А. Н. Шарковский, В. Н. Шевело

Развитие теории дифференциальных уравнений в Институте математики АН УССР

Институт математики АН УССР с самого начала своей научной деятельности уделял большое внимание развитию теории дифференциальных уравнений и внес фундаментальный вклад в ряд ее разделов.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Линейные уравнения. Значительное внимание уделялось исследованию систем с периодическими, квазипериодическими и почти периодическими коэффициентами. Ю. А. Митропольский и А. М. Самойленко показали, что с помощью последовательных замен, обеспечивающих квадратичную сходимость, почти каждую систему с квазипериодическими коэффициентами, достаточно мало отличающимися от постоянных, можно привести к системе с постоянными коэффициентами (1967—1969 гг.). Системы с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра, изучал И. З. Штокало. Путем сведения исходной системы к системе с постоянными коэффициентами и последующего разложения детерминантов Гурвица по степеням малого параметра он установил критерии устойчивости, разработал алгоритм построения приближенных решений и указал оценки погрешности. Для таких систем И. З. Штокало развил операционный метод построения решений (1943—1952 гг.). Для различных классов систем с малым параметром при производной, а также для сингулярно-возмущенных интегральных уравнений В. С. Королюк построил асимптотические разложения, учитывающие пограничный слой (1963—1977 гг.).

М. Г. Крейн в ряде работ исследовал вопросы существования и распределения зон устойчивости и неустойчивости для гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами, существенно развил результаты А. М. Ляпунова и Н. Е. Жуковского на случай систем, указал связь между собственными значениями некоторых краевых задач и границами зон устойчивости. Созданная М. Г. Крейном теория мультипликаторов позволила получить критерии устойчивой ограниченности решений и значительно упростить вычисления при нахождении зон устойчивости, в частности указать оценки границ этих зон.

Для систем с неограниченными коэффициентами, близких к диагональным, И. М. Рапопорт развил метод построения решений в виде специальных рядов, позволяющий исследовать асимптотическое поведение решений, вопросы устойчивости и т. п. (1950—1952 гг.). С небольшими видоизменениями этот метод применим к разностным уравнениям. Им изучено также асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций самосопряженной краевой задачи для дифференциальных уравнений произвольного четного порядка.

С. Ф. Фещенко предложил метод асимптотического представления интегралов систем с медленно меняющимися коэффициентами, позволяющий расщепить исходную систему на подсистемы более низкого порядка, и исследовал случай резонанса, когда одна из собственных частот совпадает в некоторые моменты времени с частотой возмущающей периодической силы (1947—1972 гг.). Этот метод распространен на системы интегральных, интегро-дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.

Нелинейные уравнения. Исследования нелинейных уравнений велись по таким направлениям: изучение уравнений, близких к линейным, интегрируемым нелинейным или вырожденным уравнениям; исследование локальных решений в окрестности заданных интегральных многообразий (в окрестности положения равновесия, периодической траектории, инвариантного тора и т. п.); изучение конкретных уравнений, возникающих в приложениях.

Глубокие исследования уравнений небесной механики с 1923 по 1951 гг. проводил Ю. Д. Соколов. Он изучил условия общего соударения в классической задаче трех тел, в частности указал условия, при которых такое соударение не может произойти. Последующие его исследования позволили обобщить результаты П. Пенлеве, Ж. Шази, Т. Леви-Чивита, К. Зундмана и др. Изучая ограниченную задачу трех тел в обобщенной постановке, когда закон притяжения может отличаться от ньютоновского, Ю. Д. Соколов построил специальный метод последовательных приближений, указал соотношения, характеризующие условия соударения, и исследовал поведение и аналитическое представление функций, описывающих движение вблизи момента соударения. Рассматривая обобщенную задачу n тел, Ю. Д. Соколов доказал существование движений, при которых тела за конечное время могут неограниченно расходиться, и изучал траектории общего соударения тел.

Наряду с исследованием интегральных кривых (индивидуальных решений) большое значение имеет исследование интегральных многообразий. Основополагающие результаты в этом направлении содержатся в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (1934 г.) и Н. Н. Боголюбова (1945 г.).

Существенное развитие исследования интегральных многообразий получили в работах Ю. А. Митропольского и его учеников. Они установили теоремы о существовании интегральных многообразий для различных классов уравнений, предложили методы их построения, а также исследовали свойства решений в окрестности многообразий и на самих многообразиях.

