УДК 517.925.34

С. К. Норкин

Асимптотика решений, покрывающих интегральное O-множество одной нелинейной системы

1. Рассмотрим систему

$$\alpha(x)\, dy/dx = F(x, y), \tag{1}$$

определенную в области

$$S = \{(x, y): x \in \,]\,0;\ a\,[,\ \|y\| \in [0;\ b\,[\ \}, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}_+$, $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-k-m}$, $n > k + m$, $y = \operatorname{colon}(u_1, u_2, u_3)$; $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^3$; $\alpha(x) = \operatorname{diag}(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$; $(F_1, F_2, F_3): \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-k-m}$, $F(x, y) = \operatorname{colon}(F_1(x, y), F_2(x, y), F_3(x, y))$; $a, b \in \mathbb{R}_+$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Система (1) предполагается из класса ($\mathbb{C}$; единственность) в области S, т. е. векторы-функции α и F непрерывны в области S и обладают свойством, которое обеспечивает единственность решения системы (1), удовлетворяющего любым начальным условиям в S.

В работах [1—6] изучалось O-множество $\mathfrak{M} \subset S$, покрытое O-решениями системы (1), т. е.

$$\mathfrak{M} = \{(x, y(x)) \in S : \alpha(x)\, y'(x) \equiv F(x, y(x)),\ \lim_{x \to +0} \|y(x)\| = 0\}$$

для случая когда $n = k + m$, разделялись «устойчивые» и «неустойчивые» компоненты u_1 и u_2 вектора y, а также были найдены условия, при которых $\dim \mathfrak{M} = n - k + 1$. В настоящей работе находится асимптотика для O-решений множества $\mathfrak{M}$ на основании полученной двухсторонней оценки для компоненты u_3, когда $n > k + m$.

2. Предполагаем, что вектор-функция $F = \operatorname{colon}(F_1, F_2, F_3)$ удовлетворяет следующим условиям: в области S для любых x, $y = \operatorname{colon}(u_1, u_2, u_3)$

$$(u_1, F_1(x, y)) \leqslant -L_1(x) \| u_1 \|^2 + \lambda_1(x) \| y \|^2, \tag{3}$$

$$(u_2, F_2(x, y)) \geqslant L_2(x) \| u_2 \|^2 - \lambda_2(x) \| y \|^2, \tag{4}$$

$$|(u_3, F_3(x, y)) - \lambda_0(x) \| u_3 \|^2 | \leqslant L_3(x) \| u_3 \|^2 + \lambda_3(x) \| y \|^2, \tag{5}$$

где функции $L_i(x)$ и $\lambda_j(x)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$, определены и непрерывны в интервале $]0; a[$ и $\lambda_j(x) \geqslant 0$, $L_3(x) + \lambda_3(x) \geqslant 0$.

Пусть асимптотика функции $\alpha_i(x)$, $L_i(x)$ и $\lambda_j(x)$ определяется следующими равенствами:

$$\lim_{x \to +0} \alpha_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, 3; \tag{6}$$

$$\lim_{x \to +0} \alpha_i(x)/\alpha_3(x) = c_i < +\infty, \quad i = 1, 2; \tag{7}$$

$$L_i(x) = L_i - d_i(x), \quad i = 1, 2; \qquad L_3(x) = L_3 + d_3(x), \tag{8}$$

$$\lambda_j(x) = \lambda_j + d_j(x), \quad j = 1, 2, 3; \qquad \lambda_0(x) = \lambda_0 + \gamma_0(x), \tag{9}$$

