УДК 517.956

І. М. Александрович, канд. фіз.-мат. наук (Київ. ун-т)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

We construct differential operators $Lg(z)$, $Kg(z)$, $Nf(\overline{z})$, $Mf(\overline{z})$ that map arbitrary functions, whish are holomorphic in a simply-connected domain D of the plain $z = x + iy$, into regular solutions of the equation

$$W_{z\overline{z}} + A(z,\overline{z})W_{\overline{z}} + B(z,\overline{z})W = 0.$$

Examles, in which the constructed differential operators are used to solve the main boundary-value problems in mathematical physics, are given.

Побудовані диференціальні оператори $Lg(z)$, $Kg(z)$, $Nf(\overline{z})$, $Mf(\overline{z})$, які переводять довільні голоморфні в однозв'язній області D площини $z = x + iy$ функції в регулярні розв'язки рівняння

$$W_{z\overline{z}} + A(z,\overline{z})W_{\overline{z}} + B(z,\overline{z})W = 0.$$

Наведено приклади застосування побудованих диференціальних операторів для розв'язування основних крайових задач математичної фізики.

В роботі розглядається диференціальне рівняння

$$W_{z\overline{z}} + A(z,\overline{z})W_{\overline{z}} + B(z,\overline{z})W = 0, \tag{1}$$

де A, B — голоморфні функції в $D \times \overline{D} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Диференціальний оператор $Lg(z)$, що визначає розв'язок рівняння (1), шукаємо у вигляді

$$Lg(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z, \overline{z})g^{(k)}(z), \tag{2}$$

де $g(z)$ — довільна голоморфна в області D функція, тобто $g(z) \in H(D)$, $a_k(z, \overline{z})$, $k = \overline{0,n}$ — невідомі функції, неперервно диференційовні в $(D, \overline{D})$.

Нехай $a_k(z, \overline{z}) = C_k \eta^{n-k}(z, \overline{z})$, де $C_k \in \mathbb{C}$, $C_0 \neq 0$, $C_n = 1$, $\eta = \eta(z, \overline{z}) \neq 0$ в $(D \times \overline{D})$. Підставляючи праву частину (2) в рівняння (1) і прирівнюючи коефіцієнти при $g^{(k)}(z)$, $k = \overline{0,n}$, для знаходження сталих C_k, $k = \overline{0,n-1}$, і функції $\eta(z, \overline{z})$ одержуємо таку систему рівнянь:

$$C_k\{(n-k)\eta^{n-k-1}\eta_{z\overline{z}} + (n-k)(n-k-1)\eta^{n-k-2}\eta_z\eta_{\overline{z}} + A(n-k)\eta^{n-k-1}\eta_{\overline{z}} + B\eta^{n-k}\} + C_{k-1}(n-k+1)\eta^{n-k}\eta_{\overline{z}} = 0, \quad k = \overline{0,n-1}, \tag{3}$$

$$C_{n-1}\eta_{\overline{z}} = -B \ (C_{-1} = 0), \quad k = n. \tag{4}$$

Із співвідношення (3) при $k = 0$, $k = 1$ знаходимо

$$\begin{gathered} n\eta^{n-1}\eta_{z\bar z} + n(n-1)\eta^{n-2}\eta_z\eta_{\bar z} + An\eta^{n-1}\eta_{\bar z} + B\eta^n = 0, \\ C_1\{(n-1)\eta^{n-2}\eta_{z\bar z} + (n-1)(n-2)\eta^{n-3}\eta_z\eta_{\bar z} + \\ + A(n-1)\eta^{n-2}\eta_{\bar z} + B\eta^{n-1}\} + C_0 n\eta^{n-1}\eta_{\bar z} = 0. \end{gathered} \tag{3'}$$

Звідси

$$\begin{gathered} \eta\eta_{z\bar z} = -(n-1)\eta_z\eta_{\bar z} - A\eta_{z\bar z}\,\eta_{\bar z} - \frac{B}{n}\eta^2, \\ C_1\left\{-\eta_z\eta_{\bar z} + B\eta^2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right\} + C_0\frac{n}{n-1}\eta^2\eta_{\bar z} = 0, \quad n \neq 0, 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Підставляючи в останню рівність B за формулою (4), після деяких перетворень одержуємо

$$-\frac{\eta_z}{\eta^2} = c, \quad c = \frac{1}{n-1}\left(\frac{C_{n-1}}{n} - \frac{nC_0}{C_1}\right). \tag{6}$$

