УДК 517.5

С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

We obtain order estimates of the best M-term trigonometrical approximations and approximations by the Fourier sums of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariable functions in a uniform metric.

Одержано порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень та наближень сумами Фур'є класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці.

Нехай $x = (x_1, \ldots, x_d)$ — елемент евклідового простору R^d, $(x, y) = x_1y_1 + \ldots$ $\ldots + x_dy_d$. Будемо розглядати 2π-періодичні по кожній із змінних функції $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d) \in L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi, \pi]$, із скінченною нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\pi_d)} = \begin{cases} \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \pi_d} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

що належать простору

$$L^0_p(\pi_d) = \left\{ f : f \in L_p(\pi_d), \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \ j = \overline{1, d} \right\}.$$

Означимо величини, що будуть досліджуватись нижче.

Найкращим M-членним тригонометричним наближенням класу функцій F у просторі $L_q(\pi_d)$ називається величина

$$e_M(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{k^j} \inf_{a_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} a_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q ,$$

де a_j — довільні коефіцієнти, $\Theta_M = \left\{k^1, \ldots, k^M\right\}$ — набір d-вимірних векторів $k^j = = \left(k^j_1, \ldots, k^j_d\right)$, $j = \overline{1, M}$, з цілочисловими координатами. Вперше величина найкращого M-членного тригонометричного наближення функції однієї змінної була введена С. Б. Стєчкіним [1].

Зазначимо, що дослідження величин $e_M(F)_q$ для певних класів функцій однієї змінної проводилось у роботах [2–6], а для класів функцій багатьох змінних — у роботах [7–15] та інших. Як клас F використовуватимемо клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, введений і розглянутий у [16]. Пізніше в інших напрямах класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ досліджувались автором у [17].

Будемо користуватись позначеннями, прийнятими в роботі [17]. Для зручності нагадаємо деякі з них, а також наведемо нові позначення, необхідні для формулювання допоміжних тверджень та викладу основного матеріалу.

Кожному вектору $s \in N^d$ поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le \left| k_j \right| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, d} \right\}$$

і для функції f позначимо

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} f(x)e^{-i(k,x)}dx$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай

$$Q_n = \bigcup_{\|s\|_1<n} \rho(s), \quad n \in N,$$

де $\|s\|_1 = |s_1|+\ldots+|s_d|$, а

$$S_{Q_n}(f,x) = \sum_{k\in Q_n} \hat{f}(k)e^{i(k,x)} = \sum_{\|s\|_1<n} \delta_s(f,x)$$

— частинна сума ряду Фур'є функції f з „номерами" гармонік із „ступінчасто-гіперболічного хреста" Q_n.

Нагадаємо, що клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, визначається таким чином [16]:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{f \in L^0_p(\pi_d): \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{\sum_s \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta}\,\Omega(2^{-s})^{-\theta}\right\}^{1/\theta}, \quad 1\le\theta<\infty,$$

і

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, \quad \theta=\infty,$$

а $\Omega(2^{-s}) = \Omega\left(2^{-s_1},\ldots,2^{-s_d}\right)$.

Функція $\Omega(t) = \Omega(t_1,\ldots,t_d)$, за допомогою якої визначається клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, — це задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови:

1) $\Omega(t)>0$, $t_j>0$, $j=\overline{1,d}$; $\Omega(t)=0$, $\prod_{j=1}^d t_j=0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1t_1,\ldots,m_dt_d) \le \left(\prod_{j=1}^d m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j\in N$, $j=\overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j\ge 0$, $j=\overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S), (S_l) [18], які називають умовами Барі – Стечкіна. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau)\ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $0<\alpha<1$, тобто існує $C_1>0$, яке не залежить від τ_1 і τ_2, таке, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C_1\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0<\tau_1\le\tau_2\le 1.$$

Функція $\varphi(\tau)\ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0<\gamma<l$, тобто існує $C_2>0$, яке не залежить від τ_1 і τ_2, таке, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \ge C_2\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0<\tau_1\le\tau_2\le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Зауважимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з відомими класами Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ (див., наприклад, [19]).

