УДК 517.986

В. Л. Островский, канд. физ.-мат. наук,
Ю. С. Самойленко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ПАРАХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СООТНОШЕНИЕМ

Unbounded pairs of self-adjoint operators A, B, which satisfy the algebraic relation $F_1(A)B = BF_2(A)$ are studied. For such relations, the various definitions of "integrable" pairs of operators are given and the class of "tame" relations is indicated; for these relations, the irreducible pairs are described and the structure theorem is presented.

Вивчаються пари необмежених самоспряжених операторів A, B, пов'язаних алгебраїчним співвідношенням вигляду $F_1(A)B = BF_2(A)$. Для таких співвідношень наведені різноманітні варіанти визначення „інтегровних" пар операторів, виділено клас „ручних" співвідношень, для яких описано незвідні пари та наведено структурну теорему.

В работах [1, 2] изучались пары самосопряженных, вообще говоря, неограниченных операторов A, B в гильбертовом пространстве H, связанных соотношением вида

$$AB = BF(A), \tag{1}$$

где $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция. Для таких соотношений были описаны неприводимые пары и приведена структурная теорема, дающая разложение произвольной пары A, B, удовлетворяющей (1), на неприводимые.

В настоящей работе рассмотрены пары, вообще говоря, неограниченных самосопряженных операторов A, B, удовлетворяющих более общему соотношению

$$F_1(A)B = BF_2(A), \tag{2}$$

где $F_1, F_2\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — измеримые функции. В п. 1 изучаются варианты различных определений соотношения (2) для неограниченных операторов. Задача описания неприводимых пар вида (2) в общем случае не поддается решению („дикая"). В п. 2 приведены необходимые и достаточные условия того, что пара неограниченных самосопряженных операторов A, B, удовлетворяющих (2) — „ручная", для „ручных" пар описаны неприводимые представления и приведена структурная теорема, а в п. 3 — различные примеры соотношений вида (2). В п. 4 вкратце рассмотрены обобщения приведенных построений на случай семейств самосопряженных операторов, связанных соотношениями вида (2).

1. Поскольку мы не предполагаем ограниченности операторов A, B, для устранения разночтений при понимании соотношений (2) необходимо выделить класс "интегрируемых" пар самосопряженных операторов, удовлетворяющих (2). При этом естественно предположить, что ограниченные пары являются "интегрируемыми".

Теорема 1. *Для ограниченных самосопряженных операторов* A, B, $F_1(A)$, $F_2(A)$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $F_1(A)B = BF_2(A)$;

2) $E_A(F_1^{-1}(\Delta))\sin tB = \sin tBE_A(F_2^{-1}(\Delta))\quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1,\quad \forall\, \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$;

3) $f(F_1(A))g(B) = g(B)f(F_2(A))$ *для любых ограниченных измеримых* f, g, *причем* g *предполагается нечетной.*

(Здесь и далее $E_A(\cdot)$ — разложение единицы оператора A.)

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Из условия 1 по сопряжению имеем также $F_2(A)B = BF_1(A)$, откуда

$$F_1(A)B^2 = BF_2(A)B = B^2F_1(A),$$

$$F_1(A)B^{2n} = B^{2n}F_1(A), \quad F_1(A)B^{2n+1} = B^{2n+1}F_2(A)$$

и для любого нечетного полинома $Q(\cdot)$

$$F_1(A)Q(B) = Q(B)F_2(A).$$

Аналогично для любого полинома $P(\cdot)$ имеем $P(F_1(A))Q(B) = Q(B)P(F_2(A))$. Для получения условия 3 теперь можно аппроксимировать f и g полиномами и воспользоваться функциональным исчислением для ограниченных самосопряженных операторов A, B.

3) $\Rightarrow$ 2), 3) $\Rightarrow$ 1) очевидно, поскольку условия 2, 1 — частные случаи условия 3.

2) $\Rightarrow$ 1). Прежде всего, поскольку $E_{F_i(A)}(\Delta) = E_A(F_i^{-1}(\Delta))$, из спектрального разложения для $F_1(A), F_2(A)$ имеем $F_1(A)\sin tB = \sin tBF_2(A) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$.

Дальнейшее доказательство сводится к сильной аппроксимации ограниченного самосопряженного оператора B тригонометрическими полиномами от оператора B.

Поскольку в формулировке п. 2 теоремы 1 речь идет только об ограниченных операторах, представляется естественным следующее определение.

