УДК 519.4

М. Ю. Любич, Ю. И. Любич

Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп

1. Представление T топологической полугруппы S в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ называется почти периодическим (п. п.), если $\forall x \in \mathfrak{B}$ орбита $O(x) = \{y \mid y = T(s)x\,(s \in S)\}$ сильно предкомпактна, или, что эквивалентно, сильное замыкание $B_T = \overline{T(S)}$ сильно компактно. Компактная полугруппа B_T называется боровским компактом, а ее наименьший двусторонний идеал K_T — ядром Сушкевича представления T. По поводу этих основных определений см. [1]. Ниже предполагается, что K_T — группа. Это справедливо, в частности, если S абелева. Единица $P \in K_T$ — проектор в $\mathfrak{B}$. Назовем его граничным проектором, а $\mathfrak{B}_1 = \operatorname{Im} P$, $\mathfrak{B}_0 = \operatorname{Ker} P$ — граничным и внутренним подпространством представления T. Очевидно, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \dotplus \mathfrak{B}_0$, и можно доказать, что $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_0$ инвариантны. Если T — сжимающее (чего всегда можно добиться переходом к эквивалентной норме в $\mathfrak{B}$), то $\|P\| = 1$ при $P \neq 0$, т. е. P — ортопроектор. В развитие [1, 2] мы устанавливаем следующую теорему об отщеплении граничного спектра.

Теорема 1. *Внутреннее и граничное подпространства описываются следующим образом:*

$$\mathfrak{B}_0 = \{x \mid 0 \in \overline{O(x)}\}, \quad \mathfrak{B}_1 = \overline{\sum_\lambda V_\lambda}, \tag{1}$$

где V_λ пробегает конечномерные инвариантные подпространства, для которых $T \mid V_\lambda$ неприводимы и унитарны с точностью до эквивалентности. Если T сжимающее, то $T \mid \mathfrak{B}_1$ — изометрическое представление, а $B_T \mid \mathfrak{B}_1 = \overline{(T \mid \mathfrak{B}_1)(S)}$ — компактная (в сильной топологии) группа изометрий.

Доказательство основано на том, что 1) $A \mapsto AP$ есть гомоморфизм-ретракция $B_T \to K_T$ и 2) для банаховых представлений компактных групп справедлива в надлежащем виде теория Петера — Вейля.

Пусть S абелева. Тогда ее можно превратить в направленное множество, полагая $s \geqslant t$, если s делится на t или $s = t$. При этом оказывается, что

$$\mathfrak{B}_0 = \{x \mid \lim_s T(s)x = 0\}. \tag{2}$$

Более того, теорема об отщеплении граничного спектра с уточнением (2) для $\mathfrak{B}_0$ справедлива для более широкого класса асимптотических почти периодических (а. п. п.) представлений. Этот класс определяется следующим образом: T ограничено (т. е. $\sup_s \|T(s)\| < \infty$ и направленность $\{T(s)\}$ асимптотически сильно предкомпактна (т. е. любая ее поднаправленность содержит сильно сходящуюся поднаправленность).

Ядро Сушкевича K_T для а. п. п. T строится как сильное ω-предельное множество направленности $\{T(s)\}$. Ядро Сушкевича — компактная абелева группа. Единица P этой группы по-прежнему называется граничным проектором. Интересно отметить, что из отщепления граничного спектра (с уточнением (2)) вытекает а. п. п., так что в конечном счете эти свойства эквивалентны. Отметим также, что благодаря абелевости S

$$\mathfrak{B}_1 = \overline{\sum_\chi{}^{\cdot}\, W_\chi}, \tag{3}$$

где $W_\chi = \{x \mid T(s)x = \chi(s)x\,(s \in S)\}$ — весовые подпространства, отвечающие унитарным весам χ (т. е. таким унитарным характерам полугруппы, для которых $W_\chi \neq 0$).

Ограниченное представление T называется сходящимся, если направленность $\{T(s)\}$ сильно сходится.

