УДК 519.21

А. Г. Кукуш, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПРОЕКЦИОННОЙ ОЦЕНКИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ПАРАМЕТРА НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

A model of nonlinear regression in an infinite-dimensional space is considered. The errors are equally distributed and have a unit correlation operator. The projective estimate for a parameter is constructed and the conditions are obtained under which it is consistent. For the parameter that belongs to an ellipsoid in a Hilbert space, the asymptotic normality of estimates is proved; for this purpose, we use the representation of the estimate in terms of the Lagrange factor and study its asymptotics. The example of nonparametric estimation of a signal for iterated observations under an additive noise is investigated.

Розглянуто модель нелінійної регресії в нескінченновимірному просторі. Похибки спостережень однаково розподілені та мають одиничний кореляційний оператор. Побудована проекційна оцінка параметра, одержані умови її слушності. Для параметра, що належить еліпсоїду в гільбертовому просторі, доведена асимптотична нормальність оцінок. При цьому використано подання оцінки через множник Лагранжа, вивчена асимптотика останнього. Розглянуто приклад непараметричного оцінювання сигналу при повторних спостереженнях в адитивному шумі.

Настоящая работа является продолжением статьи [1], где изучен случай нелинейной регрессии. Там же приведен обзор некоторых работ, касающихся проекционных оценок бесконечномерного параметра. Подобные схемы регрессии допускают содержательную интерпретацию в модели наблюдений сигнала или его преобразований на фоне помех [2]. Асимптотическая нормальность оценок сигнала позволяет доказывать аналогичное свойство для оценок нелинейных функционалов от сигнала.

1. Непараметрическое оценивание сигнала. Пусть на отрезке $[0, T]$ наблюдается последовательность функций

$$y_n(t) = s_0(t) + \xi_n(t), \quad t \in [0, T], \quad n \ge 1. \tag{1}$$

Здесь $s_0 \in L_2[0, T]$ — неизвестная функция, подлежащая оцениванию; $\{\xi_n(t),\ t \in [0, T];\ n \ge 1\}$ — последовательность независимых, измеримых и непрерывных в среднем квадратическом процессов с нулевым средним. Предположим также, что процессы $\{\xi_n(t)\}$ порождают одинаковые распределения в пространстве траекторий $L_2[0, T]$; пусть $r(t, s)$ — их общая корреляционная функция. Рассмотрим интегральный оператор в $L_2[0, T]$

$$(Kx)(t) := \int_0^T r(t, s)x(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad x \in L_2[0, T].$$

Предположим, что он ядерный и все его собственные числа $\lambda_n > 0$. Пусть φ_n, $n \ge 1$, — соответствующие собственные функции. Указанные предположения о процессах выполняются, например, если $\{\xi_n(t)\}$ — независимые реализации стандартного винеровского процесса на $[0, T]$.

Пусть (f, g) — скалярное произведение функций f и g в $L_2[0, T]$; $\{a_i\}$ — заданная бесконечно малая последовательность положительных чисел. Предположим, что $s_0 \in \tilde{\Theta}$,

$$\tilde{\Theta} := \left\{ f \in L_2[0, T]\colon\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)^2}{a_i} \le 1 \right\}. \tag{2}$$

Требуется по наблюдениям $y_n(t)$, $n = \overline{1, N}$, при ограничениях (2) построить оценку функции s_0.

Наблюдения (1) можно интерпретировать как наблюдения в пространстве последовательностей l_2. Действительно, умножив (1) скалярно на φ_i, получим

$$y_{ni} := (y_n, \varphi_i) = (s_0, \varphi_i) + (\xi_n, \varphi_i), \quad i \geq 1, \quad n \geq 1. \tag{3}$$

Обозначим $\varepsilon_{ni} := (\xi_n, \varphi_i)$. Тогда $E\varepsilon_{ni} = 0$, $D\varepsilon_{ni} = \lambda_i$. Введем векторы в l_2: $\bar{y}_n := (y_{ni})_{i=1}^{\infty}$, $\bar{s}_0 = (s_0, \varphi_i)_{i=1}^{\infty}$, $\bar{\varepsilon}_n := (\varepsilon_{ni})_{i=1}^{\infty}$. Наблюдения (3) можно представить в виде

$$\bar{y}_n = \bar{s}_0 + \bar{\varepsilon}_n, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Здесь $\{\bar{\varepsilon}_n, n \geq 1\}$ — центрированные одинаково распределенные случайные векторы со значениями в l_2 и корреляционным оператором $S = \operatorname{diag}(\lambda_i, i \geq 1)$. При этом $\bar{s}_0 \in \Theta$,

$$\Theta := \left\{ x \in l_2 \colon \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^2}{a_i} \leq 1 \right\}.$$

