УДК 517.941

Е. П. Белан, канд. физ.-мат. наук (Симферопол. ун-т),
О. Б. Лыкова, д-р. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Linear parabolic equations with rapidly changing coefficients are considered. It is assumed that the averaged equation, which corresponds to the initial equation, admits an exponential splitting. Conditions, which imply that the initial equations also possess an exponential splitting, are found. It is shown that integral manifolds play an important role in constructing a transformation which splits the equation under consideration. To prove existence of integral manifolds V. V. Zhykov's results on substantiating the averaging method for linear parabolic equations are used.

Розглядаються лінійні параболічні рівняння з швидко змінними коефіцієнтами. Припускається, що відповідне вихідному усереднене рівняння допускає експоненціальне розщеплення. Вияснюються умови, за яких вихідне рівняння також допускає експоненціальне розщеплення. Встановлено важливу роль інтегральних многовидів у побудові перетворення, що здійснює розщеплення розглядуваних рівнянь. При доведенні існування інтегральних многовидів використовуються результати В. В. Жикова по обгрунтуванню метода усереднення для лінійних параболічних рівнянь.

Введение. В работах [1, 2] тщательно изучены вопросы регулярности, корректности, экспоненциальной дихотомии линейных параболических операторов $L = d/dt + A(t)$; выяснена существенная связь этих вопросов с проблемой усреднения на вещественной оси. Ряд близких результатов, послуживших фундаментом для создания методов исследования устойчивости линейных параболических уравнений с почти периодическими коэффициентами, получен в работе [3]. Естественным обобщением понятия экспоненциальной дихотомии является понятие экспоненциального расщепления. В работе [4] установлено, что оператор L с ограниченной оператор-функцией $A(t)$, допускающий экспоненциальное расщепление, устойчив по отношению к малым возмущениям.

При переходе к неограниченным операторам применение классических методов исследования сопряжено с определенными затруднениями. В работах [1, 2] очерчены границы применимости классического подхода к указанной проблеме, связанного с преобразованием Н. Н. Боголюбова, которое приводит интегрально малые возмущения к возмущениям, малым в обычном смысле.

Проблему построения преобразования, осуществляющего экспоненциальное расщепление возмущенного уравнения, можно рассматривать как проблему построения интегральных многообразий [4 – 11] этих уравнений. Эта точка зрения является определяющей в данной работе.

Результаты данной работы связаны с проблемой обоснования метода усреднения для параболических уравнений. В связи с этим отметим монографии [11, 12], а также обзорную статью [13], в которой содержится литература по обоснованию метода усреднения для параболических уравнений. В дальнейшем будем следовать обозначениям, принятым в [1, 2].

Обозначим через $\mathfrak{B}$ основное сепарабельное банахово пространство; $C = C(\mathfrak{B})$ — банахово пространство непрерывных функций $f\colon R \to \mathfrak{B}$ с нормой sup; $M^p = M^p(\mathfrak{B})$, $L^p = L^p(a, b, \mathfrak{B})$ — банаховы пространства измеримых функций с нормами

$$\sup_{t \in R} \left(\int_0^1 \|u(t+s)\|^p \, ds \right)^{1/p}, \quad \left(\int_a^b \|u(t)\|^p \right)^{1/p} \quad (p \geq 1);$$

$S(\mathfrak{B})$ — пространство измеримых функций с нормой

$$\sup_{\substack{t', t'' \in R \\ |t' - t''| \le 1}} \left\| \int_{t'}^{t''} u(s)\,ds \right\|;$$

$\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ — банахово пространство линейных операторов $\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ с операторной нормой; для функции $f(t) \in M^1(\mathfrak{B})$ через $\bar{f}$ обозначим предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} f(t)\,dt,$$

достигающийся равномерно по параметру $\alpha \in R$; производной абстрактной функции $u(t)$ называется локально интегрируемая (по Бохнеру) функция $u'(t)$, для которой выполняется равенство $u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds$.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\ ,\ )$. Рефлексивное пространство E с сопряженным E^* называется вложимым, если имеется непрерывное плотное вложение $E \subset H \subset E^*$, а билинейная форма $y(x)$, $y \in E^*$, $x \in E$ совпадает со скалярным произведением на H, когда $x, y \in H$.

Линейный оператор $A : E \to E^*$ называется коэрцитивным, или сильно эллиптическим, если выполняется неравенство $\mathrm{Re}\,(Ax, x) \ge c_1 \|x\|_E^2 - c_2 \|x\|_H^2$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Оператор A можно считать неограниченным оператором в H, если задать область его определения равенством $D = \{x \in H : Ax \in H\}$. Это подразумевается, когда речь идет о спектре оператора A [1]. Оператор $L = d/dt + A(t)$ называется параболическим, если $A(t)$ — непрерывная функция в $\mathrm{Hom}\,(E, E^*)$ и неравенство коэрцитивности выполняется равномерно по $t \in R$. Для параболического оператора выполняется условие разрешимости вправо, если в качестве основного пространства взято пространство H.

Исследования параболического оператора L, выполненные в [1, 2], опираются на априорные оценки решений уравнения $Lu = f$, где $f(t) \in M^2(E^*)$. Предположим, что $f(t) \in S(E) \cap M^2(E^*)$. После скалярного умножения уравнения $Lu = f$ на u, интегрирования и применения формулы интегрирования по частям получаем оценки

$$\|u(t)\|^2 \le 2\|u(t_0)\|^2 + c_2 \int_{t_0}^{t} \|u\|^2\,ds + \left\| \int_{t_0}^{t} f\,d\sigma \right\|_E^2 + c_1^* \left(\int_{t_0}^{t} \left\| \int_{s}^{t} f\,d\sigma \right\|^2 ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} \left\| \int_{s}^{t} f(\sigma)\,d\sigma \right\|_E^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t} \|f(s)\|_E^2\,ds \right)^{1/2}, \quad t \ge t_0. \tag{1}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+1} \|u\|_E^2\,dt \le c_1^* \left(\|u(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^{t_0+1} \left\| \int_{s}^{t_0+1} f\,d\sigma \right\|_E^2 ds + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{t_0}^{t_0+1} \left\| \int_{s}^{t_0+1} f\,d\sigma \right\|_E^2 \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_0+1} \|f\|_{E^*}^2\,ds \right)^{1/2} \right), \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+1} \|u'\|_{E^*}^2\,dt \le c_1^* \left(\|u(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^{t_0+1} \left\| \int_{s}^{t_0+1} f\,d\sigma \right\|_E^2 ds + \right.$$

$$+\left(\int_{t_0}^{t_0+1}\left\|\int_s^{t_0+1} f\,d\sigma\right\|_E^2\right)^{1/2}\left(\int_{t_0}^{t_0+1}\|f\|_{E^*}^2\,ds\right)^{1/2}+\int_{t_0}^{t_0+1}\|f\|_{E^*}^2\,ds\Bigg), \qquad (3)$$

где t_0 — произвольная точка вещественной оси.

Заметим, что константа c_1^* зависит лишь от констант коэрцитивности и величины $\sup_{t\in R}\|A(t)\|_{\mathrm{Hom}(E,E^*)}$. Отсюда следует, что оценки (1) – (3) сохраняются, если в оператор A ввести параметр ω.

1. Существование интегральных многообразий. Предположим, что справедливо равенство $E = E_1 + E_2$, где E_1 — m-мерное подпространство E.