В исследованиях Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и А. М. Самойленко развит метод последовательных замен с ускоренной сходимостью (1963—1970 гг.). Этот метод применен, в частности, к построению общего решения нелинейных систем в окрестности квазипериодических решений. А. М. Самойленко разработал численно-аналитический метод исследования периодических решений уравнений с периодической правой частью (1963—1965 гг.).

К. В. Задирака, рассматривая системы с малым параметром при производных, установил условия существования интегральных многообразий, близких к интегральным многообразиям вырожденных систем, исследовал их устойчивость и выяснил, когда эти многообразия наследуют периодичность, квазипериодичность и почти периодичность самой системы (1956—1966 гг.).

2. Динамические системы. Важным средством качественного исследования дифференциальных уравнений являются динамические системы — однопараметрические группы (полугруппы) преобразований, задаваемые решениями дифференциальных или разностных уравнений. Н. М. Крылов изучал вопросы существования и свойства эргодических множеств динамических систем. Вместе с Н. Н. Боголюбовым доказал фундаментальную теорему о том, что для каждой динамической системы на компактном фазовом пространстве существует инвариантная мера. О. С. Парасюк исследовал спектр потока гороциклов на поверхностях отрицательной кривизны (1953 г.).

Для произвольной динамической системы с компактным фазовым пространством А. Н. Шарковским установлена несжимаемость на предельном множестве каждой траектории, получены дескриптивные оценки устойчивых многообразий и дана классификация траекторий по их устойчивости, базирующаяся на понятии пролонгации траектории. Предложено обобщение понятия неблуждающей точки, являющееся наиболее широким обобщением возвращаемости и периодичности, а также указаны условия структурной устойчивости динамических систем на множестве таких точек. Доказано, что для почти всех динамических систем почти все траектории устойчивы при постоянно действующих возмущениях (1972—1973 гг.).

Для одномерных динамических систем во множестве натуральных чисел установлен универсальный порядок сосуществования периодов циклов: $1 \prec 2 \prec 2^2 \prec \ldots \prec 5\cdot 2 \prec 3\cdot 2 \prec \ldots \prec 5 \prec 3$, который, в частности, указывает, в каком порядке появляются новые циклы при изменении параметров системы, характеризует порядок возрастания сложности ее поведения и переход от упорядоченного движения к нерегулярному хаотическому. Установлен универсальный порядок сосуществования гомоклинических траекторий. Исследована структура множества периодических точек. Выделены и изучены локально максимальные (базисные) множества. Изучена связь между поведением траекторий динамической системы, наличием циклов и топологической структурой множества периодических точек.

3. Разностные, функциональные, дифференциально-функциональные уравнения. Для разностных уравнений установлены закономерности сосуществования периодических решений с различными периодами; указаны условия, при которых уравнения имеют только асимптотически периодические решения. Для уравнений с непрерывным временем получены условия существования осциллирующих решений релаксационного и турбулентного типов. Дано описание множества решений, притягивающих все решения разностного уравнения, сформулированы условия устойчивости решений.

Теория дифференциально-функциональных уравнений развивалась в различных направлениях.

Ю. А. Митропольским и В. И. Фодчуком разработаны асимптотический метод и метод усреднения для квазилинейных дифференциально-функциональных уравнений, в том числе с малым параметром при старшей производной. В. И. Фодчуком исследованы интегральные многообразия систем линейных и квазилинейных уравнений.

А. Н. Шарковским выделен и изучен класс уравнений с оператором, расщепляющимся в произведение дифференциального и разностного операторов. Им совместно с учениками изучены различные классы уравнений, операторы которых близки к расщепляющимся. Показано, что для таких уравнений типичными являются решения релаксационного и турбулентного типов. Предложен метод изучения свойств решений дифференциально-функциональных уравнений с конечной группой преобразования аргумента.

Получено представление общего решения линейных и квазилинейных дифференциально-функциональных уравнений с одним преобразованием аргумента в окрестности регулярных и сингулярных особых точек.

В. Н. Шевело установлены признаки осцилляции и неосцилляции решений дифференциально-функциональных уравнений и систем, в том числе с отклонением аргументов общего вида, включающим запаздывание, опережение и их чередование.