Обозначим через $\{e_i, i \geq 1\}$ стандартный базис в l_2, L_m — подпространство, натянутое на $e_1, \ldots, e_m$, π_m — ортопроектор на L_m, I — единичный оператор в l_2. Пусть задана некоторая неубывающая последовательность номеров $\{m(N), N \geq 1\}$; $m(N) \to \infty$, $N \to \infty$. Введем функционал

$$\Phi_N(\theta) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m(N)} \frac{(y_{ni} - \theta_i)^2}{\lambda_i}, \quad \theta \in \pi_{m(N)}\Theta.$$

Определим проекционную оценку $\hat{\theta}_N$ как случайный вектор, удовлетворяющий с вероятностью 1 равенству

$$\Phi_N(\hat{\theta}_N) = \min_{\theta \in \pi_{m(N)}\Theta} \Phi_N(\theta).$$

Обозначим

$$\Theta^0 := \left\{ x \in l_2 \colon \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} x_i^2 / a_i < 1 \right\}, M_m := \max_{1 \leq i \leq m} \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}, \; H_m := \max_{i \geq m+1} \sqrt{a_i}.$$

Далее для краткости вместо $m(N)$ будем писать m.

Из результатов [1] получаем условия существования асимптотически нормальной проекционной оценки.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие предположения:*

1) $\bar{s}_0 \in \Theta^0$; 2) $kH_k \to 0$, $k \to \infty$; 3) $kM_kH_k = O(1)$. *Тогда существует такая последовательность $m = m(N)$, что $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \bar{s}_0) \to \gamma$ по распределению в l_2, где γ — центрированный гауссовский случайный вектор с корреляционным оператором S. Асимптотическая нормальность оценки имеет место для всех таких последовательностей, что $m = o(\sqrt{N})$; $mM_m = O(\sqrt{N})$; $\sqrt{N}H_m = O(1)$.*

Если построена оценка $\hat{\theta}_N$, то оценка $\hat{s}_N$ сигнала s_0 есть сумма $\hat{s}_N(t) = \sum_{i=1}^{m} (\hat{\theta}_N, e_i)_{l_2} \varphi_i(t)$, $t \in [0, T]$. При выполнении условий теоремы 1 $\sqrt{N}(\hat{s}_N(t) - s_0(t)) \to \gamma(t)$ по распределению в $L_2[0, T]$, где $\gamma(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\, \xi_i \varphi_i(t)$, $\{\xi_i\}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины, а ряд сходится в среднем квадратическом с вероятностью 1.

В [2] рассмотрена задача оценивания функционала от сигнала

$$F(s_0) = \int_0^T f(t, s_0^{(p_1)}(t), \ldots, s_0^{(p_m)}(t))dt,$$

где $f\colon [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; $p_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \le 0$; $s_0^{(p)}$ есть такая $|p|$-кратная первообразная функции s_0, что производные от этой первообразной порядка $0, 1, \ldots, |p|-1$ равны 0 при $t = 0$. Там же приведены условия гладкости функции f, обеспечивающие дифференцируемость по Фреше функционала F в пространстве $L_2[0, T]$. Если F является таковым, то в условиях теоремы 1 величина $F(\hat{s}_N)$ — асимптотически нормальная оценка значения $F(s_0)$. Последнее утверждение есть следствие асимптотической нормальности $\hat{s}_N$ и представления

$$\sqrt{N}(F(\hat{s}_N) - F(s_0)) = F'(s_0)(\sqrt{N}(\hat{s}_N - s_0)) + o(\sqrt{N}\| \hat{s}_N - s_0 \|), \quad N \to \infty.$$

2. Модель нелинейной регрессии в $\mathbb{R}^\infty$. Если разделить обе части (3) на $\sqrt{\lambda_n}$, то эти наблюдения сводятся к модели линейной регрессии в пространстве $\mathbb{R}^\infty$, причем вектор шума будет иметь единичный корреляционный оператор. В более общей ситуации, когда в наблюдения типа (1) входят нелинейные преобразования от сигнала, имеем нелинейную модель регрессии.