Определение 1. *Множество $\Omega_m \subset R\times E$, представимое в виде*

$$\Omega_m = \{(t,u)\in R\times E:\ u = x+\Phi(t)x\},$$

где $\Phi(t)$ — непрерывная и ограниченная на вещественной оси функция со значением в пространстве $\mathrm{Hom}(E_1,E_2)$, называется линейным размерности m интегральным многообразием линейного однородного параболического уравнения $Lu=0$, если для всякой точки $(t_0,u_0)\in\Omega_m$ существует решение этого уравнения $u(\cdot)$, определенное на вещественной оси R, удовлетворяющее условию $u(t_0)=u_0$ и такое, что $(t,u(t))\in\Omega_m$ для всех $t\in R$.

Определение 2. *Множество $\Omega^m \subset R\times E$, представимое в виде*

$$\Omega^m = \{(t,u)\in R\times E:\ u = F(t)y+y\},$$

где $F(t)$ — непрерывная и ограниченная на вещественной оси функция со значением в пространстве $\mathrm{Hom}(E_2,E_1)$, называется линейным коразмерности m интегральным многообразием линейного однородного параболического уравнения $Lu=0$, если для всякой точки $(t_0,u_0)\in\Omega^m$ существует решение этого уравнения $u(\cdot)$, определенное для всех $t\ge t_0$, удовлетворяющее начальному условию $u(t_0)=u_0$ и такое, что $(t,u(t))\in\Omega^m$ для $t\ge t_0$.

Рассмотрим задачу существования линейных интегральных многообразий линейного параболического уравнения

$$L_\omega u = \left(\frac{d}{dt}+A(\omega t)\right)u = 0 \qquad (4)$$

при $\omega \gg 1$.

Будем рассматривать эту задачу при следующих предположениях.

Пусть пространство E^* имеет следующее аппроксимационное свойство: существует последовательность линейных операторов $P_n\colon E^*\to E^*$ таких, что $P_mE^*\subset E$, $P_m y \xrightarrow{E^*} y$ $(y\in E^*)$ $m\to\infty$.

Предположим, что $A(t)$ — компактная функция со средним значением

$$\overline{A} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} A(s)\,ds,$$

при этом предел не зависит от α и является равномерным на R.

Пусть спектр оператора $\overline{A}$ допускает разложение на два спектральных множества $\sigma_0=\sigma(\overline{A})\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\,\lambda=0\}$ и $\sigma_+=\sigma(\overline{A})\cap\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\,\lambda>0\}$. Пусть $H = H_1+H_2$ — разложение пространства H на $\overline{A}$-инвариантные подпространства, отвечающие указанному спектральному разложению, причем пространство H_1 является m-мерным.

Пусть усредненный оператор $\overline{L} = d/dt + \overline{A}$ на подпространстве H_2 пространства H является регулярным.

Предположим, что функция $\tilde{A}(t)(\overline{A}+I)^{-1}$ является непрерывной и ограниченной на вещественной оси со значениями в пространстве $\mathrm{Hom}(E, E)$.

Отметим, что для практически важных случаев параболических уравнений последнее требование выполняется.

В связи с разложением пространства H отметим соответствующее вложение $E_2 \subset H_2 \subset E_2^*$. Далее m-мерные нормированные пространства E_1^*, H_1 отождествим с пространством E_1. Пусть P, Q — проекторы E^* на E_j^*, $j = 1$, 2. Полагая, что операторы P, Q коммутируют с оператором $\overline{A}$, уравнение (4) запишем в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + Bx + P\tilde{A}(\omega t)(x+y) &= 0, \\ \frac{dy}{dt} + Cy + Q\tilde{A}(\omega t)(x+y) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $B = \overline{A}_{|H_1}$, $C = \overline{A}_{|H_2}$, $\tilde{A}(t) = A(t) - \overline{A}$.

Введем следующие функциональные пространства:

$$X = C(H_2), \quad Y = M^2(E_2), \quad Z = M^2\left(E_2^*\right), \quad V = S(E_2), \quad W = X \cap Y.$$

Если $y \in W$, то $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y\|_Y$.

Для заданных $\lambda, \tau \in R_+ \times R$ обозначим $W_{\lambda,\tau} = \{e^{\lambda|t-\tau|}y(t),\ y \in W\}$ с нормой $\|e^{\lambda|t-\tau|}y(t)\|_{W_{\lambda,\tau}} = \|y\|_W$.

Мы докажем существование линейного интегрального многообразия размерности m системы (5), опираясь на следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть относительно системы* (5) *выполнены указанные выше условия. Тогда существуют такие* $\omega_0 > 0$, $\lambda > 0$, *что для всякого* $\omega > \omega_0$ *и любых* $(\tau, \eta) \in R \times E_1$ *существует единственное решение* $x(t, \tau, \eta, \omega)$, $y(t, \tau, \eta, \omega)$ *системы* (5), *определенное на вещественной оси, такое, что* $x(\tau, \tau, \eta, \omega) = \eta$, $y(\cdot, \tau, \eta, \omega) \in W_{\lambda,\tau}$. *Функция* $y(t, \tau, \eta, \omega)$ *является непрерывной функцией* t *в пространстве* E_2, *а ее производная — непрерывной функцией в пространстве* E_2^*.

Отображение $\eta \to (x(\cdot, \tau, \eta, \omega), y(\cdot, \tau, \eta, \omega))$ является линейным, отображение $\tau \to (x(\cdot, \tau, \eta, \omega), y(\cdot, \tau, \eta, \omega))$ дифференцируемо на вещественной оси.

Доказательству теоремы предшествует ряд лемм.

Рассмотрим оператор L_ω, определяемый равенством

$$L_\omega y = \left(\frac{d}{dt} + C + Q\tilde{A}(\omega t)\right)y. \tag{6}$$

Согласно основному результату работы [2] — теореме 3 — существует такое ω_0, что для каждого $\omega > \omega_0$ оператор L_ω является равномерно регулярным.

Лемма 1. *Предположим, что функция* $g \in X \cap V$. *Тогда существуют постоянные* $\omega_1 \geq \omega_0$, $k_1 > 0$ *такие, что для каждого* $\omega > \omega_1$ *справедливы неравенства*

$$\left\|L_\omega^{-1} g\right\|_X \leq k_1 \|g\|_V,$$

$$\left\| L_\omega^{-1} g \right\|_Y \leq k_1 \left(\| g \|_V + \| g \|_V^{1/2} \| g \|_Z^{1/2} \right),$$

$$\left\| \frac{d}{dt}\left(L_\omega^{-1} g \right) \right\|_Z \leq k_1 \left(\| g \|_V + \| g \|_V^{1/2} \| g \|_Z^{1/2} \right).$$

При доказательстве леммы используется схема доказательства теоремы 3 из работы [2]. В рассматриваемом случае используются оценки (1) – (3).

Обозначим

$$\left\| Q\tilde{A}(\omega t)(\overline{A} + I)^{-1} \right\|_{S(\operatorname{Hom} E_1,\, E_2)} = p(\omega).$$

Так как функция $\tilde{A}(t)(\overline{A} + I)^{-1}$ является непрерывной и ограниченной на вещественной оси со значением в пространстве $\operatorname{Hom}(E, E)$, то в соответствии с определением функции $\tilde{A}(\omega t)$ справедливо равенство $\lim\limits_{\omega \to \infty} p(\omega) = 0$.