Розглядатимемо, як і в роботах [16, 17], класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l вигляду

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right),$$

де $\omega(\tau)$ — функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови Барі – Стєчкіна.

Наведемо допоміжне твердження, яке будемо використовувати далі.

Лема А [7]. *Для будь-якого тригонометричного полінома $P(\Theta_M, x)$, який містить не більше M гармонік і має степінь не вище N, і для будь-якого $L \leq \leq M$ існує тригонометричний поліном $P(\Theta_L, x)$, в якого не більше L коефіцієнтів відмінні від нуля, такий, що*

$$\| P(\Theta_M, \cdot) - P(\Theta_L, \cdot) \|_{\infty} \ll \left(\frac{M}{L} \log N \right)^{1/2} \| P(\Theta_M, \cdot) \|_2,$$

при цьому $\Theta_L \subset \Theta_M$.

Зазначимо, що під степенем тригонометричного полінома розуміється найбільший із степенів експонент, а степінь $e^{i(k,x)}$ дорівнює $|k_1| + \ldots + |k_d|$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \max\{1/p, 1/2\}$ і умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M та n таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\omega(2^{-n}) 2^{n(1/p - 1/2)_+} n^{(d-1)(1/2 - 1/\theta)} \ll e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty} \ll$$
$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p - 1/2)_+} n^{(d-1)(1/2 - 1/\theta)_+} n^{1/2},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху у випадку $1 < p \leq 2$.

Нехай $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, M — задане число і n — число, що задовольняє співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Побудуємо поліном $P(\Theta_M, x)$, який містить за порядком M гармонік і буде давати потрібну оцінку наближення функції f у просторі L_{∞}. Покажемо, що шуканий поліном $P(\Theta_M, x)$ можна подати у вигляді

$$P(\Theta_M, x) = \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f, x) + \sum_{j=n}^{[\beta n]} \sum_{\|s\|_1 = j} P(\Theta_{L_j}, x), \tag{1}$$

де

$$\beta = \frac{\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}{\alpha - \frac{1}{p}} + \frac{(d-1)\log n}{2n\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)},$$

а $P(\Theta_{L_j}, x)$ — поліноми, які будемо будувати виходячи з поліномів $t_j(x) = \sum_{\|s\|_1 = j} \delta_s(f, x)$ за допомогою леми А.

Припустимо, що поліном $P(\Theta_M, x)$ побудований. Тоді, беручи до уваги рівність (1) та використовуючи нерівність Мінковського, для величини $e_M(f)_\infty$ одержуємо таку оцінку:

$$e_M(f)_\infty \le \|f(\cdot) - P(\Theta_M, \cdot)\|_\infty =$$

$$= \left\| \sum_s \delta_s(f, \cdot) - \sum_{\|s\|_1 < n} \delta_s(f, \cdot) - \sum_{j=n}^{[\beta n]} \sum_{\|s\|_1 = j} P(\Theta_{L_j}, \cdot) \right\|_\infty =$$

$$= \left\| \sum_{j=n}^{[\beta n]} \sum_{\|s\|_1 = j} \left(\delta_s(f, \cdot) - P(\Theta_{L_j}, \cdot) \right) + \sum_{\|s\|_1 \ge [\beta n]+1} \delta_s(f, \cdot) \right\|_\infty \le$$

$$\le \sum_{j=n}^{[\beta n]} \left\| \sum_{\|s\|_1 = j} \left(\delta_s(f, \cdot) - P(\Theta_{L_j}, \cdot) \right) \right\|_\infty + \left\| \sum_{\|s\|_1 \ge [\beta n]+1} \delta_s(f, \cdot) \right\|_\infty =: I_1 + I_2. \quad (2)$$

Оцінимо спочатку доданок I_2. Згідно з нерівністю Мінковського, нерівністю різних метрик Нікольського [19, с. 159]

$$\left\| T_{n_1, \ldots n_d}(\cdot) \right\|_q \ll \left(\prod_{j=1}^{d} n_j \right)^{1/p - 1/q} \left\| T_{n_1, \ldots n_d}(\cdot) \right\|_p, \quad 1 \le p < q \le \infty, \quad (3)$$

