $k \to \infty$ и $\left|\Delta\lambda_k^{(n)}\right| \leq A_k^{(n)}$ для всех $k \geq 0$. Проверим выполнение условия (3). Используя (21), находим

$$\Delta A_k^{(n)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-p-2, \\ -\dfrac{1}{p+1}, & k = n-p-1, \\ 0, & n-p \leq k \leq n-1, \\ \dfrac{1}{p+1}, & k = n, \\ 0, & k \geq n+1. \end{cases}$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta A_k^{(n)}\right| = \frac{2n-p+1}{p+1} \leq C$$

сходится.

Таким образом, коэффициенты $a_k = \lambda_k^{(n)}$ удовлетворяют условиям теоремы.

Рассмотрим ряд (1) с коэффициентами $a_k = \lambda_k^{(n)}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}. \tag{22}$$

Применяя теорему, получаем

$$\int_{T^m} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} \right| dx \le C.$$

Заметим, что ряд (22) является ядром порядка n с индексом $n-p$ метода суммирования Валле Пуссена:

$$V_n^{n-p}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}.$$

Следствие. *Для любой функции* $f \in L_1(T^m)$ *с рядом Фурье вида* (1) *ядра Валле Пуссена* $V_n^{n-p}(f;x)$ *порядка* n *с индексом* $n-p$, *где* n, $p > 0$, $n/p = O(1)$, *ограничены*:

$$\left\| V_n^{n-p}(f) \right\|_1 \le C.$$

1. *Sidon S.* Hinreichende Bedingungen für den Fourier-Charakter einer Trigonometrischen Reihe // J. London Math. Soc. – 1939. – **14**, № 5. – P. 158 – 160.
2. *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1973. – **14**, № 3. – С. 317 – 328.
3. *Носенко Ю. Л.* Об условиях типа Сидона интегрируемости двойных тригонометрических рядов // Теория функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 132 – 149.
4. *Задерей П. В.* Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 340 – 365.
5. *Кузнецова О. И.* Константы Лебега и аппроксимативные свойства линейных средних кратных рядов Фурье: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 1985. – 115 с.
6. *Теляковский С. А.* Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **164**. – С. 180 – 188.
7. *Kolmogorov A. N.* Sur l’ordre be grandeur des coefficients de la serie be Fourier – Lebesgue // Bull. Acad. pol. sci. (A). – 1923. – P. 83 – 86.
8. *Подкорытов А. Н.* Порядок констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестн. Ленингр. ун-та. Мат., мех., астрон. – 1982. – **7**. – С. 110 – 111.
9. *Кузнецова О. И.* Об одном классе N-мерных тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 3. – С. 402 – 406.

Получено 16.02.07