Лемма 2. *Пусть $x \in C(E_1)$, $\dot{x} \in M^2(E_1)$. Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$\left\| Q\tilde{A}(\omega t)x(t) \right\|_V \leq c_3 p(\omega) \left(\| x \|_{C(E_1)} + \| \dot{x} \|_{M^2(E_1)} \right),$$

$$\left\| Q\tilde{A}(\omega t)x(t) \right\|_{C(E_2)} \leq c_4 \| x \|_{C(E_1)},$$

где $c_3 = \| B + I \|$, $c_4 = \sup\limits_t \left\| Q\tilde{A}(t)(\overline{A} + I)^{-1} \right\|_{\operatorname{Hom}(E_1, E_2)} \| B + I \|_{\operatorname{Hom}(E_1, E_1)}$, *а* I — *единичный оператор.*

Доказательство. Пусть $t', t'' \in R$, причем $0 < t'' - t' \leq 1$. Первое утверждение леммы следует из неравенства

$$\left\| \int_{t'}^{t''} Q\tilde{A}(\omega s)x(s)\, ds \right\|_{E_2} \leq \left\| \int_{t'}^{t''} Q\tilde{A}(\omega\sigma)(\overline{A} + I)^{-1} d\sigma (\overline{A} + I)x(t') \right\|_{E_2} +$$

$$+ \left\| \int_{t'}^{t''} \int_{s}^{t''} Q\tilde{A}(\omega\sigma)(\overline{A} + I)^{-1} d\sigma (\overline{A} + I)\dot{x}(s)\, ds \right\|_{E_2} \leq$$

$$\leq \left\| \int_{t'}^{t''} Q\tilde{A}(\omega\sigma)(\overline{A} + I)^{-1} d\sigma \right\|_{\operatorname{Hom}(E_1, E_2)} \| B + I \|_{\operatorname{Hom}(E_1, E_1)} \| x \|_{C(E_1)} +$$

$$+ \left(\int_{t'}^{t''} \left\| \int_{s}^{t''} Q\tilde{A}(\omega\sigma)(\overline{A} + I)^{-1} d\sigma \right\|_{\operatorname{Hom}(E_1, E_2)}^2 ds \right)^{1/2} \| B + I \|_{\operatorname{Hom}(E_1, E_1)} \left(\int_{t'}^{t''} \| \dot{x}(s) \|_{E_1}^2 ds \right)^{1/2}.$$

Второе неравенство в лемме очевидно.

Лемма 3. *Предположим, что функция g удовлетворяет условию $e^{\lambda|t-\tau|} g(t) \in V \cap X$.*

Тогда существуют постоянные $\omega_2 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $k_2 > 0$ такие, что для каждого $\omega > \omega_2$, $0 \leq \lambda < \lambda_0$ определена функция $L_\omega^{-1} g$ и выполняются неравенства

$$\left\| e^{-\lambda|t-\tau|} (L_\omega^{-1} g)(t) \right\|_X \leq k_2 \| e^{-\lambda|t-\tau|} g(t) \|_V,$$

$$\left\| e^{-\lambda|t-\tau|} (L_\omega^{-1} g)(t) \right\|_Y \leq k_2 \left(\| e^{-\lambda|t-\tau|} g(t) \|_V + \left\| e^{-\lambda|t-\tau|} g(t) \right\|_V^{1/2} \left\| e^{-\lambda|t-\tau|} g(t) \right\|_X^{1/2} \right).$$

Доказательство. Из регулярности оператора L_ω при $\omega > \omega_0$ и условия на спектр оператора C следует равенство

$$\left(L_\omega^{-1}\varphi\right)(t) = \int_{-\infty}^{t} G_\omega(t,s)\varphi(s)\,ds, \tag{7}$$

где $\varphi \in X \cap V$, $G_\omega(t,s)$ — разрешающий оператор уравнения $L_\omega y = 0$. Для оператор-функции $G_\omega(t,s)$ справедлива оценка

$$\| G_\omega(t,s) \|_{\mathrm{Hom}(E_2,E_2)} \le c_3 e^{-\mu|t-s|}, \quad \mu > 0, \quad c_3 > 0 \tag{8}$$

при $\omega > \omega_0$. Обозначим $L_{\omega,\lambda} = L_\omega - \lambda I$. Оператор $L_\omega^{-1}: X \to X$ является ограниченным. Из равенства $(L_\omega - \lambda I)^{-1} = L_\omega^{-1}\left(I - \lambda L_\omega^{-1}\right)^{-1}$ при $|\lambda| \times \times \| L_\omega^{-1} \|_{\mathrm{Hom}(X,X)} < 1$ следует ограниченность оператора $L_{\omega,\lambda}^{-1}: X \to X \cap Y$, $\omega > > \omega_0$. Определим λ_0 из равенства $\lambda_0 = \max|\lambda|$, где максимум берется по всем вещественным λ таким, что $|\lambda| \| L_\omega^{-1} \|_{\mathrm{Hom}(X,X)} < 1$, $\omega > \omega_0$. Пусть функция φ определена на вещественной оси. Обозначим

$$\varphi_-(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \le \tau, \\ 0, & t > \tau; \end{cases} \quad \varphi_+(t) = \begin{cases} 0, & t \le \tau, \\ \varphi(t), & t > \tau. \end{cases}$$

Из формулы (8) следует равенство

$$L_\omega^{-1}\left(e^{-\lambda|t-\tau|}\varphi(t)\right) = e^{\lambda|t-\tau|}\left[\left(L_{\omega,\lambda}^{-1}\varphi_-\right)_-(t) + e^{-2\lambda|t-\tau|}\left(L_{\omega,\lambda}^{-1}\varphi_-\right)_+(t) + \left(L_{\omega,-\lambda}^{-1}\varphi_+\right)_+(t)\right],$$

где $\varphi \in X$, справедливое для $0 < \lambda < \lambda_0$ и $\omega > \omega_0$. Следовательно, оператор L_ω^{-1} является ограниченным оператором, определенным на пространстве функций вида $\{e^{\lambda|t-\tau|}\varphi(t)\colon \varphi \in X\}$, $0 \le \lambda < \lambda_0$, со значением в пространстве функций вида $\{e^{\lambda|t-\tau|}g(t)\colon g \in W\}$. Применение неравенств (1) – (3) завершает доказательство леммы.

Обозначим $\lambda_1 = 1/2\lambda_0$, где постоянная λ_0 определена в лемме 3. С целью сокращения записи далее зависимость решений от ω опускается.

Лемма 4. *Пусть* $y \in W_{\lambda_1,\tau}$. *Тогда существует такое* $\omega_3 > 0$, *что для каждого* $\omega > \omega_3$ *и любого* $\eta \in E_1$ *задача Коши*

$$\frac{dx}{dt} + Bx + P\tilde{A}(\omega t)(x + y(t)) = 0, \quad x(\tau) = \eta \tag{9}$$

разрешима на вещественной оси и ее решение $x(t,\tau,\eta,y)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\| e^{-\lambda_1|t-\tau|}x(t,\tau,\eta,y)\|_{E_1} \le c_5\left(\|\eta\|_{E_1} + \|y\|_{W_{\lambda_1,\tau}}\right),$$

$$\left(\int_t^{t+1} \left\|e^{-\lambda_1|s-\tau|}\dot{x}(s,\tau,\eta,y)\right\|_{E_1}^2 ds\right)^{1/2} \le c_6\left(\|\eta\|_{E_1} + \|y\|_{W_{\lambda_1,\tau}}\right),$$

где c_5, c_6 *— константы.*

Доказательство. Обозначим через $K_\omega(t,s)$ разрешающий оператор задачи (9). Из условия на спектр оператора B и определения оператора $\tilde{A}$ следует существование постоянных $\omega_3 > 0$, $k_3 > 0$ таких, что для $\omega > \omega_3$ выполняется неравенство

$$\| K_\omega(t,s)\| \le K_3 e^{\lambda_1|t-s|/2}, \quad (t,s)\in R\times R. \tag{10}$$