де $T_{n_1, \ldots n_d}(x)$ — тригонометричний поліном степеня n_j по змінній x_j, $j = \overline{1, d}$, маємо

$$I_2 \le \sum_{\|s\|_1 > \beta n} \|\delta_s(f, \cdot)\|_\infty \ll \sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} 2^{\|s\|_1 / p} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p. \quad (4)$$

Застосовуючи до останньої суми в (4) нерівність Гельдера з показником $\theta \in [1, \infty)$, а також нерівність

$$\frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{2^{-\alpha \|s\|_1}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \quad (5)$$

при $\|s\|_1 \ge n$, яка випливає з того факту, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1/p$, продовжуємо оцінку

$$\le \left(\sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} \omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right) \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} \left(\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right) 2^{\|s\|_1 / p} \right)^{\frac{\theta}{\theta - 1}} \right)^{1 - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} \left(\frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{2^{-\alpha \|s\|_1}} 2^{-\|s\|_1 \left(\alpha - \frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{\theta}{\theta - 1}} \right)^{1 - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega\left(2^{-\beta n}\right)}{2^{-\alpha \beta n}} \left(\sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right) \frac{\theta}{\theta - 1} \|s\|_1} \right)^{1 - \frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\omega\left(2^{-\beta n}\right)}{2^{-\alpha \beta n}} 2^{-\beta n \left(\alpha - \frac{1}{p}\right)} (\beta n)^{(d-1)(1 - 1/\theta)} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)} n^{-\frac{d-1}{2}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (6)$$

Зауважимо, що в оцінці (6) при $\theta = 1$ розуміється відповідна модифікація нерівності Гельдера. Для $\theta = \infty$ отримуємо

$$I_2 \ll \sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} \omega^{-1}\left(2^{-\|s\|_1}\right) \|\delta_s(f,\cdot)\|_p \, \omega\left(2^{-\|s\|_1}\right) 2^{\frac{\|s\|_1}{p}} \ll$$

$$\ll \sup_{\|s\|_1 \ge \beta n} \frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)} \sum_{\|s\|_1 \ge \beta n} \frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{2^{-\alpha\|s\|_1}} 2^{-\|s\|_1\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \frac{\omega\left(2^{-\beta n}\right)}{2^{-\alpha\beta n}} 2^{-\beta n\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)} (\beta n)^{d-1} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)n} n^{-\frac{d-1}{2}} n^{d-1} = \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{\frac{d-1}{2}}. \qquad (7)$$

Переходячи до оцінки доданка I_1, зазначимо, що оскільки $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p \le$ ≤ 2, то згідно з теоремою 6 [16] має місце співвідношення

$$\left\| \sum_{\|s\|_1 = j} \delta_s(f,\cdot) \right\|_2 \ll \omega(2^{-j}) 2^{j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (8)$$

Таким чином, в силу леми А, враховуючи співвідношення (8), маємо

$$I_1 = \sum_{j=n}^{[\beta n]} \left\| \sum_{\|s\|_1 = j} \left(\delta_s(f,\cdot) - P(\Theta_{L_j},\cdot)\right) \right\|_\infty \ll \sum_{j=n}^{[\beta n]} \left(2^j j^d L_j^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{\|s\|_1 = j} \delta_s(f,\cdot) \right\|_2 \ll$$

$$\ll \sum_{j=n}^{[\beta n]} \left(2^j j^d L_j^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \omega(2^{-j}) 2^{j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (9)$$

Для того щоб продовжити оцінку (9), покладемо

$$L_j = \left[\omega^{-1}(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \omega(2^{-j}) 2^{\frac{j}{p}} j^{d-1}\right] + 1, \quad j = n, \ldots, [\beta n]. \qquad (10)$$