***Определение* 1.** *Будем говорить, что пара неограниченных самосопряженных операторов A, B удовлетворяет соотношению* (2), *если* $\forall\, t \in \mathbb{R}^1$, $\forall\, \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$

$$E_A(F_1^{-1}(\Delta))\sin tB = \sin tBE_A(F_2^{-1}(\Delta)).$$

Теорема 2. *Для неограниченных самосопряженных операторов A, B следующие условия эквивалентны:*

1) $E_A(F_1^{-1}(\Delta))\sin tB = \sin tBE_A(F_2^{-1}(\Delta))$;

2) *для любых ограниченных измеримых f, g*

$$f(F_1(A))g(B) = g_{\text{even}}(B)f(F_1(A)) + g_{\text{odd}}(B)f(F_2(A)),$$

где g_{even} и g_{odd} — четная и нечетная часть g;

3) *на плотной в H области Φ, состоящей из целых векторов для $F_1(A)$, $F_2(A)$, B и инвариантной относительно этих операторов, выполнено соотношение $F_1(A)B\varphi = BF_2(A)\varphi$, $\varphi \in \Phi$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Переходя в условии 1 к спектральному интегралу, в силу ограниченности оператора $\sin tB$ для любой ограниченной измеримой функции f имеем $f(F_1(A))\sin tB = \sin tB\, f(F_2(A)) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$. Поскольку

$$f(F_1(A))\sin^2 tB = \sin tB\, f(F_2(A))\sin tB = \sin^2 tB\, f(F_1(A)),$$

имеем также

$$f(F_1(A))\cos tB = \cos tB\, f(F_1(A)) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1.$$

Проводя соответствующую аппроксимацию, для любых четной $g_{\text{even}}(\cdot)$ и нечетной $g_{\text{odd}}(\cdot)$ ограниченных измеримых функций получаем

$$f(F_1(A))g_{\text{even}}(B) = g_{\text{even}}(B)f(F_1(A)), \quad f(F_1(A))g_{\text{odd}}(B) = g_{\text{odd}}(B)f(F_2(A)).$$

Обратная импликация очевидна.

1) $\Rightarrow$ 3). Прежде всего, покажем, что выполнение условия 1 влечет существование плотной в H инвариантной относительно B, $F_1(A)$, $F_2(A)$ области Φ,

состоящей из целых векторов для указанных операторов. Действительно, выберем в качестве такой области

$$\Phi_0 = \bigcup E_{F_1(A)}(\Delta_1) E_{F_2(A)}(\Delta_2) E_{B^2}(\Delta_3) H,$$

где $E_{F_1(A)}(\cdot)$, $E_{F_2(A)}(\cdot)$, $E_{B^2}(\cdot)$ — разложения единицы соответствующих самосопряженных операторов, а объединение берется по всем компактным множествам $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in \mathbb{R}^1$. Легко проверить, что такое Φ_0 удовлетворяет всем необходимым условиям.

Пусть теперь Φ — произвольное плотное в H инвариантное множество, состоящее из целых векторов. Для любых $\varphi, \psi \in \Phi$ из условия 1 имеем

$$(E_A(F_1^{-1}(\Delta))\varphi, \sin tB\, \psi) = (\sin tB\, \varphi, E_A(F_2^{-1}(\Delta))\psi).$$

Последнее соотношение можно продифференцировать по t при $t = 0$. В результате получим

$$(E_A(F_1^{-1}(\Delta))\varphi, B\psi) = (B\psi, E_A(F_2^{-1}(\Delta))\psi).$$

Поскольку Φ входит в области определения операторов $F_1(A)$, $F_2(A)$, имеем также

$$(F_1(A)\varphi, B\psi) = (B\psi, F_2(A)\psi).$$

Пользуясь инвариантностью и плотностью Φ, из последнего соотношения получаем $F_1(A)B\psi = BF_2(A)\psi$.

3) $\Rightarrow$ 1). Для произвольного $\varphi \in \Phi$ выполнены соотношения

$$F_1^n(A)B\varphi = F_1^{n-1}(A)BF_2(A)\varphi = BF_2^n(A)$$

и в силу целости векторов φ, $B\varphi$ имеем равенство

$$e^{itF_1(A)}B\varphi = Be^{itF_2(A)}\varphi \quad \forall\, t \in \mathbb{C}^1.$$

Для произвольных $\varphi, \psi \in \Phi$ имеем равенство

$$\int e^{it\lambda} d(E_A(F_1^{-1}(\lambda)B\varphi, \psi) = (e^{itF_1(A)}B\varphi, \psi) =$$

$$= (e^{itF_2(A)}\varphi, B\psi) = \int e^{it\lambda} d(E_A(F_2^{-1}(\lambda))\varphi, B\psi).$$

В силу единственности преобразования Фурье имеем соотношение

$$(E_A(F_1^{-1}(\Delta))B\varphi, \psi) = (E_A(F_2^{-1}(\Delta))\varphi, B\psi),$$

из которого следует условие 1.