Пусть $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^\infty$; L_k — подпространство, введенное в п. 1; π_k — оператор проектирования на L_k в пространстве $\mathbb{R}^\infty$; Θ — выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^\infty$. Зафиксируем неубывающую бесконечно большую последовательность номеров $\{m(N), N \ge 1\}$. Обозначим $P_i := \pi_{m(i)} - \pi_{m(i-1)}$, $i \ge 1$, где $\pi_{m(0)} := 0$. Пусть задана последовательность функций $f_n\colon \Theta \to \mathbb{R}^\infty$, имеющих блочную структуру:

$$f_n(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{ni}(P_i\theta), \quad n \ge 1, \quad \theta \in \Theta. \tag{5}$$

Здесь $f_{ni}\colon P_i\Theta \to P_i\mathbb{R}^\infty$, ряд (5) сходится в тихоновской топологии, функции f_{ni} предполагаются непрерывными. Пусть $y_n := f_n(\theta_0) + \varepsilon_n$, $n \ge 1$, где θ_0 — неизвестный вектор из Θ, $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность центрированных одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^\infty$ с единичным корреляционным оператором. Предположим, что при фиксированном $N \ge 1$ наблюдаются случайные векторы $\pi_{m(N)}y_n$, $n = \overline{1, N}$. В качестве оценки параметра θ_0 по этим наблюдениям используется аналог МНК-оценки. Введем псевдонорму в $\mathbb{R}^\infty$: $\| x \|_k := \| \pi_k x \|_{L_k}$, где последняя норма есть евклидова норма в L_k. Рассмотрим функционал

$$Q_N(\theta) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| y_n - f_n(\theta) \|_m^2, \quad \theta \in \pi_m\Theta.$$

Здесь, как и выше, $m = m(N)$. Определим проекционную оценку $\hat{\theta}_N$ равенством

$$Q_N(\hat{\theta}_N) = \min\{Q_N(\theta)\colon \theta \in \pi_m\Theta\}. \tag{6}$$

Если существует несколько значений, доставляющих минимум, возьмем в качестве $\hat{\theta}_N$ любое из них. В силу конечномерности оценки при каждом $N \ge 1$ существует L_m-значный случайный вектор $\hat{\theta}_N$, удовлетворяющий соотношению (6) с вероятностью 1 [3]. Поэтому в дальнейшем будем считать $\hat{\theta}_N$ случайным элементом в $\mathbb{R}^\infty$.

3. Состоятельность оценки. Предположим, что функция f_{ni} определена не только на множестве $P_i\Theta$, но и в некоторой окрестности этого множества в пространстве $P_i\mathbb{R}^\infty$, принимает значения в $P_i\mathbb{R}^\infty$ и является дифференцируемой функцией в точках $P_i\Theta$. Положим

$$T_N(\theta) := N^{-1}\sum\nolimits_{n=1}^{N} f_n'^*(\pi_m\theta) f_n'(\pi_m\theta), \quad \theta \in \Theta.$$

Оператор T_N будем рассматривать как линейный оператор в L_m.

Рассмотрим следующие условия.

1. Существует такая последовательность $\{V_N\}$ обратимых линейных операторов в L_m, что $\sqrt{m}\,\| V_N \| = o(\sqrt{N})$, $N \to \infty$ и при всех $\theta \in \Theta$, $N \ge 1$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \| f_n(\theta) - f_n(\theta_0) \|_m^2 \ \ge\ \varepsilon \| V_N^{-1}\pi_m(\theta - \theta_0) \|^2; \quad \| T_N^{1/2}(\theta) V_N \| \ \le\ C,$$

где ε, C — положительные постоянные.

Предположив, что $f_{ni} \in C^2(P_i\Theta)$, рассмотрим при α, $\beta \in \Theta$ четырехлинейную форму в L_m:

$$\varphi_N(\alpha, \beta)(h_{1,2}, u_{1,2}) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (S_N^{-1/2}(f_n''(\alpha) - f_n''(\beta)))(V_N h_1, V_N h_2),$$

$$S_N^{-1/2}(f_n''(\alpha) - f_n''(\beta))(V_N u_1, V_N u_2))_m; \quad h_{1,2}, u_{1,2} \in L_m,$$

где S_N — положительный оператор в $L_{m(N)}$ с равномерно по N ограниченным следом; $(x, y)_m$ — евклидово скалярное произведение в L_m либо соответствующее квазискалярное произведение в $\mathbb{R}^\infty$. Пусть $\| \varphi_N \|$ есть норма в пространстве полилинейных форм в L_m.