где d_j, $\gamma_0 \in \mathbb{C}(]0; a[)$, $d_j(x) \geqslant 0$, $\gamma_0(x) \geqslant 0$ и

$$d_j(x) = o(1), \quad \gamma_0(x) = o(1), \quad x \to +0. \tag{10}$$

Положим

$$D_i(x) = d_i(x)/\alpha_i(x) + d_3(x)/\alpha_3(x), \quad i = 1, 2; \tag{11}$$

$$\Lambda_i(x) = \lambda_i(x)/\alpha_i(x) + \lambda_3(x)/\alpha_3(x), \quad i = 1, 2; \tag{12}$$

$$\mathscr{L}_1(x) = L_1/\alpha_1(x) + (\lambda_0 - L_3 + \gamma_0(x))/\alpha_3(x); \tag{13}$$

$$\mathscr{L}_2(x) = L_2/\alpha_2(x) - (\lambda_0 + L_3 + \gamma_0(x))/\alpha_3(x). \tag{14}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3) — (10). *Если*

$$1)\ L_1 + c_1(\lambda_0 - L_3) > 0,\ L_2 - c_2(\lambda_0 + L_3) > 0; \tag{15}$$

2) *существует* $a_1 < a$ *такое, что в интервале* $]0; a_1[$ *при некотором* $c_0 > \sqrt{3}$

$$h_i(x) + c_0 H_i(a_1) \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

где

$$h_1(x) = \int_0^x D_1(s) \exp \int_x^s \mathscr{L}_1(\tau)\, d\tau ds, \tag{17}$$

$$h_2(x) = \int_x^a D_2(s) \exp \int_s^x \mathscr{L}_2(\tau)\, d\tau ds, \tag{18}$$

$$H_i(x) = \sup_{s \in]0; x]} \sqrt{\Lambda_i(s)/\mathscr{L}_i(s)}, \quad i = 1, 2; \tag{19}$$

тогда для любых x_0, u_2^0, $u_3^0 : x_0 \in]0; a_1[$; $\| u_2^0 \| < [h_2(x_0) + \sqrt{3} H_2(x_0)] \, \| u_3^0 \|$; $\| u_3^0 \| \in]0; b/\sqrt{2}[$ *найдется хотя бы одно значение* $u_1^0, (x_0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) \in S$, *такое, что система* (1) *имеет в области* S *решение, определенное на левом максимальном интервале существования* $]\omega_-; x_0]$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u_1(x_0) = u_1^0, \quad u_2(x_0) = u_2^0, \quad u_3(x_0) = u_3^0 \tag{20}$$

и для которого справедливы оценки

$$\| u_i(x) \| \leqslant [h_i(x) + \sqrt{3} H_i(x)] \, \| u_3(x) \|, \quad i = 1, 2; \tag{21}$$

$$\| u_3^0 \| \exp \int_{x_0}^{x} (\lambda_0 + L_3 + 3\lambda_3 + \gamma_0(s) + 4d_3(s))/\alpha_3(s)\, ds \leqslant \| u_3(x) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| u_3^0 \| \exp \int_{x_0}^{x} (\lambda_0 - L_3 - 3\lambda_3 + \gamma_0(s) - 4d_3(s))/\alpha_3(s)\, ds. \qquad (22)$$

Замечание. Теорема о продолжении решения [7] дает: если

$$\int_{0}^{x_0} (L_3 + 3\lambda_3 - \lambda_0 + 4d_3(s) - \gamma_0(s))/\alpha_3(s)\, ds = +\infty, \qquad (23)$$

то решение задачи Коши (1), (20) определено в интервале $]0; x_0]$ и, как следует из оценок (21), (22), является O-решением. O-множество $\mathfrak{M}$, покрытое такими O-решениями, имеет размерность $\dim \mathfrak{M} \geqslant n - k + 1$.

Доказательство. Поскольку функции $H_i(x)$ непрерывны в интервале $]0; a_1[$, то для любых $x \in]0; a_1[$, $c \in]\sqrt{3}; c_0[$ найдется $\varepsilon(x) > 0$, зависящее от x и от c, такое, что

$$1 \leqslant (H_i(x) + \varepsilon(x))/H_i(x) < c/\sqrt{3}, \quad i = 1, 2. \qquad (24)$$