В работе [3] изучались пары ограниченных самосопряженных операторов A, B, связанных полулинейным соотношением общего вида. В частности, для соотношений вида (2) следует такой результат.

Утверждение 1. *Пусть* $\Gamma = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \colon F_1(t) = F_2(s), F_1(s) = F_2(t)\}$. *Если ограниченные операторы* A, B *связаны соотношением* (2), *то* $\forall\ \Delta, \Delta' \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$, $\Delta \times \Delta' \cap \Gamma = \varnothing$

$$E_A(\Delta)BE_A(\Delta') = 0.$$

Приведем независимое доказательство этого факта, которое позволит включить в рассмотрение неограниченные операторы.

Действительно,

$$E_A(F_1^{-1}(F_1(\Delta)))\,BE_A(F_2^{-1}(F_2(\Delta'))) = BE_A(F_2^{-1}(F_1(\Delta)))\,E_A(F_2^{-1}(F_2(\Delta'))) =$$
$$= BE_A(F_2^{-1}(F_1(\Delta) \cap F_2(\Delta'))).$$

Аналогично

$$E_A(F_2^{-1}(F_2(\Delta)))\,BE_A(F_1^{-1}(F_1(\Delta'))) = BE_A(F_1^{-1}(F_2(\Delta) \cap F_1(\Delta'))).$$

При этом, по крайней мере, одно из приведенных выражений равно нулю, поскольку $\Delta \times \Delta' \cap \Gamma = \varnothing$. Так как $\Delta \subset F_j^{-1}(F_j(\Delta))$, отсюда следует

$$E_A(\Delta)\,BE_A(\Delta') = 0.$$

Оказывается, верно и обратное утверждение.

Утверждение 2. *Пусть A, B — ограниченные самосопряженные операторы такие, что*

$$E_A(\Delta)\,BE_A(\Delta') = 0$$

для любых Δ, Δ' таких, что $\Delta \times \Delta' \cap \Gamma = \varnothing$. Тогда для операторов A, B выполнено соотношение (2).

Доказательство. Действительно, $\forall\, \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$

$$E_A(F_1^{-1}(\Delta))B = E_A(F_1^{-1}(\Delta))BE_A(\mathbb{R}^1) = E_A(F_1^{-1}(\Delta))BE_A(\tilde{\Delta}),$$

где $\tilde{\Delta} = \cap\, \Delta_\alpha$ и пересечение берется по всем Δ_α таким, что $(\Delta \times \Delta_\alpha) \cap \Gamma = \varnothing$. Нетрудно заметить, что $\tilde{\Delta} = \{s\colon\ \exists\, t \in \Delta,\ F_2(s) = t\}$, поэтому $E_A(F_1^{-1}(\Delta))B = E_A(F_1^{-1}(\Delta))\,BE_A(F_2^{-1}(\Delta))$.

Аналогично $BE_A(F_2^{-1}(\Delta)) = E_A(F_1^{-1}(\Delta))\,BE_A(F_2^{-1}(\Delta))$ и окончательно

$$E_A(F_1^{-1}(\Delta))B = BE_A(F_2^{-1}(\Delta)).$$

Пусть теперь A, B — неограниченные самосопряженные операторы, связанные соотношением (2) в смысле определения 1. Как показано при доказательстве теоремы 2, выполнение соотношений (2) эквивалентно их выполнению на множестве совместных ограниченных векторов коммутирующих операторов $F_1(\Delta)$, $F_2(\Delta)$, B^2. Обозначим это множество через Φ.

Теорема 3. *Для неограниченных самосопряженных операторов A, B выполнены соотношения* (2) *тогда и только тогда, когда* $\forall\, \varphi \in \Phi$

$$F_A(\Delta)\,BE_A(\Delta')\varphi = 0$$

для всех множеств $\Delta, \Delta' \in \mathbb{R}^1$ таких, что $\Delta \times \Delta' \cap \Gamma = \varnothing$.