Тоді для кількості гармонік, які містяться в поліномах $P(\Theta_{L_j}, x)$, враховуючи (5), одержуємо

$$\sum_{j=n}^{[\beta n]} L_j \le \sum_{j=n}^{[\beta n]} \left(\omega^{-1}(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \omega(2^{-j}) 2^{\frac{j}{p}} j^{d-1} + 1\right) \ll$$

$$\ll n + \omega^{-1}(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{j=n}^{[\beta n]} \frac{\omega(2^{-j})}{2^{-\alpha j}} 2^{-j\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)} j^{d-1} \ll$$

$$\ll n + \omega^{-1}(2^{-n}) 2^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)} n^{d-1} = n + 2^n n^{d-1} \ll 2^n n^{d-1} \asymp M,$$

тобто кількість гармонік не перевищує за порядком M. Тепер, підставляючи в (9) замість L_j їх значення з (10), маємо

$$I_1 \ll \sum_{j=n}^{[\beta n]} \left(\omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)} \omega^{-1}(2^{-j}) 2^{-\frac{j}{p}} j^{-d+1} 2^j j^d \right)^{\frac{1}{2}} \omega(2^{-j}) 2^{j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= \omega^{\frac{1}{2}}(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right)} \sum_{j=n}^{[\beta n]} \left(\frac{\omega(2^{-j})}{2^{-\alpha j}} 2^{-\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)j} \right)^{\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll \omega^{\frac{1}{2}}(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right)} \frac{\omega^{\frac{1}{2}}(2^{-n})}{2^{-\alpha\frac{n}{2}}} \sum_{j=n}^{[\beta n]} 2^{-\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)\frac{j}{2}} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} j^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right)} 2^{\alpha\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} n^{\frac{1}{2}} = \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} n^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Співставляючи оцінки (6) і (7), бачимо, що

$$I_2 \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} n^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

а тому, повертаючись до (2) і враховуючи співвідношення (11), (12), одержуємо оцінку

$$e_M(f)_\infty \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} n^{\frac{1}{2}}$$

і, отже,

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_\infty \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} n^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Шукану оцінку зверху у випадку $2 \le p < \infty$ встановимо, скориставшись вкладенням $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{2,\theta}$ [16] та оцінкою (13) при $p = 2$. В результаті будемо мати

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_\infty \ll e_M(B^{\Omega}_{2,\theta})_\infty \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} n^{\frac{1}{2}}.$$

Оцінку зверху, таким чином, доведено.

Оцінку знизу величини $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_\infty$ одержимо, скориставшись раніше встановленими результатами.

Так, у випадках $1 < p \le 2$ і $2 \le p < \infty$ потрібні оцінки знизу випливають з нерівності $e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_\infty \ge e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, $1 < q < \infty$, та з результатів роботи [17], де встановлено, що при $1 < p \le 2 < q < \infty$

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)},$$

а при $2 \le p < q < \infty$

$$e_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, а $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \max\{1/p, 1/2\}$. Теорему 1 доведено.

Зауваження. **1.** При виконанні умов теореми 1 для $\theta = \infty$ має місце порядкова нерівність

$$\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+} n^{\frac{d-1}{2}} \ll e_M(H^{\Omega}_p)_\infty \ll \omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+} n^{\frac{d-1}{2}} n^{\frac{1}{2}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, оскільки при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ і H^{Ω}_p збігаються (див., наприклад, [20]).

2. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\alpha = r_1 > \max\{1/p; 1/2\}$, то має місце порядкова оцінка

$$\left(M^{-1}\log^{d-1}M\right)^{r_1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+}\left(\log^{d-1}M\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll e_M(B^{r}_{p,\theta})_\infty \ll$$

$$\ll \left(M^{-1}\log^{d-1}M\right)^{r_1-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)_+}\left(\log^{d-1}M\right)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}\log^{\frac{1}{2}}M,$$

встановлена в [14].