Возьмем произвольное значение $x_0 \in]0; a_1[$ и выберем постоянные K_i, $i = 1, 2$, такие, что

$$\sqrt{3} H_i(x_1) < K_i < c H_i(x_0), \qquad (25)$$

где $x_1 = x_0 + \varepsilon(x_0)$, $c \in]\sqrt{3}; c_0[$. Положим

$$\xi_i(x) = \| u_i \|^2 - l_i^2(x) \| u_3 \|^2, \quad i = 1, 2, \qquad (26)$$

где

$$l_i(x) = h_i(x) + K_i. \qquad (27)$$

Рассмотрим открытую область $\Omega = \{(x, y) \in S : \xi_1(x) < 0,\ \xi_2(x) < 0;\ x \in]0; x_1[, \| u_3 \| \neq 0\}$ и множества $\Omega_1 = \{(x, y) \in S : \xi_1(x) = 0,\ \xi_2(x) \leqslant 0;\ x \in]0; x_1[,\ \| u_3 \| \neq 0\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) \in S : \xi_1(x) \leqslant 0,\ \xi_2(x) = 0;\ x \in]0; x_1[,\ \| u_3 \| \neq 0\}$. В силу системы (1), учитывая (26), (27) и неравенства (3) — (5), находим, что $\xi_1'(x)/2 \leqslant -l_1'(x) l_1(x) \| u_3 \|^2 - L_1(x) \| u_1 \|^2/\alpha_1(x) - (\lambda_0(x) - L_3(x)) l_1^2(x) \| u_3 \|^2/\alpha_3(x) + \lambda_1(x) \| y \|^2/\alpha_1(x) + \lambda_3(x) l_1^2(x) \| y \|^2/\alpha_3(x)$.

Поскольку на множестве Ω_1 $\| u_1 \| = l_1(x) \| u_3 \|$, $\| u_2 \| \leqslant l_2(x) \| u_3 \|$, то из неравенств (16), (25) и равенств (26), (27) следует $\| y \|^2 \leqslant 3 \| u_3 \|^2$. Поэтому, учитывая обозначения (11)—(13), находим на множестве Ω_1

$$\xi_1'(x)/2 |_{\Omega_1} \leqslant - l_1'(x) l_1(x) \| u_3 \|^2 - \mathscr{L}_1(x) l_1^2(x) \| u_3 \|^2 +$$

$$+ D_1(x) l_1(x) \| u_3 \|^2 + 3\Lambda_1(x) \| u_3 \|^2. \qquad (28)$$

Легко убедиться, благодаря равенствам (17), (27), что функция $l_1(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$l' + \mathscr{L}_1(x) l - D_1(x) - K_1 \mathscr{L}_1(x) = 0. \qquad (29)$$

Покажем теперь, что интеграл (17) сходится. Действительно, если $A_1(x) = D_1(x)/\mathscr{L}_1(x)$, то, учитывая (11), (13), (7), (10) и применяя неравенства (15), получим $\lim\limits_{x \to +0} A_1(x) = \lim\limits_{x \to +0} (d_1(x) + d_3(x) \alpha_1(x)/\alpha_3(x))/(L_1 + (\lambda_0 - L_3 + \gamma_0(x)) \alpha_1(x)/\alpha_3(x)) = 0$. Тогда

$$h_1(x) = \int_{0}^{x} A_1(s) \mathscr{L}_1(s) \exp \int_{a}^{s} \mathscr{L}_1(\tau)\, d\tau ds / \exp \int_{a}^{x} \mathscr{L}_1(\tau)\, d\tau ds = o(1) \qquad (30)$$

при $x \to +0$, так как интеграл в числителе стремится к нулю.

Применяя (29) к (28) и учитывая, что $l_1(x) = h_1(x) + K_1$, $h_1(x) > 0$, находим, что $\xi_1'(x)/2 |_{\Omega_1} \leqslant \{-K^2 \mathscr{L}_1(x) + 3\Lambda_1(x)\} \| u_3 \|^2$. Из неравенства

(25) и равенства (19) следует, что

$$\xi_1'(x)|_{\Omega_1} < 0, \tag{31}$$

ибо $\| u_3 | \neq 0,\ x \in]\,0;\ x_1\,[$ на множестве Ω_1.