Доказательство повторяет аргументы утверждений 1, 2 с учетом того, что все соотношения справедливы на векторах $\varphi \in \Phi$.

2. Рассмотрим теперь задачу описания всех пар A, B, вообще говоря, неограниченных самосопряженных операторов, связанных соотношением (2) (всех самосопряженных решений операторного уравнения (2)). Будем отождествлять унитарно эквивалентные решения (как обычно, пара A, B операторов в H называется унитарно эквивалентной паре $\tilde{A}, \tilde{B}$ операторов в $\tilde{H}$, если существует унитарный оператор $U\colon H \to \tilde{H}$ такой, что $A = U^*\tilde{A}U$, $B = U^*\tilde{B}U$).

Прежде всего опишем простейшие (неприводимые) пары A, B (пара A, B называется неприводимой, если для $C \in L(H)$ из $[A, C] = [B, C] = 0$ следует $C = \lambda I$).

Следуя [4], составим характеристические функции $\Phi_1(\cdot, \cdot)$ и $\Phi_2(\cdot, \cdot)$ соотношения (2):

$$\Phi_1(t, s) = F_1(t) - F_2(s), \quad \Phi_2(t, s) = F_2(t) - F_1(s), \quad t, s \in \mathbb{R}^1.$$

Характеристическое бинарное отношение

$$\Gamma = \{(t, s)\colon \ \Phi_1(t, s) = \Phi_2(t, s) = 0\}$$

можно рассматривать как множество дуг неориентированного графа (для краткости обозначим его также через Γ и назовем графом соотношения (2)). В "ручной" ситуации связные компоненты графа Γ имеют вид •,  или •—•, а система

$$\begin{cases} F_1(t) = F_2(s), \\ F_2(t) = F_1(s) \end{cases} \tag{3}$$

для любого $t \in \mathbb{R}^1$ не имеет решений или имеет единственное решение. Задавая динамическую систему $\mathbb{R} \supset \sigma \ni t \xrightarrow{F} s \in \sigma \subset \mathbb{R}$ для тех t, для которых это решение существует, запишем соотношение (2) в виде (1). Все неприводимые представления соотношения (2) тогда одно- или двумерны, и справедлива структурная теорема [1].

Теорема 4. *Пусть A и B — самосопряженные операторы в H, связанные соотношением* (2) *таким, что реализуется "ручная" ситуация. Тогда однозначно определены разложение $H = H_0 \oplus H_1 \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes H_+)$ и ортогональные разложения единицы:* 1) $E_0(\cdot)$ *на* $\mathbb{R}^1$ *со значениями в проекторах на подпространства* H_0; 2) $E_1(\cdot, \cdot)$ *на* $M_1 = \{(\lambda, b)\colon \ F(\lambda) = \lambda, \ b \neq 0\}$ *со значениями в проекторах на подпространства* H_1; 3) $E_2(\cdot, \cdot)$ *на* $M_2 = \{(\lambda, b)\colon \ F(F(\lambda)) = \lambda, \ F(\lambda) > \lambda, \ b > 0\}$ *со значениями в проекторах на подпространства* H_+ *такие, что*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_0(\lambda) + \int_{M_1} \lambda dE_1(\lambda, b) + \int_{M_2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & F(\lambda) \end{pmatrix} \otimes dE_2(\lambda, b),$$

$$B = \int_{M_1} b dE_1(\lambda, b) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \int_{M_2} b dE_2(\lambda, b).$$

Если же связные графы характеристического бинарного отношения устроены сложнее и в качестве фрагментов содержат подграфы вида  или •—•—• (система (3) при некоторых t имеет два или более решений), то задача описания всех неприводимых решений (2) — "дикая" (т. е. существуют решения (2) такие, что слабо замкнутая алгебра, порожденная A и B, — фактор не типа I (см. [4])).

3. *Примеры.* а). Соотношение $AB = BF(A)$, $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Система (3)

$$\begin{cases} t = F(s), \\ s = F(t) \end{cases}$$

имеет единственное решение $(t, F(t))$, при этом должно быть $F(F(t)) = t$.

б). Соотношение $[A^2, B] = 0$ — "дикое", так как задача описания пар A, B содержит в себе задачу описания пар операторов вида $A = P - P^{\perp}$, $B = Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3$ (P, Q_1, Q_2, Q_3 – проекторы, $Q_1 \perp Q_2 \perp Q_3$, $Q_1 + Q_2 + Q_3 = I$). В свою очередь, эта задача эквивалентна "дикой" (см. [5, 6]) задаче описания троек проекторов, два из которых ортогональны.