Нехай $\eta_z = 0$. Тоді $\eta = \overline{\gamma(z)}$, $\gamma \in H(D)$. Із формул (4) і (5) знаходимо

$$A = \overline{\beta(z)},\ B = -n\overline{\beta'(z)}, \tag{7}$$

де

$$\overline{\beta(z)} = \frac{C_{n-1}}{n}\overline{\gamma(z)}.$$

Рівняння (1) запишеться у вигляді

$$W_{z\bar z} + \overline{\beta(z)}\,W_{\bar z} - n\overline{\beta'(z)}W = 0, \tag{1'}$$

а шуканий оператор Lg набуде вигляду

$$L_1 g(z) = \sum_{k=0}^{n} C_k\overline{\beta^{n-k}(z)}\,g^{(k)}(z). \tag{2'}$$

Для знаходження C_k одержуємо рекурентне співвідношення

$$C_{k-1} = \frac{kC_k}{n-k+1}, \quad C_{n-1} = n, \quad C_n = 1. \tag{8}$$

Остаточно диференціальний оператор (2′) матиме вигляд

$$L_1 g(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\overline{\beta^{n-k}(z)}\,g^{(k)}(z). \tag{2''}$$

Нехай $\eta_z \neq 0$. Тоді з (6) маємо

$$\eta(z, \bar z) = \frac{1}{cz + \overline{\psi(z)}}. \tag{9}$$

Підставляючи (9) в (4) і в (5), при умові $C_n(cz + \overline{\psi(z)}) \neq 0$ знаходимо

$$A = \frac{c}{n(cz + \overline{\psi(z)})}\left[\frac{C_{n-1}}{c} + n(n+1)\right], \quad B = C_{n-1}\frac{\overline{\psi'(z)}}{(cz + \overline{\psi(z)})^2}. \tag{10}$$

Позначимо

$$\lambda = \frac{1}{n}\left[\frac{C_{n-1}}{c} + n(n+1)\right].$$

Звідси $C_{n-1} = c(n\lambda - n(n+1))$. Тоді формули (10) запишуться у вигляді

$$A = \frac{c\lambda}{cz + \overline{\psi(z)}}, \; B = -nc(n+1-\lambda)\frac{\overline{\psi'(z)}}{\left(cz + \overline{\psi(z)}\right)^2}. \tag{10'}$$

Підставляючи функції $\eta(z, \bar{z})$, A, B, визначені відповідно формулами (10) і (10′), в систему рівнянь (3), (4), для знаходження коефіцієнтів C_k одержуємо рекурентну формулу

$$C_{k-1} = \frac{c(k-2n-1+\lambda)k}{n-k+1}C_k. \tag{11}$$

Враховуючи, що $C_n = 1$, маємо

$$C_k = (-1)^{n-k}\frac{n!(n+1-\lambda)_{n-k}C^{n-k}}{k!(n-k)!}. \tag{12}$$

Отже, оператор Lg має вигляд

$$L_2 g(z) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k(n+1-\lambda)_{n-k}C^{n-k}\frac{g^{(k)}(z)}{\left(cz + \overline{\psi(z)}\right)^{n-k}}. \tag{13}$$

Одержані результати сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема 1. *Якщо диференціальне рівняння* (1) *має вигляд* (1′), *то функція* $W(z, \bar{z}) = L_1 g(z)$ (*де* $L_1 g(z)$ *визначається формулою* (2″), $g(z) \in H(D)$) *є розв'язком цього рівняння.*

Якщо диференціальне рівняння (1) *має вигляд*

$$W_{z\bar{z}} + \frac{c\lambda}{cz + \overline{\psi(z)}}W_{\bar{z}} - cn(n+1-\lambda)\frac{\overline{\psi'(z)}}{\left(cz + \overline{\psi(z)}\right)^2}W = 0, \tag{1''}$$

де C *і* λ — *будь-які сталі, причому* $C \neq 0$, $\lambda \neq n+1, n+2, \ldots, 2n$; $cz + \overline{\psi(z)} \neq 0$ *в області* D, *то функція* $W(z, \bar{z}) = L_2 g(z)$ *є розв'язком цього рівняння.*

***Зауваження* 1.** Якщо у формулі (2) $n = 1$, то теорема 1 може бути сформульована так.

Якщо коефіцієнти $A(z, \bar{z})$ *і* $B(z, \bar{z})$ *рівняння* (1) *задовольняють умову*

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(A + \frac{\partial}{\partial z}\ln B\right) + B(z, \bar{z}) = 0, \tag{14}$$

то функція

$$W(z, \bar{z}) = Kg(z) = \left(A + \frac{\partial}{\partial z}\ln B\right)g(z) + g'(z) \tag{15}$$

(*де* $g(z) \in H(D)$) *є розв'язком рівняння* (1).