2. Существует такая функция $g \in C(\Theta \times \Theta)$, что $g(\theta, \theta) = 0$, $\theta \in \Theta$ и

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sup_{\alpha,\beta\in\Theta} (\| \varphi_N(\alpha, \beta) \| - g(\alpha, \beta)) \ \le\ 0.$$

При $n \le N$ обозначим через $f_n''(\theta)(V_N, V_N)$ билинейный оператор в L_m, совпадающий с оператором

$$B_n(h_1, h_2) := f_n''(\theta)(V_N h_1, V_N h_2), \ h_1, h_2 \in L_m.$$

Для такого оператора $\| B_n \|_2$ есть норма Гильберта — Шмидта, $\| B_n \|_2^2 = \sum\nolimits_{i,j=1}^{m(N)} \| B_n(e_i, e_j) \|_m^2$.

3. При всех $\theta \in \Theta$

$$N^{-2}\sum\nolimits_{n=1}^{N} \| f_n''(\theta)(V_N, V_N) \|_2^2 \to 0, \quad N \to \infty.$$

Условие 2 выполнено, в частности, если последовательность четырехлинейных форм

$$\psi_N(\alpha, \beta)(h_{1,2}, u_{1,2}) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (S_N^{-1/2} f_n''(\alpha)(V_N h_1, V_N h_2),$$

$$S_N^{-1/2} f_n''(\beta))(V_N u_1, V_N u_2))_m,$$

$h_1, h_2, u_1, u_2 \in L_m$ равномерно сходится по $\alpha, \beta \in \Theta$. Условие 2 есть аналог условия теоремы 14 [4], являющейся обобщением теоремы о строгой состоятельности оценки [3]. Следующая лемма обобщает рассуждения [3] на полилинейные формы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 2, 3. *Тогда*

$$A_N := \max_{\theta\in\Theta}\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n''(\theta)(V_N, V_N), \pi_m\varepsilon_n)_m \right\| \xrightarrow{P} 0, \quad N\to\infty, \tag{7}$$

где под знаком максимума стоит равномерная норма в пространстве билинейных форм в L_m.

Доказательство. При фиксированном $\theta \in \Theta$ согласно условию 3 имеем

$$E\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n''(\theta)(V_N, V_N), \pi_m\varepsilon_n)_m \right\|^2 \le \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{m} E(f_n''(\theta)(V_N e_i,$$

$$V_N e_j), \pi_m\varepsilon_n)_m^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} \| f_n''(\theta)(V_N, V_N)\|_2^2 \to 0, \quad N\to\infty,$$

поэтому выражение под знаком максимума в (7) стремится к нулю по вероятности. Пусть $\alpha \in U(\theta)\cap\Theta$, где $U(\theta)$ — окрестность точки θ, которую мы выберем позже. Имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n''(\alpha)(V_N, V_N), \pi_m\varepsilon_n)_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n''(\theta)(V_N, V_N), \pi_m\varepsilon_n)_m +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} ((f_n''(\alpha) - f_n''(\theta))(V_N, V_N), \pi_m\varepsilon_n)_m. \tag{8}$$

Обозначим первое слагаемое в правой части (8) через $B_1(N, \theta)$, а второе — через $B_2(N, \alpha, \theta)$. Тогда

$$\| B_2(N, \alpha, \theta)\| \le \sqrt{\varphi_N(\alpha, \theta)}\sqrt{N^{-1}\textstyle\sum_{n=1}^{N}\left\|S_N^{1/2}\pi_m\varepsilon_n\right\|^2}. \tag{9}$$

Обозначим второй множитель в правой части (9) через β_N. Согласно условию 2 $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0(\theta)\ \exists\ U(\theta)\ \forall\ N \ge N_0(\theta)\ \forall\ \alpha \in U(\theta)\cap\Theta$: $\sqrt{\varphi_N(\alpha, \theta)} < \varepsilon$. Тогда при

$$N \ge N_0(\theta), \alpha \in U(\theta): \ \| B_2(N, \alpha, \theta)\| \le \varepsilon\beta_N.$$

Выделим конечное подпокрытие $\{U(\theta_i), i = \overline{1, p}\}$ компакта Θ. При $N \ge N_0 :=$ $:= \max\{N_0(\theta_i), 1 \le i \le p\}$ имеем

$$A_N \le \textstyle\sum_{i=1}^{p} \| B_1(N, \theta_i)\| + \varepsilon\beta_N.$$

Отсюда при каждом $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, P\{A_N > \delta\} \le \sup_{N\ge 1} P\{\beta_N > \delta/\varepsilon\}. \tag{10}$$