Решение задачи (9) запишем в виде

$$x(t,\tau,\eta,y) = K_\omega(t,\tau)\eta - \int_\tau^t K_\omega(t,s)P\tilde{A}(\omega t)y(s)\,ds. \tag{11}$$

Из условий $y\in W_{\lambda_1,\tau}$, $P\tilde{A}(\omega t)\in C(\mathrm{Hom}(E_2,E_1))$ следует, что $z(t) = P\tilde{A}(\omega t)\times$ $\times\, y(t)e^{-\lambda_1|t-\tau|}\in M^2(E_1)$ и выполняется неравенство

$$\|z\|_{M^2(E_1)} \le \|P\tilde{A}\|_{C(\mathrm{Hom}\,E_2,E_1)}\|y\|_{W_{\lambda_1,\tau}}. \tag{12}$$

Разобьем интеграл в правой части равенства (11) на ν интегралов, где $\nu = [|t-\tau|]$, если $(t-\tau)$ является целым; в противном случае $\nu=[|t-\tau|]+1$. Оценим каждый из полученных интегралов, используя неравенства (10), (12). Производя затем суммирование, для функции $x(t,\tau,\eta,y)$, определенной равенством (11), получаем первое утверждение леммы. Отсюда, используя равенство (9) и неравенство (12), получаем второе утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Тогда функция* $x(t,\tau,\eta,y)$, *определенная в лемме* 4, *является дифференцируемой по* τ, y, *а ее производные удовлетворяют равенствам*

$$\frac{\partial x}{\partial\tau} = K_\omega(t,\tau)\big(B + P\tilde{A}(\omega\tau)\eta + P\tilde{A}(\omega\tau)y(\tau)\big),$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\bar{y} = -\int_\tau^t K_\omega(t,s)P\tilde{A}(\omega s)\bar{y}(s)\,ds,$$

где $\bar{y}\in W_{\lambda_1,\tau}$.

Доказательство. Из равенства (9) следует равенство

$$x(t,\tau,\eta,y) = \eta - \int_\tau^t [Bx(s,\tau,\eta,y) + P\tilde{A}(\omega s)x(s,\tau,\eta,y) + y(s)]\,ds. \tag{13}$$

Формальное дифференцирование по τ левой и правой частей равенства (13) приводит к равенству

$$z(t) = \big(B + P\tilde{A}(\omega t)\big)\eta + P\tilde{A}(\omega\tau)y(\tau) - \int_\tau^t (Bz(s) - P\tilde{A}(\omega s)z(s))\,ds,$$

где $z(t) = \partial x(t,\tau,\eta,y)/\partial\tau$. Отсюда следует первое утверждение леммы. Из равенства (13) также следует дифференцируемость $x(\cdot,\tau,\eta,y)$ по y и справедливость второго утверждения леммы.

Лемма 6. *Пусть для* $(\tau,\eta,\hat{y})\in R\times E_1\times W_{\lambda_1,\tau}$ *функция* $y(\cdot,\tau,\eta,\hat{y})\in$ $\in W_{\lambda_1,\tau}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dy}{dt} + (C + Q\bar{A}(\omega t))y = -Q\bar{A}(\omega t)x(t,\tau,\eta,y).$$

Тогда функция $y(\cdot,\tau,\eta,\hat{y})$ *является дифференцируемой функцией по* τ, $\hat{y}$, *причем*

$$\frac{\partial y(\cdot,\tau,\eta,\hat{y})}{\partial\tau} = y_\tau\in W_{\lambda_1,\tau}, \quad \frac{\partial y(\cdot,\tau,\eta,\hat{y})}{\partial\hat{y}}\bar{y} = z\in W_{\lambda_1,\tau},$$

если $\bar{y}\in W_{\lambda_1,\tau}$, *и удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{d}{dt}y_\tau + \left(C + Q\,\tilde{A}(\omega t)\right)y_\tau = -Q\,\tilde{A}(\omega t)K_\omega(t,\tau)\left(\left(B + P\tilde{A}(\omega\tau)\right)\eta + P\tilde{A}(\omega\tau)y(\tau)\right),$$

$$\frac{d}{dt}z + \left(C + Q\,\tilde{A}(\omega t)\right)z = Q\,\tilde{A}(\omega t)\int_\tau^t K_\omega(t,s)P\tilde{A}(\omega s)\overline{y}(s)\,ds.$$

Лемма 6 является следствием лемм 3 – 5.

Доказательство теоремы **1.** Выберем функцию $y \in W_{\lambda_1,\tau}$. В соответствии с леммой 4 для $\omega > \omega_3$ определим функцию $x(t,\tau,\eta,y)$. Обозначим $g(t) = -Q\,\tilde{A}(\omega t)x(t,\tau,\eta,y)$. Из леммы 4 и определения оператора $\tilde{A}$ следует, что функция $e^{-\lambda|t-\tau|}g(t) \in V \cap X$ и согласно леммам 2 – 4 выполняются неравенства

$$\| e^{-\lambda_1|t-\tau|}g(t)\|_V \le c_7 p(\omega)\left(\|\eta\|_{E_1} + \|y\|_{W_{\lambda_1,\tau}}\right), \tag{14}$$

$$\| e^{-\lambda_1|t-\tau|}g(t)\|_{C(E_2)} \le c_8\left(\|\eta\|_{E_1} + \|y\|_{W_{\lambda_1,\tau}}\right), \tag{15}$$

где c_7, c_8 — постоянные, выражающиеся соответственно через постоянные c_3, c_5, c_6; c_4, c_5 полилинейно.

Рассмотрим уравнение

$$L_\omega y = \left(\frac{d}{dt} + C + Q\tilde{A}(\omega t)\right)y = -Q\,\tilde{A}(\omega t)x(t,\tau,\eta,y) \tag{16}$$

в пространстве $W_{\lambda_1,\tau}$. Из определения функции g, неравенств (14), (15) следует, что уравнение (16) согласно лемме 3 однозначно разрешимо в пространстве $W_{\lambda_1,\tau}$. Обозначим это решение через $\hat{y}(t,\tau,\eta,y)$. Принимая во внимание условие $p(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$, получаем согласно лемме 3 и неравенствам (14), (15) неравенство

$$\|\hat{y}(t,\tau,\eta,y)\|_{W_{\lambda_1,\tau}} \le c_9 p(\omega)^{1/2}\left(\|\eta\|_{E_1} + \|y\|_{W_{\lambda_1,\tau}}\right), \tag{17}$$

справедливое для $\omega > \omega_0'$.

