УДК 519. 64

$\boxed{\text{Ю. И. Мельник}}$, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев),

Ю. К. Подлипенко, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В КЛИНЕ

It is found that, in the spherical coordinate system, the fundamental solution of the Helmholtz equation in a wedge satisfies the Sommerfeld emission conditions at infinity uniformly with respect to the angle coordinates.

Встановлено, що у сферичній системі координат фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца у клині задовольняє на нескінченності умови випромінювання Зоммерфельда рівномірно за кутовими координатами.

1. Введем в $\mathbb{R}^3$ сферическую систему координат r, θ, φ $(0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$ и обозначим через $\Omega := \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < \Phi\}$ клин с углом раствора Φ, $0 < \Phi \le 2\pi$.

Положим

$$\gamma_m = m\pi/\Phi,\ m = 1, 2, \ldots;\ M = (r_M, \theta_M, \varphi_M) \in \Omega, N = (r_N, \theta_N, \varphi_N) \in \Omega;$$

$P_\mu^\nu(x)$ — присоединенные функции Лежандра [1, гл. 3]; $j_\nu(x)$ — сферические функции Бесселя, $h_\nu^{(1)}(x)$ — сферические функции Ханкеля [2, с. 256]; $r_< :=$ $:= \min\{r_M, r_N\}$, $r_> := \max\{r_M, r_N\}$ и пусть

$$G(M,N) := \frac{ik}{\Phi}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\gamma_m\varphi_M \sin\gamma_m\varphi_N \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+\gamma_m)+1] \times$$
$$\times \Gamma(n+2\gamma_m+1)(n!)^{-1} P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta_{rM}) \times$$
$$\times P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta_N) j_{n+\gamma_m}(kr_<) h_{n+\gamma}^{(1)}(kr_>) \tag{1}$$

— фундаментальное решение, удовлетворяющее в клине Ω уравнению

$$\left\{ r_M^{-2}\left(\frac{\partial}{\partial r_M}\right)\left(r_M^2 \frac{\partial}{\partial r_M}\right) + r_M^{-2}\sin^{-1}\theta_M\left(\frac{\partial}{\partial\theta_M}\right)\left(\sin\theta_M \frac{\partial}{\partial\theta_M}\right) + r_M^{-2}\sin^{-2}\theta_M \frac{\partial^2}{\partial\varphi_M^2} + \right.$$
$$\left. + k^2 \right\} G(M,N) = -r_N^{-2}\sin^{-1}\theta_N \delta(r_M - r_N)\delta(\theta_M - \theta_N)\delta(\varphi_M - \varphi_N)$$

и краевым условиям $G(r_M, \theta_M, \varphi_M, r_N, \theta_N, \varphi_N) = 0$ на его гранях $\varphi_M = 0$ и $\varphi_M = \Phi$ (см., например, [3, с. 356]).

2. Теорема. *Функция $G(M,N)$ при любом фиксированном $N \in \Omega$ удовлетворяет следующим условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности*

$$G(M,N) = O(r_M^{-1}),\quad r_M \to +\infty, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_M} G(M,N) - ikG(M,N) = o(r_M^{-1}),\quad r_M \to +\infty, \tag{3}$$

равномерно по $0 < \theta_M < \pi$ *и* $0 < \varphi_M < \Phi$.

Доказательство. I. Рассмотрим случай

$$\varepsilon \le \theta_m \le \pi - \varepsilon, \tag{4}$$

где ε — фиксированное достаточно малое положительное число.

Для оценки общего члена ряда (1) воспользуемся следующими неравенствами [4, с. 1018, 5, с. 27]:

$$|P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta)| \le \pi^{1/2}(n+\gamma_m)^{-1/2}\Gamma(n+1)\Gamma^{-1}(n+\gamma_m+1)\sin^{-\gamma_m-1/2}\theta, \tag{5}$$

$$|J_{n+\gamma_m+1/2}(kr_N)H^{(1)}_{n+\gamma_m+1/2}(kr_M)| \le A_q\left(n + \gamma_m + \frac{1}{2}\right)^2 q^{n+\gamma_m+1/2}r_M^{-1/2}, \tag{6}$$

$$r_M > r_0,$$

где $J_\nu(x)$ и $H_\nu^{(1)}(x)$ — соответственно цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля, $r_M > r_N$, q — любое положительное число, меньшее единицы, A_q — постоянная, зависящая только от q. Используя сотношения [2, с. 256]

$$j_{n+\gamma_m}(kr_N) = \pi^{1/2}(2kr_N)^{-1/2}J_{n+\gamma_m+1/2}(kr_N),$$

$$h^{(1)}_{n+\gamma_m}(kr_M) = \pi^{1/2}(2kr_M)^{-1/2}H^{(1)}_{n+\gamma_m+1/2}(kr_M)$$

и неравенства (4) – (6), получаем

$$|\sin(\gamma_m\varphi_M)\sin(\gamma_m\varphi_N)[2(n+\gamma_m)+1]\,\Gamma(n+2\gamma_m+1)(n!)^{-1}\times$$

$$\times P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta_M)P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta_N)j_{n+\gamma_m}(kr_N)h^{(1)}_{n+\gamma_m}(kr_M)| \le$$

$$\le A[2(n+\gamma_m)+1](n+\gamma_m)^{-1}\,\Gamma(n+2\gamma_m+1)(\Gamma(n+\gamma_m+1))^{-2}n!\times$$

$$\times(\sin\varepsilon\sin\theta_N)^{-\gamma_m-1/2}A_q\left(n + \gamma_m + \frac{1}{2}\right)^2 q^{n+\gamma_m+1/2}r_M^{-1},\quad A, A_q = \text{const}. \tag{7}$$