Однако $E\beta_N^2 = \operatorname{tr} S_N = O(1)$, и $\{\beta_N\}$ ограничены по вероятности. Устремляя в (10) $\varepsilon \to 0$, получаем искомое соотношение (7).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1 – 3. *Тогда*

$$\| V_N \| \, \| V_N^{-1}(\hat{\theta}_N - \pi_m\theta_0) \| \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$\Delta f_n := f_n(\hat{\theta}_N) - f_n(\pi_m\theta_0), \ n \le N; \ \Delta\hat{\theta}_N := \hat{\theta}_N - \pi_m\theta_0.$$

Из определения оценки следует неравенство

$$(2N)^{-1}\sum_{n=1}^{N} \| \Delta f_n \|_m^2 \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} (\Delta f_n, \pi_m\varepsilon_n)_m. \tag{11}$$

Правая часть (11) представляется в виде суммы $A_{N1} + A_{N2}$, где

$$A_{N1} := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n'(\theta_0)\Delta\hat{\theta}_N, \pi_m\varepsilon_n)_m = N^{-1/2}(T_N^{1/2}(\theta_0)\Delta\hat{\theta}_N, T_N^{-1/2}(\theta_0) \times$$

$$\times N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N} f_n'^{*}(\theta_0)\pi_m\varepsilon_n)_m; \quad A_{N2} := \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N} (\bar{f}_n''(\Delta\hat{\theta}_N)^2, \pi_m\varepsilon_n)_m.$$

Здесь $\bar{f}_n''$ — производная в некоторой промежуточной точке из отрезка $[\pi_m\theta_0, \pi_m\hat{\theta}_N]$. Тогда

$$EA_{N1}^2 \le N^{-1}\| T_N^{1/2}(\theta_0)\Delta\hat{\theta}_N \|^2 m; \quad A_{N1} = \| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \| O_p\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right).$$

Далее, согласно лемме 1

$$| A_{N2} | \le \frac{1}{2}\| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \|^2 \max_{\theta\in\Theta}\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f_n''(\theta)(V_N, V_N), \pi_m\varepsilon_n)_m \right\| =$$

$$= \| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \|^2 o_p(1).$$

Из (11) следует

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N} \| \Delta f_n \|_m^2 = \| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \| \left(O_p\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) + \| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \| o_p(1) \right).$$

Отсюда согласно условию 1

$$\| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \| \left((\varepsilon - o_p(1)) \| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \| - O_p\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \right) \le 0,$$

$$P\{\| V_N^{-1}\Delta\hat{\theta}_N \| > \| V_N \|^{-1}\delta\} \le P\{(\varepsilon - o_p(1))\delta -$$

$$- \sqrt{\frac{m}{n}} O_p(1) \| V_N \| \le 0\} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2; $U(\theta_0)$ — *произвольная окрестность точки* θ_0 *в тихоновской топологии. Тогда* $P\{\hat{\theta}_N \notin U(\theta_0)\} \to \to 0, \ N \to \infty.$

***Следствие* 2.** *Пусть* $\Theta \subset l_2$ *и выполнены условия теоремы* 2. *Тогда* $\| \hat{\theta}_N - \theta_0 \|_{l_2} \xrightarrow{P} 0, \ N \to \infty.$

4. Асимптотическая нормальность оценки. Потребуем теперь, чтобы параметр θ_0 принадлежал пространству последовательностей l_2 Асимптотическую нормальность будем понимать в смысле сходимости распределений в этом пространстве. Далее норма и скалярное произведение без индексов рассматриваются в пространстве l_2.

Пусть $\{a_i\}$ — фиксированная бесконечно малая последовательность положительных чисел, $A := \operatorname{diag}(a_i, i \geq 1) \in L(l_2)$. Рассмотрим следующие условия при фиксированном $\gamma \in (0, 1/2]$:

4. $\Theta = \{x \in R(\sqrt{A}) \colon \| A^{-1/2}x \| \leq 1\}$.
5. $\theta_0 \in \Theta^0 := \{x \in R(\sqrt{A}) \colon \| A^{-1/2}x \| < 1\}$.
6. $\exists\, C > 0 \;\; \forall N \geq 1;\; \alpha, \beta \in \Theta;\; \tau \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \gamma, 1\} \colon \| T_N^{\tau}(\alpha) T_N^{-\tau}(\beta) \| \leq C$.
7. $\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \alpha, \beta \in \Theta;\; N \geq 1 \colon \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \| f_n(\alpha) - f_n(\beta) \|_m^2 \geq \varepsilon \| T_N^{1/2}(\alpha) \pi_m(\alpha - \beta) \|^2$.