Рассмотрим уравнение

$$y = \hat{y}(\cdot,\tau,\eta,y). \tag{18}$$

Правая часть этого уравнения является аддитивной функцией y. Без ограничения общности можно считать, что $c_9 p(\omega)^{1/2} \le d < 1$ при $\omega > \omega_0'$. Согласно неравенству (17) это означает, что отображение $y \to \hat{y}(\cdot,\tau,\eta,y)$ является отображением сжатия равномерно по параметру η. Следовательно, в пространстве $W_{\lambda_1,\tau}$ уравнение (18) имеет единственное решение $y(t,\tau,\eta)$. Обозначим $x(t,\tau,\eta,y(t,\tau,\eta)) = x(t,\tau,\eta)$. Из проведенных выше рассуждений следует, что $(x(t,\tau,\eta), y(t,\tau,\eta))$ — решение системы (5) такое, что $x(\tau,\tau,\eta) = \eta$, $y(\cdot,\tau,\eta) \in W_{\lambda_1,\tau}$. Линейная зависимость функций $x(t,\tau,\eta)$, $y(t,\tau,\eta)$ от η очевидна. Рассмотрим зависимость этих функций от параметра τ. Заметим, что пространство $W_{\lambda_1,\tau}$ изометрично пространству W. Следовательно, уравнение (18) можно рассматривать и в пространстве W. Отображение $\hat{y}(\cdot,\tau,\eta,y)$ непрерывно по параметру τ. Действительно, из равенства (11) следует непрерывность $x(t,\tau,\eta,y)$ по параметру τ. Следовательно, правая часть уравнения (16) является непрерывной функцией параметра τ. Из равенства (7), неравенств (8), (1) – (3) следует непрерывность $\hat{y}(\cdot,\tau,\eta,y)$ по параметру τ. Согласно теореме о зависимости от параметра неподвижной точки оператора равномерного сжатия $y(t,\tau,\eta)$ является непрерывной функцией параметра τ. Из определения $x(\cdot,\tau,\eta)$ следует также непрерывность этой функции по параметру τ. Из определения $W_{\lambda_1,\tau}$ следует, что $y(t,\tau,\eta)e^{-\lambda_1|t-\tau|}\in C(H_2)$. Из определения $y(\cdot,\tau,\eta)$ следует, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$L_\omega y = \left(\frac{d}{dt}+C+Q\tilde{A}(\omega t)\right)y = -Q\tilde{A}(\omega t)x(t,\tau,\eta). \tag{19}$$

Правая часть этого уравнения является непрерывной функцией t, принимающей значения в пространстве E_2. Обозначим $(\overline{A}+I)\tilde{A}(\omega t)(\overline{A}+I)^{-1}=\tilde{A}_1(\omega t)$. Рассмотрим уравнение

$$L^1_\omega z = \left(\frac{d}{dt}+C+Q\tilde{A}_1(\omega t)\right)z = -Q(\overline{A}+I)\tilde{A}(\omega t)x(t,\tau,\eta). \tag{20}$$

Так как согласно условию теоремы $\tilde{A}(t)(\overline{A}+I)^{-1}$ является непрерывной на вещественной оси функцией, принимающей значения в $\mathrm{Hom}\,(E_2,E)$, то свойства функции $\tilde{A}_1(t)$ совпадают со свойствами функции $\tilde{A}(t)$. В частности, без ограничения общности можно считать оператор L^1_ω равномерно регулярным при $\omega>\omega_0'$. Поскольку $e^{-\lambda_1|t-\tau|}Q(\overline{A}+I)\tilde{A}(\omega t)x(t,\tau,\eta)\in C(E_2^*)$, то уравнение (20) имеет согласно рассуждениям, приведенным при доказательстве леммы 3, единственное решение из пространства $W_{\lambda_1,\tau}$. Но из уравнений (19), (20) и единственности решений этих уравнений в пространстве $W_{\lambda_1,\tau}$ следует $z(t,\tau,\eta)=$ $=(\overline{A}+I)y(t,\tau,\eta)$. Следовательно, $y(t,\tau,\eta)e^{-\lambda_1|t-\tau|}\in C(E_2)$. Из равенства (19) с учетом последнего включения следует, что производная от $y(t,\tau,\eta)$ по t является непрерывной функцией в пространстве E_2^*. Из непрерывности функции $y(\cdot,\tau,\eta)$ по параметру τ и непрерывности $y(t,\tau,\eta)$ как функции t со значением в пространстве E_2 следует, что функция $y(\tau,\tau,\eta)$ в пространстве E_2 непрерывна. Применение лемм 5, 6 приводит в этом случае к непрерывной дифференцируемости $x(t,\tau,\eta)$, $y(t,\tau,\eta)$ по параметру τ на всей числовой прямой.

Теорема 2. *Пусть в параболическом уравнении* (4) $A(t)\in C(\mathrm{Hom}\,(E,E^*))$ *— сильно эллиптический оператор и выполнены условия:*

1. *Вложение* $E\subset H\subset E^*$ *непрерывно и плотно, причем вложение* $E\subset H$ *вполне непрерывно.*

2. *Пространство* E^* *имеет аппроксимативное свойство.*

3. $A(t)$ *— компактная функция в* $\mathrm{Hom}\,(E,E^*)$.

4. $A(t)$ *имеет равномерное среднее* $\overline{A}$.

5. $\mathrm{Re}\,\sigma(\overline{A})\geq 0$, *причем собственное подпространство оператора* $\overline{A}$, *отвечающее спектральному множеству* $\sigma_0=\mathrm{Re}\,\sigma(\overline{A})\cap\{\lambda:\ \mathrm{Re}\,\lambda=0\}$, *являетая т-мерным.*

6. *Усредненный оператор* $\overline{L}=d/dt+\overline{A}$ *на собственном подпространстве оператора, отвечающем спектральному множеству* $\sigma_+=\mathrm{Re}\,\sigma(\overline{A})\cap\{\lambda:\ \mathrm{Re}\,\lambda>$ $>0\}$, *регулярен.*

7. $A(t)(\overline{A}+I)^{-1}$ *— непрерывная функция в* $\mathrm{Hom}\,(E,E)$.

Тогда существует такое ω_0', *что при* $\omega>\omega_0'$ *уравнение* (4) *имеет* m*-мерное линейное интегральное многообразие* $\Omega_m(\omega)$ *вида*

$$u = x + \Phi(t, \omega)x,$$

где $\Phi(t, \omega) \in C(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$, $\dot{\Phi}(t, \omega) \in C(\mathrm{Hom}(E_1, E_2^*))$.

Доказательство. Пусть $x(t, \tau, \eta, \omega)$, $y(t, \tau, \eta, \omega)$ — решение системы (5) при $\omega > \omega_0'$, определенное в теореме 1. Определим функцию $\Phi(t, \omega)$ равенством

$$\Phi(\tau, \omega)\eta = y(\tau, \tau, \eta, \omega).$$

Из теоремы 1 и определения Φ следует, что для доказательства теоремы достаточно установить свойство инвариантности множества $\{(t, u) \colon u = x + \Phi(t, \omega)x\}$ относительно уравнения (4).

Пусть $u(t, \omega) = x(t, \omega) + y(t, \omega)$ — решение уравнения (4) при $\omega > \omega_0'$, определенное на вещественной оси, такое, что $e^{-\lambda_1 |t-\tau|} y(t) \in W$ для некоторого, а следовательно, и любого $\tau \in R$. Тогда согласно утверждению теоремы 1 о единственности решения системы (5)

$$x(t, \omega) = x(t, \tau, x(\tau, \omega), \omega), \quad y(t, \omega) = y(t, \tau, x(\tau, \omega), \omega)$$

при всех t, τ. В частности,

$$y(\tau, \omega) = y(\tau, \tau, x(\tau, \omega), \omega) = \Phi(\tau, \omega)x(\tau, \omega).$$

Обратно, если $u(\tau, \omega) = x(\tau, \omega) + \Phi(\tau, \omega)x(\tau, \omega)$, то решение $u(t, \omega)$ с таким начальным условием существует на всей оси и $u(t, \omega) = x(t, \omega) + \Phi(t, \omega)x(t, \omega)$. Таким образом, $\Omega_m = \{(t, u) \colon u = x + \Phi(t, \omega)x\}$ — инвариантное и притом максимально инвариантное подмножество в $R \times E = \{(t, u) = (t, x + y) \colon y(t) = e^{-\lambda_1 |t|} \in W\}$.

Замечание **1.** Из неравенства (17), равенства (18) и определения Φ следует, что $\Phi(t, \omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$ по норме пространства $C(\mathrm{Hom}\, E_1, H_2) \cap M^2(\mathrm{Hom}\, E_1, E_2)$.