Обозначая $\delta_{m,n} := \Gamma(n+2\gamma_m+1)n!(\Gamma(n+\gamma_m+1))^{-2}$ и используя известную асимптотическую формулу [1, с. 62]

$$\ln\Gamma(x+\alpha) = \left(x + \alpha - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O(x^{-1}),\quad x\to+\infty,\quad \alpha = \text{const},$$

после простых преобразований имеем

$$\ln\delta_{m,n} = \left(n + 2\gamma_m + \frac{1}{2}\right)\ln(n+2\gamma_m) - (n+2\gamma_m) + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O((n+2\gamma_m)^{-1}) +$$

$$+ \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) - 2\left(n + 2\gamma_m + \frac{1}{2}\right)\ln(n+\gamma_m) + 2(n+\gamma_m) -$$

$$-\ln 2\pi + O((n+\gamma_m)^{-1}) \le 2\gamma_m + A,\quad A = \text{const},$$

так что

$$\delta_{m,n} \le A\exp(2\gamma_m). \tag{8}$$

Из неравенств (7), (8) легко заключаем, что, выбирая q достаточно малым, можно добиться того, чтобы общий член ряда (1) мажорировался величиной $A(Q)r_M^{-1}Q^{n+\gamma_m}$, где $0 < Q < 1$ (и зависит от выбора q), $A(Q)$ — константа (зависящая от Q). Отсюда непосредственно следует справедливость асимптотической оценки (2) равномерно по $\varepsilon \le \theta_M \le \pi - \varepsilon$, $0 < \varphi_M < \Phi$.

Используя рекуррентное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x}h^{(1)}_{n+\gamma_m}(x) = -(n+\gamma_m+1)x^{-1}h^{(1)}_{n+\gamma_m}(x) + h^{(1)}_{n+\gamma_m-1}(x)$$

и тот факт, что функции $h^{(1)}_{n+\gamma_m}(kr_M)$ удовлетворяют условию (3), а также соображения, приведенные в [5, с. 28], аналогично устанавливаем справедливость асимптотической оценки (3) равномерно по $\varepsilon \le \theta_M \le \pi - \varepsilon$, $0 < \varphi_M < \Phi$.

II. Рассмотрим случай $0 < \theta_M \le \varepsilon$, $\pi - \varepsilon \le \theta_M < \pi$. (В силу известного соотношения [4, с. 1020]

$$P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(-x) = (-1)^n P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(x)$$

достаточно ограничиться случаем $0 < \theta_M \le \varepsilon$.)

Используя интегральное представление [6, с. 53]

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta) = \Gamma^{-1}(\nu + \mu + 1)\int\limits_0^\infty \exp(-t\cos\theta) J_\mu(t\sin\theta) t^\nu\, dt,$$

$$0 < \theta < \pi/2, \quad \operatorname{Re}(\nu + \mu + 1) > 0,$$

и неравенство [2, с. 184]

$$|J_\mu(t\sin\theta)| \le 2\left|\frac{t}{2}\sin\theta\right|^\mu \pi^{-1/2}\,\Gamma^{-1}\left(\mu + \frac{1}{2}\right),$$

получаем

$$|P_{n+\gamma_m}^{-\gamma_m}(\cos\theta_M)| = \left|\Gamma^{-1}(n + 2\gamma_m + 1)\int\limits_0^\infty \exp(-t\cos\theta_M) J_{\gamma_m}(t\sin\theta_M)^{n+\gamma_m} \times\right.$$

$$\left.\times\, t^{n+\gamma_m}\, dt\right| \le 2\left(\frac{1}{2}\sin\varepsilon\right)^{\gamma_m} \pi^{-1/2}\,\Gamma^{-1}(n + 2\gamma_m + 1)\,\Gamma^{-1}\left(\gamma_m + \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \exp(-t\cos\varepsilon) t^{n+2\gamma_m}\, dt = 2\left(\frac{1}{2}\sin\varepsilon\right)^{\gamma_m} \pi^{-1/2} (\cos\varepsilon)^{-(n+2\gamma_m+1)} \times$$

$$\times\, \Gamma^{-1}\left(\gamma_m + \frac{1}{2}\right).$$

Используя теперь схему доказательства части I (меняя при этом неравенство (5) на неравенство (9)), легко убеждаемся в справедливости асимптотических оценок (2), (3) равномерно по $0 < \theta_M \le \varepsilon$, $\pi - \varepsilon \le \theta_M < \pi$, $0 < \varphi_M < \Phi$. Теорема доказана.

Замечания. **1.** Легко видеть, что теорема остается справедливой для функции $G(M, N)$, удовлетворяющей на гранях клина $\varphi = 0$ и $\varphi = \Phi$ более общим краевым условиям импедансного типа.

2. Из доказательства теремы следует, что асимптотические оценки (2), (3) являются равномерными по всем N, принадлежащим замкнутому ограниченному множеству $D \subset \Omega$.

3. Полученные результаты дают возможность построения теории потенциала для задач дифракции на препятствиях, содержащихся внутри клина.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – 294 с.
2. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
3. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн: В 2-х т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2 – 555 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
5. *Подлипенко Ю. К.* Теория потенциала для задач дифракции в клине и слое . – Киев, 1988. – 68 с. – (Препринт / АН УССР. Ин–т математики; 88.55).
6. *Кампе де Ферье Ж. и др.* Функции математической физики. – М.: Физматгиз, 1963. – 102 с.

Получено 05. 06. 91