Перейдемо до наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1/p$ *та умову* (S_l). *Тоді*

$$\sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\|f(\cdot) - S_{Q_n}(f,\cdot)\right\|_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Доведення. Встановимо оцінку зверху. Нехай $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, тоді згідно з нерівністю Мінковського та нерівністю різних метрик Нікольського (3) маємо

$$\left\|f(\cdot) - S_{Q_n}(f,\cdot)\right\|_\infty = \left\|\sum_{\|s\|_1\ge n}\delta_s(f,\cdot)\right\|_\infty \le \sum_{\|s\|_1\ge n}\|\delta_s(f,\cdot)\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{\|s\|_1\ge n} 2^{\frac{\|s\|_1}{p}}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p. \tag{14}$$

Застосовуючи до останньої суми в (14) нерівність Гельдера з показником $\theta \in [1,\infty)$ (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$), продовжуємо оцінку

$$\le \left(\sum_{\|s\|_1\ge n}\omega^{-\theta}\left(2^{-\|s\|_1}\right)\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\|s\|_1\ge n}\left(\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)2^{\frac{\|s\|_1}{p}}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\left(\sum_{\|s\|_1\ge n}\left(\frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{2^{-\alpha\|s\|_1}}2^{-\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)\|s\|_1}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\left(\sum_{\|s\|_1\ge n}2^{-\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)\|s\|_1\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}2^{-\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)n} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} = \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то для $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$, продовжуючи оцінку (14), одержуємо

$$\le \sup_{\|s\|_1 \ge n} \frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)} \sum_{\|s\|_1 \ge n} \frac{\omega\left(2^{-\|s\|_1}\right)}{2^{-\alpha\|s\|_1}} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)\|s\|_1} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)n} n^{d-1} \le \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{d-1}.$$

Оцінку зверху доведено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Нехай $V_m(t)$ — ядро Валле Пуссена порядку $2m-1$

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k-m}{m}\right) \cos kt.$$

Покладемо

$$f_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j+1}}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j)\right).$$

Тоді (див., наприклад, [8, с. 66])

$$\|f_s(\cdot)\|_p \asymp 2^{\|s\|_1\left(1 - \frac{1}{p}\right)}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

і тому функції

$$f_1(x) = C_3 \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p} - 1\right)} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|s\|_1 = n+1} f_s(x), \quad C_3 > 0,$$

та

$$f_2(x) = C_4 \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p} - 1\right)} \sum_{\|s\|_1 = n+1} f_s(x), \quad C_4 > 0,$$

належать до класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\infty}$ відповідно. Крім того, легко бачити, що $S_{Q_n}(f_1, x) = 0$ і $S_{Q_n}(f_1, x) = 0$.

Таким чином, беручи до уваги те, що (див., наприклад, [8, с. 66])

$$\left\| \sum_{\|s\|_1 = n+1} f_s(\cdot) \right\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1},$$

маємо

$$\| f_1(\cdot) - S_{Q_n}(f_1, \cdot)\|_\infty = \|f_1\|_\infty \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Аналогічно для f_2 одержуємо

$$\| f_2(\cdot) - S_{Q_n}(f_2, \cdot)\|_\infty = \|f_2\|_\infty \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{d-1}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею й теорему 2 доведено.

Зауваження. **3.** Для $\theta = \infty$ при виконанні умов теореми 2 має місце порядкова рівність

$$\sup_{f \in H^{\Omega}_p} \| f(\cdot) - S_{Q_n}(f, \cdot)\|_\infty \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)}.$$

4. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\alpha = r_1 > 1/p$, то має місце порядкова рівність

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \left\| f(\cdot) - S_{Q_n}(f, \cdot) \right\|_{\infty} \asymp 2^{-\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)n} n^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)},$$

яку встановлено в роботі [15].

1. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
2. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
3. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 5. – С. 1127 – 1130.
4. *Makovoz Y.* On trigonometric n-widths and their generalizations // J. Approxim. Theory. – 1984. – **41**, № 4. – P. 361 – 366.
5. *Кашин Б. С.* Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **172**. – С. 187 – 191.
6. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20 – 27.
7. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294 – 1297.
8. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
9. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 46 – 47.
10. *Belinskii E. S.* Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy // Anal. math. – 1989. – **15**, № 2. – P. 67 – 74.
11. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535 – 1547.
12. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II // Там же. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1411 – 1423.
13. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
14. *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1097 – 1111.
15. *Романюк А. С.* Об оценках аппроксимативных характеристик классов Бесова периодических функций многих переменных // Там же. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1250 – 1261.
16. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
17. *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 381 – 394.
18. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
19. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
20. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным модулем непрерывности // Anal. math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.

Одержано 13.11.2001