Замечание **2.** Можно показать, что если $A(t)$ — почти периодическая функция t, то $\Phi(t, \omega)$ — также почти периодическая функция t.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2. *Пусть* $(\tau, \xi) \in R \times E_2$ — *произвольная фиксированная точка. Тогда существуют* $\omega_0'' > 0$, $\mu > 0$ *такие, что при* $\omega > \omega_0''$ *существует решение системы* (5) $x(t, \tau, \xi, \omega)$, $y(t, \tau, \xi, \omega)$, *определенное на промежутке* $[\tau, +\infty)$ *и удовлетворяющее условиям:* $y(\tau, \tau, \xi, \omega) = \xi$, $x(t, \tau, \xi, \omega)e^{\mu|t-\tau|}$ — *непрерывная и ограниченная на промежутке* $[\tau, +\infty)$ *функция с производной, удовлетворяющей условию*

$$\int_t^{t+1} \left\| e^{\mu(s-\tau)} x(s, \tau, \xi, \omega) \right\|_{E_1}^2 ds < \infty$$

для всех $t \geq \tau$. *Отображение* $\xi \to (x(t, \tau, \xi, \omega), y(t, \tau, \xi, \omega))$ *является линейным. Отображение* $\tau \to (x(t, \tau, \xi, \omega), y(t, \tau, \xi, \omega))$ *дифференцируемо.*

Как и при доказательстве теоремы 1, прежде всего сформулируем несколько лемм.

Пусть $\mu > 0$ и введем пространства $X_{\mu,\tau}$, $Y_{\mu,\tau}$, $W_{\mu,\tau}$, $Z_{\mu,\tau}$, $V_{\mu,\tau}$, состоящие из элементов $y \in X$, Y, W; $z \in Z$, V, для которых конечны величины

$$\|\exp(\mu|t-\tau|)y(t)\|_X, \quad \|\exp(\mu|t-\tau|)y(t)\|_Y, \quad \|\exp(\mu|t-\tau|)y(t)\|_W,$$

$$\|\exp(\mu|t-\tau|)f(t)\|_Z, \quad \|\exp(\mu|t-\tau|)f(t)\|_V.$$

принимаемые за нормы в указанных пространствах. Введем также пространства $X^+_{\mu,\tau}$, $Y^+_{\mu,\tau}$, $W^+_{\mu,\tau}$, $Z^+_{\mu,\tau}$, $V^+_{\mu,\tau}$, состоящие из функций на полуоси $t \ge \tau$ и аналогичные пространствам $X_{\mu,\tau} \ldots V_{\mu,\tau}$.

Лемма 7 (см. [2], лемма 4). *Найдется такое* μ_1, *что при* $\mu \in [0, \mu_1]$, $\omega > \omega_0$ *оператор* $L_\omega^{-1} : Z_\mu \to W_\mu$ *существует, а его норма не превышает* $2 \| L_\omega^{-1} \|_{\mathrm{Hom}(Z,W)}$.

Произвольный элемент $g \in Z_{\mu,\tau}$ продолжим нулем на всю ось. Пусть $y^\omega = L_\omega^{-1} g$. Положим по определению $(T_+^\omega g)(t) = y^\omega(t) - G^\omega(t,\tau) y^\omega(\tau)$. Получим ограниченное семейство операторов $T_+^\omega : Z^+_{\mu,\tau} \to W^+_{\mu,\tau}$ для всех $\mu \in [0, \mu_1]$ (см. [2, с. 1401]).

Использование неравенств (1) – (3) приводит к следующему предложению.

Лемма 8. *Пусть* $g \in Z^+_{\mu,\tau} \cap V^+_{\mu,\tau}$, *причем* $\|g\|_{V^+_{\mu,\tau}} \le l$, *где* $\mu \in [0, \mu_1]$, $l > 0$ *— постоянная. Тогда существует такое* ω_4, *что для всех* $\omega > \omega_4$ *справедливы неравенства*

$$\left\| T_+^\omega g \right\|_{X^+_{\mu,\tau}} \le k_3 \|g\|_{V^+_{\mu,\tau}},$$

$$\left\| T_+^\omega g \right\|_{Y^+_{\mu,\tau}} \le k_3 \left(\|g\|_{V^+_{\mu,\tau}} + \|g\|^{1/2}_{V^+_{\mu,\tau}} \|g\|^{1/2}_{Z^+_{\mu,\tau}} \right).$$

Лемма 9. *Пусть* $K_\omega(t,s)$ *— разрешающий оператор уравнения*

$$\frac{d}{dt} x + \left(\overline{B} + P\tilde{A}(\omega t) \right) x = 0.$$

Тогда существует такое ω_5, *что для всякого* $\omega > \omega_5$ *справедливы соотношения* $\| K_\omega(t,s) e^{2\mu_1 (t-s)/3} \|_{E_1} \to \infty$, $t \to \infty$; $\| K_\omega(t,s) \|_{E_1} \le c_9 e^{2\mu_1 (t-s)/3}$, $t \ge s$, *где* c_9 *— константа.*

***Доказательство теоремы* 3.** Положим $\overline{\mu} = 2\mu_1/3$. Обозначим через $H^+_{\overline{\mu},\tau}$ подпространство функций $x(t)$ из $C(E_1)$, имеющих локально интегрируемые с квадратом производные, для которых конечна величина

$$\sup_{t \ge \tau} \left\| e^{\overline{\mu}(t-\tau)} x(t) \right\|_{E_1} + \sup_{t \ge \tau} \left(\int_t^{t+1} \left\| e^{\overline{\mu}(s-\tau)} \dot{x}(s) \right\|^2_{E_1} ds \right)^{1/2},$$

принимаемая за норму в этом пространстве. Выберем произвольную функцию из $H^+_{\overline{\mu},\tau}$. Обозначим $g_\omega(t) = Q\tilde{A}(\omega t) x(t)$, $y(t,\tau,\xi,x,\omega) = G_\omega(t,\tau)\xi + T_+^\omega g$, где $G_\omega(t,s)$ — разрешающий оператор уравнения $L_\omega y = 0$. Для функции $G_\omega(t,s)$ справедлива оценка (9). Очевидно, что выполняется неравенство $\overline{\mu} < \mu$. Из определения $y(t,\tau,\xi,x,\omega)$ следует, что эта функция определена на промежутке $[\tau, \infty)$ и является решением уравнения $L_\omega y = g(t)$, удовлетворяющим условию $y(\tau,\tau,\xi,x,\omega) = \xi$. Применяя лемму 8, получаем неравенство

$$\| y(t,\tau,\xi,x,\omega) \|_{Y^+_{\tau,\overline{\mu}}} \le c_{10} \|\xi\|_{E_2} + c_{11} p^{1/2}(\omega) \|x\|_{H^+_{\overline{\mu},\tau}}. \tag{21}$$

Рассмотрим оператор, определяемый равенством

$$\hat{x}(t,\tau,\xi,x,\omega) = -\int_\tau^t K_\omega(t,s) P\tilde{A}(\omega s) y(s,\tau,\xi,x,\omega)\, ds.$$

Воспользовавшись леммой 9, можно показать, что $\hat{x} \in H^{+}_{\mu,\tau}$, причем $\hat{x}$ — единственное решение из пространства $H^{+}_{\mu,\tau}$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} + \left(B + P\tilde{A}(\omega t)\right)x = -P\tilde{A}(\omega t)y(t, \tau, \xi, x, \omega). \tag{22}$$