4. Уравнения в частных производных. Классической теории интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка посвящены работы Г. В. Пфейффера, который продолжил исследования Ж. Лагранжа и С. Ли по интегрированию систем уравнений с одной неизвестной функцией и построил единую теорию интегрирования таких уравнений. Г. В. Пфейффер решил задачу о построении интегралов Ли одних классов по интегралам Ли других классов и построил полные интегралы линейного уравнения. Он уточнил утверждение С. Ли об эквивалентности интегрирования нелинейных уравнений интегрированию систем линейных уравнений и дал обобщение метода Якоби интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. В последние годы научной деятельности Г. В. Пфейффер занимался также построением общего метода интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка с несколькими неизвестными функциями. Идеи и методы Г. В. Пфейффера развиты в работах его учеников М. К. Куренского и Г. И. Дринфельда. М. К. Куренский изучал вопросы интегрирования уравнений в частных производных первого и второго порядков с несколькими неизвестными функциями. Работы Г. И. Дринфельда посвящены в основном исследованию интегральных инвариантов групп Ли. Теорию групп Ли он применял также к вопросам интегральной геометрии.

М. А. Лаврентьев совместно с М. В. Келдышем изучил вопрос об устойчивости задачи Дирихле при изменении формы области. В 1946—1948 гг. М. А. Лаврентьевым была создана теория квазиконформных отображений, представляющая собой по существу теорию частного вида систем дифференциальных уравнений с частными производными (две независимые переменные и две неизвестные функции). В дальнейшем им был выделен и изучен общий класс систем уравнений в частных производных, решения которых обладают некоторыми свойствами конформных отображений. Эти работы определили новое геометрическое направление в теории дифференциальных уравнений с частными производными с его многочисленными применениями в механике.

Основы общей теории краевых задач для линейных систем эллиптического типа заложены в работах Я. Б. Лопатинского. Он построил локальные фундаментальные решения таких уравнений, установил структуру решений в окрестности изолированной особой точки и исследовал гладкость решения в зависимости от гладкости коэффициентов (1949—1951 гг.). Я. Б. Лопатинский получил условия согласованности коэффициентов системы и коэффициентов граничных условий, обеспечивающие нормальную разрешимость эллиптической краевой задачи, построил потенциалы для таких задач и указал способ сведения граничных задач к регулярным интегральным уравнениям (1952 г.).

А. Н. Шарковским и его учениками разработан метод исследования нелинейных краевых задач для некоторых классов гиперболических систем в частных производных посредством сведения их к разностным, функциональным или дифференциально-функциональным уравнениям. А. Н. Шарковский предложил новый подход в математическом моделировании турбулентности. Введено понятие «сухой турбулентности» как нерегулярных колебаний в математических моделях непрерывной среды с нулевой вязкостью, характеризуемых неограниченным ростом частоты колебаний и объясняющих такие явления турбулентности, как каскадный процесс образования когерентных структур уменьшающихся масштабов, перемежаемость турбулентности и др.

Относительно работ по уравнениям с частными производными, выполненных методами функционального анализа, см. статью Ю. М. Березанского и В. И. Горбачук «Развитие функционального анализа в Институте математики АН УССР».

5. Приближенные методы. Фундаментальный вклад в развитие приближенных методов внесли Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, М. Ф. Кравчук и Ю. Д. Соколов.

Н. М. Крылов обосновал применение вариационных методов, в частности метода Ритца и метода наименьших квадратов, к самосопряженным задачам математической физики. В ряде работ, написанных им, а также совместно с Н. Н. Боголюбовым, получены эффективные оценки погрешности этих методов. Наиболее полные результаты достигнуты для дифференциальных уравнений второго порядка, для которых установлены неулучшаемые по порядку оценки. Для дифференциальных уравнений гиперболического типа Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов создали и обосновали новый метод, сочетающий в себе идеи вариационных и операционного методов. В результате исследований, касающихся конечноразностных методов, разработан метод высших разностей. Заслуживает также внимания предложенный ими метод, позволяющий переходить от уравнений с переменными коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Н. М. Крылов создал новый метод решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений, обобщающий методы Бубнова — Галеркина и наименьших квадратов и получивший название метода моментов. М. Ф. Кравчук исследовал сходимость этого метода для обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений и уравнений в частных производных, а также установил точные по порядку оценки погрешностей, характеризующие быстроту сходимости в зависимости от гладкости исходных данных задачи.

Ю. Д. Соколов в 50-е годы предложил и обосновал новый эффективный метод построения решений дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных и других классов уравнений — метод осреднения функциональных поправок, в котором сочетаются преимущества итерационных и проекционных методов. Дальнейшее развитие метода осреднения функциональных поправок А. Ю. Лучкой и Н. С. Курпелем привело к созданию проекционно-итеративного метода, позволяющего находить решения широкого класса задач математической физики. На основе этого метода построены эффективные вычислительные алгоритмы и осуществлена их численная реализация на ЭВМ.