Справедливість цього твердження випливає з формул (3′) при $n = 1$.

Оператор $Nf\overline{(z)}$ шукатимемо у вигляді

$$Nf\overline{(z)} = \sum_{k=0}^{n} C_k \tau^{\mu-k}\overline{f^{(k)}(z)}, \tag{16}$$

де $C_k \in \mathbb{R}$, $C_0 \neq 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\tau = \tau(z, \bar{z}) \neq 0$ в $(D \times \overline{D})$.

Підставляючи праву частину (16) в (1) і прирівнюючи коефіцієнти при $\overline{f^{(k)}(z)}$, одержуємо систему

$$\mu(\mu-1)\tau_z\tau_{\bar z}+\mu\tau\tau_{z\bar z}+A\mu\tau\tau_{\bar z}+B\tau^2=0, \tag{17}$$

$$C_{k-1}[(\mu-k+1)\tau^2\tau_z+A\tau^3]+C_k[(\mu-k)(\mu-k-1)\tau_z\tau_{\bar z}+$$
$$+(\mu-k)\tau\tau_{z\bar z}+A(\mu-k)\tau\tau_{\bar z}+B\tau^2]=0,\quad k=\overline{1,n}, \tag{18}$$

$$A\tau+(\mu-n)\tau_z=0. \tag{19}$$

З рівнянь (19) і (17) знаходимо

$$A=(n-\mu)\frac{\tau_z}{\tau},\quad B=\frac{\mu}{\tau^2}[(n-1)\tau_z\tau_{\bar z}+\tau\tau_{z\bar z}]. \tag{20}$$

Підставляючи A і B в (18), одержуємо

$$C_{k-1}(n-k+1)\tau^2\tau_z=C_k k[\tau_z\tau_{\bar z}(\mu+n-k-1)\tau\tau_{z\bar z}],\quad k=\overline{1,n}. \tag{21}$$

Розглядаючи (21) при $k=1, k=2,$ приходимо до співвідношення

$$-\frac{\tau_{\bar z}}{\tau^2}=-\frac{C_0 n}{C_1}+\frac{C_1(n-1)}{2C_2}=c.$$

З останньої рівності, враховуючи, що $c\neq 0$ (оскільки $B\neq 0$), знаходимо

$$\tau=\frac{1}{\varphi(z)+c\bar z}. \tag{22}$$

Підставляючи (22) в (20) і (21), одержуємо

$$C_{k-1}=kc\frac{\mu+n-k+1}{k-n-1}C_k,$$

$$A=(\mu-n)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)+c\bar z},\ B=-\mu(n+1)\frac{c\varphi'(z)}{(\varphi(z)+c\bar z)^2}.$$

Нехай $C_n=1$. Тоді

$$C_{n-1}=-nc(\mu+1),$$

$$C_{n-2}=\frac{n!c^2}{2!(n-2)!}(\mu+1)_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Отже,

$$C_k=(-1)^{n-k}\binom{n}{k}c^{n-k}(\mu+1)_{n-k},\quad \mu\neq-1,-2,\dots,-n.$$

Таким чином, доведена така теорема.

Теорема 2. *Якщо диференціальне рівняння* (1) *має вигляд*

$$W_{z\bar z}+(\mu-n)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)+c\bar z}W_{\bar z}-\mu(n+1)\frac{c\varphi'(z)}{(\varphi(z)+c\bar z)^2}W=0,$$

де C і μ — будь-які дійсні числа, причому $c\neq 0$, $\mu\neq-1,-2,\dots,-n$; $\varphi(z)+$ $+c\bar z\neq 0$ в $D\times\overline{D}$, то функція

$$W(z,\bar{z}) = N\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}c^{n-k}\binom{n}{k}(\mu+1)_{n-k}\frac{\overline{f^{(k)}(z)}}{(\varphi(z)+c\bar{z})^{\mu-k}}, \quad (23)$$

де $f(z)\in H(D)$, *є розв'язком цього рівняння.*

Зауваження 2. При $n=1$ у формулі (16) теорема 2 може бути сформульована так.

Якщо коефіцієнти $A(z,\bar{z})$, $B(z,\bar{z})$ *задовольняють умову*

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\ln\left(B-\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\right)+B = 2\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}, \quad \left(B-\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\neq 0\right),$$

то функція

$$W(z,\bar{z}) = M\overline{f(z)} =$$

$$= \exp\left[-\int_{z_0}^{z}A(\sigma,\bar{z})d\sigma\right]\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\ln\left(B-\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\right)-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial A(\sigma,\bar{z})}{\partial\bar{z}}d\sigma\right]\overline{f(z)}+\overline{f'(z)}\right\}, \quad (24)$$

де $f(z)\in H(D)$, *є розв'язком рівняння* (1).