Учитывая неравенства (4), (5) и равенства (11), (12), (14), находим на множестве Ω_2, где $\| u_1 \| \leqslant l_1(x) \| u_3 \|$, $\| u_2 \| = l_2(x) \| u_3 \|$, $\| y \|^2 < 3 \| u_3 \|^2$, что относительно системы (1)

$$\xi_2'(x)/2\,|_{\Omega_2} \geqslant -\,l_2'(x)\,l_2(x)\,\| u_3 \|^2 + \mathscr{L}_2(x)\,l_2^2(x)\,\| u_3 \|^2 - \\ -\,D_2(x)\,l_2(x)\,\| u_3 \|^2 - 3\Lambda_2(x)\,\| u_3 \|^2. \tag{32}$$

Интеграл (18) сходится. Действительно, из условий (7), (10), (15), (11) и (14) имеем $A_2(x) = D_2(x)/\mathscr{L}_2(x) = o(1)$ при $x \to +0$. Поэтому интегралы в дроби $h_2(x) = \int\limits_x^a A_2(s)\,\mathscr{L}_2(s) \exp \int\limits_s^a \mathscr{L}_2(\tau)\,d\tau ds/\exp \int\limits_x^a \mathscr{L}_2(\tau)\,d\tau$ сходятся, если $\int\limits_{+0} \mathscr{L}_2(\tau)\,d\tau < +\infty$, и

$$h_2(x) = o(1), \quad x \to +0, \tag{33}$$

если $\int\limits_{+0} \mathscr{L}_2(\tau)\,d\tau = +\infty$, в чем легко убедиться, применяя правило Лопиталя.

Можно проверить, используя равенства (27), (18), что функция $l_2(x)$ — решение дифференциального уравнения $l' - \mathscr{L}_2(x)\,l + D_2(x) + K_2\mathscr{L}_2(x) = 0$. Поэтому неравенство (32) принимает вид $\xi_2'(x)/2\,|_{\Omega_2} \geqslant \{K_2^2\mathscr{L}_2(x) - 3\Lambda_2(x)\} \times \| u_3 \|^2$. Из неравенства (25) и равенства (19) следует, что

$$\xi_2'(x)|_{\Omega_2} > 0. \tag{34}$$

Неравенства (31) и (34) означают, что множество $\Omega_{se} = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ есть множество точек строгого выхода из открытой области Ω при убывании значений x [7].

Пусть u_2^0, u_3^0 — произвольные векторы: $\| u_2^0 \| \leqslant [h_2(x_0) + \sqrt{3}H_2(x_0)] \times \| u_3^0 \| < l_2(x_0)\,\| u_3^0 \|$, $\| u_3^0 \| \in]\,0;\ b/\sqrt{2}\,[$. Рассмотрим замкнутый шар $\Sigma = \{(x_0, u_1, u_2^0, u_3^0) : \| u_1 \| \leqslant l_1(x_0)\,\| u_3^0 \|\}$ в u_1-пространстве. Его граница — сфера $\Sigma \cap \Omega_{se} = \{(x_0, u_1, u_2^0, u_3^0) : \| u_1 \| = l_1(x_0)\,\| u_3^0 \|\}$, которая не является ретрактом для шара Σ, но будет ретрактом для множества точек строгого выхода Ω_{se} из области Ω с ретракцией $r : \Omega_{se} \to \Omega_{se} \cap \Sigma$, определяемой равенством $r(x,\ _1, u_2, u_3) = (x_0,\ l_1(x_0)\,\| u_3^0 \|\, u_1/l_1(x)\,\| u_3 \|,\ u_2^0,\ u_3^0)$. Применение топологического принципа Важевского дает существование хотя бы одной точки u_1^0, $(x_0, u_1^0, u_2^0, u_3^0) \in \Sigma \cap \Omega$, для которой решение задачи Коши (1), (20), остается в области Ω на левом максимальном интервале существования $]\omega_-;\ x_0]$.