Характеристическое отношение $\Gamma = \{(t, s)\colon \ t^2 = s^2\}$ имеет граф со связными компонентами вида .

4. Аналогично [1] можно рассматривать коммутирующее семейство $\mathbf{A}$ =

$= (A_k)_{k \in \Lambda}$ самосопряженных операторов в H, связанных с оператором B соотношениями

$$F_k(\mathbf{A})B = BG_k(\mathbf{A}), \quad k \in \Lambda. \tag{4}$$

Для таких семейств операторов подобно п. 1 определяется класс "интегрируемых" семейств, если вместо разложения единицы $E_A(\cdot)$ оператора A использовать совместное разложение единицы $E_{\mathbf{A}}(\cdot)$ коммутирующего семейства $\mathbf{A}$. При этом если набор $\mathbf{A}$ конечен или счетен, справедливы все утверждения п. 1, для несчетных наборов могут возникнуть трудности при построении области Φ (оснащения).

При изучении представлений соотношений (4) получаем бинарное отношение

$$\Gamma = \{(t, s) \in \mathbb{R}^\Lambda \times \mathbb{R}^\Lambda: \ \mathbf{F}(t) = \mathbf{G}(s), \ \mathbf{F}(s) = \mathbf{G}(t)\}$$

(здесь $\mathbf{F}(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot), \ldots), \ \mathbf{G}(\cdot) = (G_1(\cdot), G_2(\cdot), \ldots): \ \mathbb{R}^\Lambda \to \mathbb{R}^\Lambda$) и соответствующий граф Γ. "Ручная" ситуация реализуется при тех же условиях на Γ, что и в случае одного оператора A.

Приведенные рассмотрения обобщаются и на случай конечного набора $\mathbf{B} = (B_j)_{j=1}^n$ коммутирующих самосопряженных операторов, связанных с оператором A (или коммутативным семейством $\mathbf{A}$) соотношениями вида

$$F_j(A)B_j = B_jG_j(A), \quad j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

(соответственно соотношениями вида

$$F_{k,j}(\mathbf{A})B_j = B_jG_{k,j}(\mathbf{A}), \quad j = 1, \ldots, n; \quad k \in \Lambda).$$

Для таких наборов определяется понятие "интегрируемости" и верны аналоги утверждений п. 1. Что касается описания неприводимых представлений, то здесь ситуация несколько сложнее — необходимо рассматривать n бинарных отношений Γ_j, соответствующих каждому из операторов B_j. Пусть все операторы B_j невырождены (этого можно добиться, отщепляя инвариантные подпространства $\operatorname{Ker} B_j$). При этом, поскольку B_j и B_l коммутируют, из $(t, s) \in \Gamma_j$, $(t, t') \in \Gamma_l$ следует, что существует s' такое, что $(t', s') \in \Gamma_j$, $(s, s') \in \Gamma_l$. Критерий того, что задача описания неприводимых представлений соотношений (5) "ручная", состоит в том, чтобы связные компоненты каждого из графов Γ_j имели вид, указанный в п. 2. Неприводимые представления в "ручной" ситуации могут иметь размерность $1, 2, \ldots, 2^n$.

1. *Островский В. Л., Самойленко Ю. С.* Семейства неограниченных самосопряженных операторов, связанных нелиевскими соотношениями // Функцион. анализ и его прил. – 1989. – **23**, вып. 2. – С. 67 – 68.
2. *Ostrovskii V. L., Samoilenko Yu. S.* Unbounded operators satisfying non-Lie commutation relations // Reports Math. Phys. – 1989. – **28**, № 1. – P. 91 – 104.
3. *Samoilenko Yu. S.* Spectral theory of collections of selfadjoint operators. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1990. – 310 p.
4. *Беспалов Ю. Н., Самойленко Ю. С., Шульман В. С.* О наборах операторов, связанных полулинейными соотношениями // Применение методов функцион. анализа в мат. физике. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 28 – 51.
5. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – **14**, вып. 1. – С. 59 – 62.
6. *Беспалов Ю. Н., Самойленко Ю. С.* Алгебраические операторы и пары самосопряженных операторов, связанных полиномиальными соотношениями // Там же. – 1991. – **25**, вып. 4. – С. 72 – 74.

Получено 30. 06. 92