Воспользовавшись леммой 9, неравенством (21), равенством (22), в котором $x = \hat{x}$, получим неравенство

$$\|\hat{x}(t, \tau, \xi, x, \omega)\|_{H^{+}_{\mu,\tau}} \le c_{12}\|\xi\|_{E_2} + c_{13}p^{1/2}(\omega)\|x\|_{H^{+}_{\mu,\tau}}. \tag{23}$$

Так как $\hat{x}$ является аддитивной функцией x, то согласно неравенству (23) отображение $x \to \hat{x}(t, \tau, \xi, x, \omega)$ является при достаточно больших ω сжимающим в пространстве $H^{+}_{\mu,\tau}$. Неподвижную точку отображения $\hat{x}(t, \tau, \xi, x, \omega)$ обозначим через $x(t, \tau, \xi, \omega)$. Обозначим $y(t, \tau, \xi, x(t, \tau, \xi, \omega), \omega) = y(t, \tau, \xi, \omega)$. Функция $(x(t, \tau, \xi, \omega), y(t, \tau, \xi, \omega))$ удовлетворяет требованиям теоремы. Рассуждения, связанные с доказательством дифференцируемости функций $x(t, \tau, \xi, \omega)$, $y(t, \tau, \xi, \omega)$ по τ, аналогичны приведенным при доказательстве теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть в параболическом уравнении* (4) $A(t) \in C(\mathrm{Hom}(E, E^{*}))$ *— сильно эллиптический оператор и выполнены условия теоремы* 2. *Тогда существует такое* ω_0'', *что при* $\omega > \omega_0''$ *уравнение* (5) *имеет линейное интегральное многообразие коразмерности* m *вида*

$$u = F(t, \omega)y + y,$$

где $F(t, \omega) \in C(\mathrm{Hom}(E_2, E_1))$, $\dot{F}(t, \omega) \in M^2(\mathrm{Hom}(E_2, E_1))$.

Доказательство. Пусть $x(t, \tau, \xi, \omega)$, $y(t, \tau, \xi, \omega)$ — решение системы (5) при $\omega > \omega_0''$, определенное в теореме 3. Определим функцию $F(t, \omega)$ равенством

$$F(\tau, \omega)\xi = x(\tau, \tau, \xi, \omega).$$

Свойства функции F следуют из теоремы 3. Инвариантность множества $\{(t, u)\colon u = F(t, \omega)y + y\}$ относительно уравнения (4) доказывается так же, как и в теореме 2.

2. Экспоненциальное расщепление и принцип сведения. Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что функция $\Phi(t, \omega)$, определяющая линейное интегральное многообразие системы уравнений (5), является ограниченным на вещественной оси решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\Phi + C\Phi + Q\tilde{A}(\omega t)(I + \Phi) - \Phi\left(B + P\tilde{A}(\omega t)(I + \Phi)\right) = 0. \tag{24}$$

Осуществим в системе уравнений (5) замену переменных

$$y = \Phi(t, \omega)x + \eta. \tag{25}$$

Преобразование (25) приводит систему (5) к виду

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} + Bx + P\tilde{A}(\omega t)(x + \Phi(t, \omega)x + \eta) = 0, \\ \frac{d\eta}{dt} + C\eta + (Q\tilde{A}(\omega t) + \Phi(t, \omega)P\tilde{A}(\omega t))\eta = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Система (26) удовлетворяет условиям теоремы 4. Пусть $F(t, \omega)$ — функция, задающая линейное интегральное многообразие системы (26) коразмерности m. Преобразование

$$x = \xi + F(t, \omega)\eta$$

приводит систему (26) к диагональному виду

$$\begin{gathered}\frac{d\xi}{dt} + B\xi + P\tilde{A}(\omega t)(\xi + \Phi(t, \omega)\xi) = 0, \\ \frac{d\eta}{dt} + C\eta + (Q\tilde{A}(\omega t) + \Phi(t, \omega)P\tilde{A}(\omega t))\eta = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Очевидно, что в проведенных рассуждениях существенно используется отделенность спектров операторов B, C и конечномерность пространства E_1. Это обстоятельство позволяет обобщить теорему 5.2 монографии [4, с. 266] следующим образом.

Теорема 5. *Пусть в параболическом уравнении* (4) $A(t) \in C(\mathrm{Hom}(E, E^*))$ *— сильно эллиптический оператор и выполнены условия* 1 – 4 *теоремы* 2. *Пусть также*:

α) *усредненное уравнение* $\bar{L}u = (d/dt + \bar{A})u = 0$ *допускает экспоненциальное расщепление*;

β) *существует такое* $\mu \in R$, *что оператор* $(\bar{L} + \mu I)$ *является регулярным*;

γ) *существует такое* $\lambda \in R$, *что оператор* $\tilde{A}(t)(\bar{A} + \lambda I)^{-1} \in C(\mathrm{Hom}\, E, E)$.

Тогда существует такое ω_0, *что при* $\omega > \omega_0$ *можно указать преобразование* $u = \xi + F(t, \omega)\xi$, *приводящее уравнение* (4) *к диагональному виду*.

Устойчивость нулевого решения уравнения (4) рассматривается далее относительно нормы основного пространства H.

Из теоремы 5 и теоремы 3 из работы [2] вытекает следующая теорема.

Теорема 6 (принцип сведения). *Пусть относительно параболического уравнения* (4) *выполняются условия теоремы* 2.

Тогда существует такое ω', *что при* $\omega > \omega'$ *нулевое решение уравнения* (4) *устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво тогда и только тогда, когда соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво нулевое решение этого уравнения на линейном интегральном многообразии* $\Omega_m(\omega)$.

3. Асимптотическое разложение линейного интегрального многообразия конечной размерности. Покажем, что для функции Φ, определяющей линейное интегральное многообразие уравнения (4) размерности m, можно найти представление в виде асимптотически равномерно сходящегося по степеням ω^{-1} ряда.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Предположим, что существует функция* $P(t, \omega) \in C(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$ *такая, что* $P(t, \omega) \to 0$ *при* $\omega \to \infty$ *по норме пространства* $C(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{d}{dt}P + CP + Q\tilde{A}(\omega t)(I + P) - P(B + P\tilde{A}(\omega t))(I + P) = \Delta(t\omega, \omega), \tag{28}$$

в котором правая часть $\Delta(t\omega, \omega)$ *является непрерывной функцией* t, *принимающей значения в пространстве* $C(\mathrm{Hom}(E_1, H_2))$, *причем справедливо неравенство*

$$\|\Delta(t\omega, \omega)\|_{\mathrm{Hom}(E_1, H_2)} \le k\omega^{-p} \tag{29}$$

при всех $\omega > \omega'$ *и некотором натуральном* p.

Тогда если функция $\Phi(t, \omega)$ *определяет линейное интегральное многообразие уравнения* (4) *размерности* m, *то существуют такие постоянные* $k > 0$, ω'', *что при* $\omega > \omega''$ *справедливо неравенство*

$$\|\Phi(t, \omega) - P(t, \omega)\|_{\mathrm{Hom}(E_1, H_2)} \leq k\omega^{-p}, \quad \omega > \omega''. \tag{30}$$

Если $A(t)$ — *почти периодическая функция* t, *то существуют многочлен* $P(\tau, \omega)$ *степени* p *относительно* ω^{-1} *с почти периодическими коэффициентами и функция* $\Delta(\tau, \omega)$, *удовлетворяющая условию* (29), *такие, что* $P(t\omega, \omega)$ *удовлетворяет уравнению* (28).