Из определения области Ω и равенств (26), (27) вытекают оценки $\| u_i(x) \| < [h_i(x) + K_i]\,\| u_3(x) \|$, $i = 1, 2;\ x \in]\,\omega_-;\ x_0]$.

Учитывая неравенство (25), находим, что $\| u_i(x) \| < [h_i(x) + cH_i(x_0)] \times \| u_3(x) \|\ \ \forall c \in]\,\sqrt{3};\ c_0\,[$. Из непрерывности компонент решения системы (1) и функций $h_i(x)$ и $H_i(x)$ следует, что в некотором интервале $]x^*;\ x_0]$ справедливы неравенства

$$\| u_i(x) \| < [h_i(x) + cH_i(x)]\,\| u_3(x) \|. \tag{35}$$

Покажем, что $x^* = \omega_-$. Для этого допустим, что $x^* > \omega_-$ и

$$\| u_i(x^*) \| = [h_i(x^*) + cH_i(x^*)]\,\| u_3(x^*) \|. \tag{36}$$

Поскольку неравенство (35) справедливо для любого $c \in]\sqrt{3};\ c_0[$, то $\|u_i(x)\| \leqslant [h_i(x) + \sqrt{3}H_i(x)]\,\| u_3(x) \|$, $x \in]\,x^*;\ x_0]$. Очевидно, что это неравенство справедливо и для x^*. Возьмем некоторое значение $c \in]\,\sqrt{3};\ c_0[$, для которого справедливо равенство (36), и найдем $\varepsilon(x^*)$, обеспечивающее неравенство (24) при $x = x^*$. Тогда $\| u_i(x^*) \| \leqslant [h_i(x^*) + \sqrt{3} H_i(x^* + \varepsilon(x^*))] \times \| u_3(x^*) \| < [h_i(x^*) + cH_i(x^*)] \| u_3(x^*) \|$. Получено противоречие равенству (36), а значит, $x^* = \omega_-$. Таким образом, неравенства (35) выполняются в интервале $]\omega_-; x_0]$. Эти неравенства дают оценки (21).

Поскольку в Ω $\alpha_3(x) \| u_3 \|' = (u_3, F_3(x, y)/\| u_3 \|$, то из неравенств (5), (21) и (16) следует $[\lambda_0(x) - L_3(x) - 3\lambda_3(x)] \| u_3 \| \leqslant \alpha_3(x) \| u_3 \|' \leqslant [\lambda_0(x) + L_3(x) + 3\lambda_3(x)] \| u_3 \|$. Интегрирование этого неравенства дает оценку (22), если учесть равенства (8), (9). Теорема доказана.

3. Исследуем асимптотику O-решений, покрывающих O-множество $\mathfrak{M}$, существование которых определяет теорема 1 и равенство (23).

Так как из (12)—(14) и (7)—(10) следует, что

$$\lim_{x \to +0} \Lambda_1(x)/\mathscr{L}_1(x) = (\lambda_1 + c_1\lambda_3)/(L_1 + c_1(\lambda_0 - L_3)),$$

$$\lim_{x \to +0} \Lambda_2(x)/\mathscr{L}_2(x) = (\lambda_2 + c_2\lambda_3)/(L_2 - c_2(\lambda_0 + L_3)),$$

то, учитывая определение функций $H_i(x)$ (19), свойства функций $h_i(x)$ (30) и (33), можно утверждать, что требование (16) теоремы 1 выполняется, если указанные выше пределы будут меньше, чем 1/3. Следовательно, из оценок (21), (22) можно заключить справедливость следующего результата.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3) — (10), (15) *и* $\int\limits_{+0} dx/\alpha_j(x) = +\infty$, $j = 1, 2, 3$; $(\lambda_1 + c_1\lambda_3)/(L_1 + c_1(\lambda_0 - L_3)) < 1/3$; $(\lambda_2 + c_2\lambda_3)/(L_2 - c_2(\lambda_0 + L_3)) < 1/3$. *Если справедливо одно из следующих условий:*