Теорема 2. *Для того чтобы представление T было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы оно было а.п.п. и не имело унитарных ве-*

сов, отличных от единичного. При этом $\lim_s T(s) = P_1$, *где* P_1 — *проектор на подпространство неподвижных векторов* $W_1 = \{x \mid T(s)x = x\,(s \in S)\}$, $\operatorname{Ker} P_1 = \mathfrak{B}_0$.

В качестве примера рассмотрим представление $n \mapsto A^n$, $A \in \operatorname{End}\mathfrak{B}$, аддитивной полугруппы $\mathbb{Z}_+$. Если оно п. п., то A называется п. п. оператором (а. п. п. в этом случае не отличается от п. п.). Примером может служить компактный оператор с ограниченными степенями. Более общая ситуация связана с одной теоремой Иосиды — Какутани [3]: $\sup_{n\geqslant 1}\|A^n\| < \infty$, $r(A) = 1$ ($r(\cdot)$ — спектральный радиус), $\exists m: A^m = C + R$, где C компактен, $r(R) < 1$. Для таких операторов можно непосредственно проверить их п. п., что дает новое доказательство теоремы Иосиды — Какутани.

Если A — алгебраический оператор со спектром в единичном круге и все корни минимального полинома, лежащие на единичной окружности, просты, то A — п. п. оператор. В частности, таков любой проектор.

Сформулируем результаты, вытекающие из теорем 1, 2 в применении к операторам.

Следствие 1. *Если* A — *п. п. оператор в банаховом пространстве* $\mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \dotplus \mathfrak{B}_0$, *где* $\mathfrak{B}_1$ — *замыкание линейной оболочки собственных векторов, отвечающих унитарным собственным значениям,* $\mathfrak{B}_0 = \{x \mid \lim_{n\to\infty} A^n x = 0\}$. *Если* $\|A\| \leqslant 1$, *то проектор* P, *осуществляющий это разложение* ($\operatorname{Im} P = \mathfrak{B}_1$, $\operatorname{Ker} P = \mathfrak{B}_0$), *ортогонален* ($P = 0$ *при* $\|A\| < 1$ *и даже при* $r(A) < 1$), *а оператор* $A \mid \mathfrak{B}_1$ — *обратимая изометрия.*

Следствие 2 (ср. [4]). *Для того чтобы существовал сильный* $\lim_{n\to\infty} A^n$, *необходимо и достаточно, чтобы* A *был п. п. и не имел унитарных собственных значений, отличных от единицы. При этом* $\lim_{n\to\infty} A^n = P_1$, *где* P_1 — *проектор на подпространство неподвижних векторов оператора* A, *такой, что* $\operatorname{Ker} P_1 = \overline{\operatorname{Im}(I - A)}$.

Этот результат можно рассматривать как усиление статистической эргодической теоремы в п. п. ситуации. Благодаря п. п. здесь не возникает никаких ограничений на банахово пространство $\mathfrak{B}$.

Аналогично можно рассмотреть п. п. представление $t \mapsto U_t$ аддитивной полугруппы $\mathbb{R}_+$ (т. е. однопараметрические п. п. полугруппы в $\mathfrak{B}$). Опуская формулировки результатов, отметим только, что из теоремы об отщеплении граничного спектра вытекает известная теорема о том, что на полуоси $t \geqslant 0$ любая п. п. функция (п. п. ф.) $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$, где φ_1 — равномерный предел линейных комбинаций экспонент $e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (φ_1 тем самым продолжается до п. п. ф. на всей оси), а φ_0 стремится к нулю при $t \to +\infty$. Это общий вид п. п. ф. на полуоси, так как обратное утверждение тривиально.

2. В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ с конусом $\mathfrak{C}$ естественно выделяется класс неотрицательных представлений, т. е. таких, что $T(s) \geqslant 0$ при всех $s \in S$. Для этого класса справедливо следующее обобщение классической теоремы Перрона — Фробениуса.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *банахово пространство с тотальным конусом* $\mathfrak{C}$ (*т. е.* $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}}$). *Пусть* T — *неотрицательное п. п. представление топологической полугруппы* S, *для которого ядро Сушкевича* K_T *есть группа. Предположим, что существует вектор* v, *орбита которого отделена от нуля, т. е.* $\inf_s \|T(s)v\| > 0$. *Тогда существуют инвариантный вектор* $h \geqslant 0$ *и инвариантный линейный функционал* $\mu \geqslant 0$ *такие, что* $\mu(h) = 1$.