Якщо коефіцієнти $A(z,\bar{z})$, $B(z,\bar{z})$ рівняння (1) $(B\neq 0)$ задовольняють умову $B-\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}=0$, то його розв'язок можна подати у вигляді

$$W(z,\bar{z}) = M\overline{f(z)} = \exp\left[-\int_{z_0}^{z}A(\sigma,\bar{z})d\sigma\right]\left\{\overline{f'(z)}+\overline{f(z)}\right\}.$$

Справедливість цих тверджень випливає з формул (17) (18) і (19) при $n=1$.

Справедливі такі теореми.

Теорема 3. *Диференціальне рівняння* (1) *при* $B\neq 0$ *в* $D\times\overline{D}$ *має розв'язок вигляду*

$$W(z,\bar{z}) = \left(A+\frac{\partial}{\partial z}\ln B\right)g(z) + g'(z) +$$

$$+\exp\left[-\int_{z_0}^{z}A(\sigma,\bar{z})d\sigma\right]\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\ln\left(B-\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\right)-\int_{z_0}^{z}\frac{\partial A(\sigma,\bar{z})}{\partial\bar{z}}d\sigma\right]\overline{f(z)}+\overline{f'(z)}\right\}, \quad (25)$$

де $\{g(z),f(z)\}\in H(D)$, *тільки тоді, коли коефіцієнти* A *і* B *задовольняють умови*

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(A+\frac{\partial}{\partial z}\ln B\right)+B = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}\ln\left(B-\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}\right)+B = 2\frac{\partial A}{\partial\bar{z}}. \quad (26)$$

Теорема 4. *Диференціальне рівняння* (1) *при* $B\neq 0$ *в* $D\times\overline{D}$ *має розв'язок вигляду*

$$W(z,\bar{z}) = \left(A+\frac{\partial}{\partial z}\ln B\right)g(z)+g'(z)+\exp\left[-\int_{z_0}^{z}A(\sigma,\bar{z})d\sigma\right]\left[\overline{f(z)}+\overline{f'(z)}\right], \quad (27)$$

де $\{f(z),g(z)\}\in H(D)$, *тільки тоді, коли коефіцієнти* A *і* B *задовольняють умови*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(A+\frac{\partial}{\partial z}\ln B\right)+B = 0,$$
$$B-\frac{\partial A}{\partial z} = 0. \tag{28}$$

***Зауваження* 3.** У формулі (27) суму $\overline{f(z)}+\overline{f'(z)}$ можна записати завдяки довільності функцій як

$$\overline{f(z)}+\overline{f'(z)} = \overline{f_1(z)}.$$

Наведемо приклади застосування побудованих диференціальних операторів для розв'язування задач математичної фізики.

Задача Діріхле. Нехай D — права півплощина $x>0$. Треба знайти регулярний в D розв'язок рівняння

$$W_{z\bar{z}}-\frac{1}{z+\bar{z}}(W_z+W_{\bar{z}}) = 0, \tag{29}$$

що задовольняє крайову умову

$$\lim_{\bar{z}\to -z} W(z,\bar{z}) = \alpha(y), \quad -\infty<y<\infty. \tag{30}$$

Тут $\alpha(y)$ — задана неперервна обмежена функція від y.

Розв'язок задачі (29), (30) має вигляд

$$W(z,\bar{z}) = \frac{(z+\bar{z})^3}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(t)\frac{dt}{\left(|t+iz|^2\right)^2}. \tag{31}$$

Задача. Знайти регулярний у півплощині $x>0$ розв'язок рівняння (29), що задовольняє крайову умову

$$\lim_{\bar{z}\to -z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}+kW\right) = \beta(y), \quad -\infty<y<\infty, \ k-\text{const}>0. \tag{32}$$

Тут $\beta(y)$ — задана неперервна обмежена функція від y.

Розв'язок має вигляд [1]

$$W(z,\bar{z}) = \frac{(z+\bar{z})^3}{4\pi k}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(t)\frac{dt}{\left(|t+iz|^2\right)^2}.$$

1. *Александрович И. Н.* Дифференциальные операторы, определяющие решение одного класса уравнений эллиптического типа // Укр мат. журн. – 1989. – **41**, №6. – С. 825-828.

Одержано 25.01.93