i) $\lambda_0 > L_3 + 3\lambda_3$,

ii) $\lambda_0 = L_3 + 3\lambda_3$, $\int\limits_{+0} \gamma_0(s)\, ds/\alpha_3(s) = +\infty$, $\int\limits_{+0} d_3(s)\, ds/\alpha_3(s) < +\infty$, *то в области* S *существует* O-*множество* $\mathfrak{W}$, $\dim \mathfrak{W} = n - k + 1$, *а* O-*решения* $y(x) = \operatorname{colon}(u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, *покрывающие* $\mathfrak{W}$, *имеют асимптотику*:

1) $\varliminf\limits_{x \to +0} \ln \| u_3(x) \| / \int\limits_x^a ds/\alpha_3(s) \geqslant -(\lambda_0 + L_3 + 3\lambda_3)$, *если* $\lambda_0 > 0$;

2) $\varliminf\limits_{x \to +0} \ln \| u_3(x) \| / \int\limits_x^a ds/\alpha_3(s) \geqslant -\sup\limits_{x \ni]0;a[} \gamma_0(x)$, *если* $\lambda_0 = 0$;

3) $\varlimsup\limits_{x \to +0} \ln \| u_3(x) \| / \int\limits_x^a ds/\alpha_3(s) \leqslant L_3 + 3\lambda_3 - \lambda_0$, *если выполняется условие* i);

4) $\varlimsup\limits_{x \to +0} \ln \| u_3(x) \| / \gamma(x) \int\limits_x^a ds/\alpha_3(s) \leqslant -1$, *где* $\gamma(s) = \inf\limits_{s \in [x;a[} \gamma_0(s)$, *если выполняется условие* ii);

5) $\| u_i(x) \| / \| u_3(x) \| = O(1)$ *при* $x \to +0$, $i = 1, 2$, *если* $\lambda_i > 0$;

6) $\| u_1(x) \| / \| u_3(x) \| = O(\overline{h}_1(x))$ *при* $x \to +0$, *где* $\overline{h}_1^2(x) = \sup\limits_{s \in]0;x]} \{d_1(s), \alpha_1(s)/\alpha_3(s), d_3(s)\alpha_1(s)/\alpha_3(s)\}$, *если* $\lambda_1 = c_1 = 0$;

7) $\| u_2(x) \| / \| u_3(x) \| = O\left(\overline{h}_2(x) + \text{const} \int\limits_x^a \overline{h}_2^2(s)/\alpha_2(s) \exp \int\limits_s^x L_2/\alpha_2(\tau)\, d\tau ds\right)$ *при* $x \to +0$, *где* $\overline{h}_2^2(x) = \sup\limits_{s \in]0;x]} \{d_2(s), \alpha_2(s)/\alpha_3(s), d_3(s)\alpha_2(s)/\alpha_3(s)\}$, *если* $\lambda_2 = c_2 = 0$.

1. *Андреев А. Ф.* Об исключительном направлении системы n-го порядка в точке покоя.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 2, с. 187—194.
2. *Бодунов Н. А.* О многообразиях O-кривых многомерных систем.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 5, с. 914—917.
3. *Норкин С. К.* Проблема различения для нормальной области N^4 в пространстве $\mathbb{R}^3$.— Дифференц. уравнения, 1976, **12**, № 2, с. 263—271.

4. *Норкин С. К.* О размерности множества, покрытого интегральными кривыми, примыкающими к особой точке многомерной системы.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 4, с. 563—569.
5. *Норкин С. К.* Об асимптотической оценке *O*-решений многомерной системы.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 11, с. 2079—2081.
6. *Бодунов Н. А.* О структуре множества *O*-кривых в нормальной области четвертого типа.— В кн.: Прикладная математика. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т., 1979, с. 16—20.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1970.— 720 с.

Одес. политехн. ин-т Поступила 09.04.83