Будем называть h, μ парой Перрона — Фробениуса (PF-парой) для T. Опишем конструкцию PF-пары в условиях теоремы 3. Заметим, что $P \neq 0$, так как $Pv \neq 0$. Но тогда существует $x_0 \geqslant 0$, такой, что $Px_0 \neq 0$. Положим $h = \int_{K_T}(Ax_0)\,dA$, $\mu_0 = \int_{K_T}\lambda(A\,\cdot)\,dA$, где dA — нормированная мера Хаара на K_T, $\lambda \in \mathfrak{C}^*$, $\lambda \geqslant 0$, $(\lambda P x_0) > 0$. Элементы h, μ_0 инвариантны, и $\mu_0(h) = \lambda(h) = \int\limits_{K_T} \lambda(Ax_0)\, dA > 0$. Остается положить $\mu = \mu_0 / \mu_0(h)$.

Замечание. Если S абелева, то достаточно, чтобы T было а. п. п.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство с тотальным конусом, $A \geqslant 0$ — п. п. оператор. Тогда либо A^n сильно стремится к нулю при $n \to \infty$, либо A обладает PF-парой h, μ: $Ah = h \geqslant 0$, $A^*\mu = \mu \geqslant 0$, $h(\mu) = 1$.*

Это утверждение для компактного $A \geqslant 0$ дает известную теорему Крейна — Рутмана (с условием ограниченности степеней). Более общая теорема существования PF-пары получается в ситуации Иосиды — Какутани.

Если конус $\mathfrak{C}$ телесен (т. е. $\mathfrak{B}$ — пространство Крейна), то представление $T \geqslant 0$ называется неразложимым, если $\forall x \geqslant 0$ $(x \neq 0)$ $\forall \omega \in \mathfrak{B}^*$, $\omega \geqslant 0$ $(\omega \neq 0)$ $\exists s \in S$: $\omega(T(s)x) > 0$, и примитивным, если $\forall x \geqslant 0$ $(x \neq 0)$ $\exists s \in S$: $T(s)x > 0$ (т. е. $T(s)x$ — внутренняя точка конуса). Эти понятия переносятся на операторы $A \geqslant 0$ через соответствующие представления.

Лемма 1. *Для неразложимого п. п. представления, удовлетворяющего условиям теоремы 3, элементы PF-пары положительны, а подпространства инвариантных векторов и функционалов одномерны.*

Теорема 4. *Пусть $T \geqslant 0$ — а. п. п. представление абелевой топологической полугруппы S в пространстве Крейна $\mathfrak{B}$, обладающее вектором, орбита которого отделена от нуля. Если T примитивно, то $\lim\limits_s T(s)x = \mu(x)h$, $x \in \mathfrak{B}$, где h, μ — PF-пара для T. Обратно, если выполнены предварительные ограничения на T и T неразложимо, то из его сходимости следует примитивность.*

Следствие. 4. *Если $A \geqslant 0$ — примитивный п. п. оператор в пространстве Крейна $\mathfrak{B}$, то существует сильный $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, и если этот предел отличен от нуля, то он равен $\mu(\cdot)h$, где h, μ — PF-пара для A.*

3. Пусть Q — компакт, $\mathfrak{B} = C(Q)$, $\mathfrak{C} = C_+(Q)$ — конус неотрицательных непрерывных функций. В этой ситуации теорема 3 приводит к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть T — неотрицательное п. п. (или а. п. п. в абелевом случае) представление топологической полугруппы S в пространстве $C(Q)$ и ядро Сушкевича K_T есть группа. Если $r(T(s)) \equiv 1$, то существует PF-пара для T.*

Действительно, $\| T(s) 1 \| = \| T(s) \| \geqslant r(T(s)) = 1$, т. е. орбита функции 1 отделена от нуля.