Доказательство. Обозначим $\Phi - P = S$. Функция S, как следует из равенств (24), (28), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}S + \left(C + Q\tilde{A}(\omega t) - \Phi\left(B + P\tilde{A}(\omega t)\right)\right)S - S\left(B + P\tilde{A}(\omega t)\right)(I + P) = -\Delta(t\omega, \omega) \tag{31}$$

и является линейным интегральным многообразием размерности m системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} + \left(B + P\tilde{A}(\omega t)\right)(I + P)x = 0,\\ \frac{dy}{dt} + \left(C + Q\tilde{A}(\omega t) - \Phi\left(B + P\tilde{A}(\omega t)\right)\right)y + \Delta(t\omega, \omega)x = 0.\end{gathered} \tag{32}$$

Так как в соответствии с замечанием 1 к теореме 2 $\Phi(t, \omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$ по норме пространства $C(\mathrm{Hom}(E_1, H_2))$, $P(t, \omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$ по норме пространства $C(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$ согласно условию теоремы, то для системы (32), как нетрудно убедиться, выполнены условия существования линейного интегрального многообразия размерности m при достаточно больших ω. Это интегральное многообразие в соответствии с равенствами (7), (11), (18) и (19) определяется формулой

$$S(t, \omega) = -\int_{-\infty}^{t} \hat{G}_\omega(t, s)\Delta(s\omega, \omega)\hat{K}_\omega(s, t)\, ds, \tag{33}$$

где $\hat{G}_\omega$ — разрешающий оператор уравнения

$$\frac{dy}{dt} + \left(C + Q\tilde{A}(\omega t) - \Phi\left(B + P\tilde{A}(\omega t)\right)\right)y = 0,$$

а $\hat{K}_\omega$ — разрешающий оператор первого уравнения системы (32). Легко видеть, что существуют такие положительные постоянные ω'', ν, M_1, M_2, что справедливы неравенства

$$\left\|\hat{K}_\omega(t, s)\right\|_{\mathrm{Hom}(E_1, E_1)} \leq M_1 e^{-\nu(t-s)/2}, \quad -\infty < t \leq s < \infty, \quad \omega > \omega'',$$

$$\left\|\hat{G}_\omega(t, s)\right\|_{\mathrm{Hom}(H_2, H_2)} \leq M_2 e^{-\nu(t-s)}, \quad -\infty < s \leq t < \infty, \quad \omega > \omega'',$$

используя которые, а также неравенство (29) и равенство (33), получаем неравенство (30).

Утверждение второй части теоремы следует из приводимой ниже лёммы.

Лемма 10. *Пусть* $G(\tau, \omega)$ — *почти периодическая функция* τ, *принимающая значения в* $\mathrm{Hom}(E_1, H_2)$, *асимптотическое разложение которой по степеням* ω^{-1} *начинается с членов порядка* p. *Тогда существует почти перио-*

дическая функция Φ, *принимающая значения в* $\mathrm{Hom}(E_1, H_2)$, *асимптотическое разложение которой начинается с членов порядка* p *относительно* ω^{-1} *и удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{d}{dt}\Phi + C\Phi - \Phi B = G(t\omega, \omega).$$

Доказательство. Доказательство леммы следует из равенства

$$\Phi(t, \omega) = \int_0^\infty e^{-Cs} G(\omega(s-t), \omega) e^{Bs}\, ds,$$

где e^{-Ct} — полугруппа с инфинитезимальным производящим оператором $-C$.

4. Пример. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} u_t = (1 + a\cos(\omega t) g(x)) u_{xx} + u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \end{gathered} \tag{34}$$

где a — постоянная,

$$|a| < 1, \quad \omega >> 1, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \pi/2; \\ 1, & \pi/2 < x \le \pi. \end{cases}$$

Здесь $H = L^2[0, \pi]$. Усредненная задача имеет вид

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx} + u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0. \end{gathered}$$

В обозначениях теоремы 1

$$\overline{A} u = -u_{xx} - u, \quad \sigma(\overline{A}) = \{ n^2 - 1, \ n = 1, 2, \ldots \},$$

$$H_1 = \mathrm{Span}\{\sin x\}, \quad H_2 = \left\{ \varphi\colon \int_0^\pi \varphi(x) \sin x\, dx = 0 \right\}.$$

Интегральное многообразие параболической задачи (34) может быть представлено в виде

$$u(x) = s \sin x + \sum_{k=2}^\infty f_k s \sin kx. \tag{35}$$

Поток на интегральном многообразии (35) описывается уравнением

$$\dot{s} \sin x + \sum_{k=2}^\infty (\dot{f}_k s + f_k \dot{s}) \sin kx =$$

$$= (1 + a\cos(\omega t) g(x)) \left(-s \sin x - \sum_{k=2}^\infty f_k s k^2 \sin kx \right) + s \sin x + \sum_{k=2}^\infty f_k s \sin kx.$$

После умножения на $\sin x$ и интегрирования получаем

$$\dot{s} = a\cos(\omega t) \left(-\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^\infty f_{2n} (2n)^2 \frac{1}{2} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \right) s.$$

После умножения на $\sin 2nx$ и интегрирования имеем

$$\dot{f}_{2n} + f_{2n} a\cos(\omega t) \left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^\infty f_{2n} (2n)^2 \frac{1}{2} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \right) =$$

$$= \left(1-(2n)^2\right) f_{2n} + a\cos(\omega t)\left(-\frac{1}{2}(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(2k+1)^2\left(\frac{1}{2k+1-2n}-\frac{1}{2k+1+2n}\right)(-1)^{k-n} f_{2k+1}\right).$$

После умножения на $\sin(2n+1)x$ и интегрирования получаем

$$\dot{f}_{2n+1} + f_{2n+1} a\cos(\omega t)\left(-\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} f_{2n}(2n)^2\frac{1}{2}(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right) =$$

$$= \left(1-(2k+1)^2\right) f_{2k+1} +$$

$$+ a\cos(\omega t)\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(2k)^2\left(\frac{1}{2k+1-2n}-\frac{1}{2k+1+2n}\right)(-1)^{k-n} f_{2k+1}.$$

В первом приближении интегральное многообразие определяется как периодическое решение системы

$$\dot{f}_{2n} = \left(1-(2n)^2\right) f_{2n} + a\cos(\omega t)(-1)^n\frac{2n}{4n^2-1},$$

$$\dot{f}_{2n+1} = \left(1-(2n+1)^2\right) f_{2n+1}.$$

Отсюда находим

$$f_{2n} = a\left(\frac{(2n)^2-1}{\left((2n)^2-1\right)^2}\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega}{\left((2n)^2-1\right)^2+\omega^2}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\sin\omega t\right),$$

$$f_{2n+1} = 0.$$

Подставляя полученные значения в уравнение на многообразии и проводя затем анализ, приходим к заключению о неустойчивости нулевого решения задачи (34) при достаточно больших ω.

1. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. – 204 с.
2. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 6. – С. 1380–1408.
3. *Колесов Ю. С.* Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений параболического типа с почти-периодическими коэффициентами // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1978. – **36**. – С. 3–27.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
5. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Львов: Изд-во АН УССР, 1945. – 150 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
7. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
8. *Лыкова О. Б., Барис Я. С.* Приближенные интегральные многообразия. – Киев: Наук. думка, 1993. – 315 с.
9. *Лыкова О. Б.* О принципе сведения для дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1975. – **17**, № 2. – С. 240–243.
10. *Coppel W. A., Palmer K. J.* Averaging and integral manifolds // Bull. Austral. Math. Soc. – 1970. – P. 197–222.
11. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
12. *Митропольский Ю. А.* Принцип усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 250 с.
13. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып. 1. – С. 11–58.

Получено 04.04.95