Представление T в $C(Q)$ называется стохастическим (марковским), если $T(s) 1 \equiv 1$.

Пример. Пусть G — компактная группа, Q — компакт, $F: G \to \mathrm{Homeo}(Q)$ — действие G в Q. Полагая $(T_F(g)\varphi)(t) = \varphi(F(g^{-1})t)$, получаем стохастическое представление группы G в $C(Q)$.

Два представления T_1, T_2 в $C(Q_1)$ и $C(Q_2)$ называются положительно эквивалентными, если существует сплетающий их обратимый оператор $V: C(Q_1) \to C(Q_2)$, неотрицательный вместе с V^{-1}. Отметим, что автоморфизмы пространства Крейна $C(Q)$ описываются следующим образом: $(V\varphi)(t) = \omega(t)\varphi(\gamma(t))$, где $\gamma: Q \to Q$ — гомеоморфизм, $\omega > 0$. Если $\omega = 1$ и только в этом случае V — стохастический. Поэтому любое стохастическое представление группы G в $C(Q)$ порождается некоторым ее действием в Q.

Лемма 2. *Для того чтобы представление $T \geqslant 0$ в $C(Q)$ было положительно эквивалентно стохастическому, необходимо и достаточно, чтобы существовала инвариантная функция $h > 0$.*

Всюду далее предполагается, что представление T удовлетворяет всем условиям теоремы 5. Пусть P — его граничный проектор. Очевидно, $P \geqslant 0$, и только это свойство используется ниже. Положим $\varepsilon = P1$, $E_+ = \{t \mid \varepsilon(t) > 0\}$. Носителем supp P проектора P назовем множество таких t, что если $\varphi \in C(Q)$, $\varphi \geqslant 0$, $\varphi(t) \neq 0$, то $P\varphi \neq 0$ (это определение приложимо к любому неотрицательному оператору). Положим теперь $E =$

$= E_+ \cap \operatorname{supp} P$ и отождествим в E точки, неразличаемые функциями вида $\hat{P}\varphi = P\varphi/\varepsilon$. Полученное факторпространство обозначим через $\tilde{E}$, а композицию оператора $\hat{P}$ с переходом к функциям на $\tilde{E}$ — через $\tilde{P}$.

Лемма 3. *Факторпространство $\tilde{E}$ компактно. Оператор $\tilde{P}$ отображает $C(Q)$ на $C(\tilde{E})$, $\|\tilde{P}\| \leqslant 1$*

Следствие 5. *Упорядоченные банаховы пространства* $\operatorname{Im} P$ *и* $C(\tilde{E})$ *изоморфны.*

На основе изложенного доказывается следующая основная структурная теорема.

Теорема 6. *Представление T на своем граничном подпространстве $\mathfrak{B}_1$ положительно эквивалентно стохастическому представлению, порождаемому естественным действием F_T ядра Сушкевича K_T на факторкомпакте $\tilde{E}$. Если представление T стохастическое, то упомянутая эквивалентность является изометрией.*

Представление T называется эргодическим, если действие F_T транзитивно и, кроме того, $E = Q$ (т. е. $\varepsilon > 0$, $\operatorname{supp} P = Q$). В общем случае $\tilde{E}$ разбивается на орбиты действия F_T. Их прообразы в E называются эргодическими классами. Каждый эргодический класс замкнут в E и представляет собой объединение некоторого семейства классов эквивалентности, отвечающей факторизации $E \to \tilde{E}$. Эти последние называются классами импримитивности; их число (или ∞, если их бесконечно много) называется индексом импримитивности данного эргодического класса. Эргодический класс называется примитивным, если его индекс импримитивности равен единице. Наконец, эргодическое представление называется топологически импримитивным, если его единственный эргодический класс примитивен.

Теорема 7. *Для того чтобы представление T было эргодическим, необходимо и достаточно, чтобы оно было неразложимым.*

Теорема 8. *Для того чтобы представление T было топологически примитивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было примитивным.*

Отметим, что неразложимость в $C(Q)$ сводится к следующему: $\forall \varphi \geqslant 0$ $(\varphi \neq 0)$ $\forall t \in Q \exists s : (T(s)\varphi)(t) > 0$.

С описанными выше классами связаны эргодические компоненты и компоненты импримитивности самого представления. Их построение довольно громоздко и мы не будем здесь на этом останавливаться.

Спектральные свойства эргодических представлений суммируются в следующей теореме.

Теорема 9. *Пусть T — эргодическое представление. Тогда* 1) *унитарные веса представления T образуют группу, соответствующие весовые подпространства одномерны, модули всех весовых функций пропорциональны инвариантной функции $h > 0$ (в стохастическом случае постоянны);* 2) *представление T положительно эквивалентно стохастическому в том же пространстве;* 3) *если χ — какой-нибудь унитарный вес, то представление $\chi \otimes T$ эквивалентно T;* 4) *если S абелева, то представление $T \mid \mathfrak{B}_1$ положительно эквивалентно представлению, порожденному регулярным действием S на ядре Сушкевича K_T. При этом группа унитарных весов совпадает с дуальной группой K_T^*.*

Спектральная теория стохастических п. п. операторов в $C(Q)$ была в основном построена в работах [4—6]. Эти результаты охватываются развитой выше теорией, из которой вытекает следующая серия утверждений.

Теорема 10. *Пусть A — п. п. оператор в $C(Q)$, $A \geqslant 0$, $r(A) = 1$. Обозначим через P граничный проектор. Справедливы следующие утверждения.*

1. $A^n \mid \operatorname{Ker} P \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *(сильно), $A \mid \operatorname{Im} P$ положительно эквивалентен стохастическому оператору, порождаемому гомеоморфизмом F_A некоторого компакта $\tilde{E}$.*

2. *Существует PF-пара h, μ для оператора A; $h > 0$, $\mu > 0$.*

3. *Если оператор A неразложим, то* a) $\tilde{E}$ — *фактор-компакт компакта Q, гомеоморфизм F_A топологически сопряжен с топологически транзитивным сдвигом по группе K;* b) *унитарный дискретный спектр оператора A — группа, изоморфная группе K^*;* c) *собственные подпространства, отвечающие унитарным собственным значениям, одномерны; модули соответствующих собственных функций пропорциональны h;* d) *для каждого собственного значения λ с $|\lambda|=1$ оператор λA подобен A и, таким образом, спектр оператора A инвариантен относительно умножения на λ.*

4. *Если A примитивен, то* $\lim\limits_{n\to\infty} A^n\varphi = \left(\int\limits_Q \varphi d\mu\right) h$ *для всех функций* $\varphi \in C(Q)$.

Последнее утверждение дает новый подход к так называемому «рюэлевскому варианту» теоремы Перрона—Фробениуса [7], а также применяется в некоторых родственных вопросах теории динамических систем [8].

1. *Leew K. de, Glicksberg I.* Applications of almost periodic compactifications.— Acta Math., 1961, **105**, p. 63—97.
2. *Любич Ю. И.* О граничном спектре сжатий в пространствах Минковского.—Сиб. мат. журн., 1970, **11**, № 2, с. 165—171.
3. *Yosida K., Kakutani S.* Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem.— Ann. of Math., 1941, **42**, p. 188—228.
4. *Jamison B.* Asymptotic behavior of iterates of continuous functions under a Markov operator.— J. Math. Anal. Appl., 1964, **9**, p. 203—214.
5. *Rosenblatt M.* Equicontinuous Markov operators.— Теория вероятн. и ее применения, 1964, **9**, № 2, с. 205—222.
6. *Jamison B., Sine R.* Irreducible almost periodic Markov operators.— J. Math. Mech., 1969, **18**, p. 1043—1057.
7. *Боуэн Р.* Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979.— 244 с.
8. *Любич М. Ю.* О мере максимальной энтропии рационального эндоморфизма сферы Римана.— Функц. анализ и его прил., 1982, **16**, вып. 4, с. 78—79.

Харьков. гос. ун-т

Поступила 18.04.83