Предполагая, что $f_{ni} \in C^2(P_i\Theta)$, рассмотрим при $\alpha, \beta \in \Theta$ четырехлинейную форму в L_m, аналогичную φ_N:

$$\tilde{\varphi}_N(\alpha, \beta)(h_{1,2}, U_{1,2}) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (S_N^{-1/2}(f_n''(\alpha)(T_N^{\gamma-1/2}h_1, T_N^{\gamma-1/2}h_2) -$$
$$- f_n''(\beta)(T_N^{\gamma-1/2}h_1, T_N^{\gamma-1/2}h_2)),\;\; S_N^{-1/2}(f_n''(\alpha)(T_N^{\gamma-1/2}u_1, T_N^{\gamma-1/2}u_2) -$$
$$- f_n''(\beta)(T_N^{\gamma-1/2}u_1, T_N^{\gamma-1/2}u_2)))_m;$$

$h_{1,2}, u_{1,2} \in L_m$, где S_m — положительный оператор в $L_{m(N)}$, $\operatorname{tr} S_N = O(1)$; оператор T_N вычисляется в той же точке, что и соответствующая производная f_n''.

8. Выполнено условие 2 с формой $\tilde{\varphi}_N$ вместо φ_N.
9. Выполнено условие 3 с оператором $T_N^{\gamma-1/2}(\theta)$ вместо V_N.

Рассмотрим при $\alpha, \beta \in \Theta$ билинейную форму в L_m:

$$\tau_N(\alpha, \beta)(h_{1,2}) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (f_n''(\alpha)(T_N^{\gamma-1/2}(\alpha)h_1, T_N^{\gamma-1/2}(\alpha)h_2),\;\; f_n(\beta) -$$
$$- f_n(\alpha))_m;\quad h_{1,2} \in L_m.$$

10. Существует такая функция $h \in C(\Theta \times \Theta)$, что $h(\theta, \theta) = 0$, $\theta \in \Theta$ и

$$\varlimsup_{N \to \infty} \sup \{\| \tau_N(\alpha, \beta) \| - h(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Theta\} \leq 0.$$

11. $\forall\, k \geq 1 \colon \{T_N^{-1}(\theta)P_k, N \geq 1\}$ равномерно сходится по $\theta \in \Theta$ в пространстве линейных операторов в $P_k\mathbb{R}^\infty$.

12. $\sup\limits_{N\geq 1} \operatorname{tr} T_N^{-2\gamma}(\theta_0) < \infty;\;\; \sup\limits_{N \geq 1} \operatorname{tr} T_N^{-1}(\theta_0)(I - \pi_{m(k)}) \to 0,\;\; k \to \infty$.

13. $\forall\, k \geq 1 \;\; \forall\, c \geq 0 \colon N^{-1} \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{\{\| f_n'^{*}(\theta_0)\pi_{m(k)}\varepsilon_1 \| > C\sqrt{N}\}} \left\| f_n'^{*}(\theta_0) \pi_{m(k)} \varepsilon_1 \right\|^2 dP \;\to\; 0,\quad N \to \infty$.

14. $m = o(\sqrt{N});\;\; m \| T_N^{-\gamma-1/2}(\theta_0) A^{-1/2} \pi_m \| = O(\sqrt{N});$

$$m \| T_N^{-1/2}(\theta_0) A^{-1} \pi_m \| = O(N). \qquad (12)$$

Обозначим через $V(\theta)$ предельный оператор последовательности $\{T_N^{-1}(\theta), N \geq 1\}$ в $\mathbb{R}^\infty$. При выполнении условий 11, 12 $V(\theta_0)$ есть ядерный оператор в l_2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 4 – 14. *Тогда*

$$\| \hat{\theta}_N - \theta_0 \| \xrightarrow{P} 0, \tag{13}$$

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \pi_{m(N)}\theta_0) \to \gamma \tag{14}$$

по распределению в l_2, *где* γ *— случайный элемент в* l_2 *с распределением* $N(0, V(\theta_0))$.

Доказательство проведем в несколько этапов.

а). Справедливость (13) доказывается аналогично теореме 2. При этом для оценки слагаемого A_{N2} вместо оператора V_N используются операторы $T_N^{\gamma-1/2}$, вычисленные в соответствующих точках.

б). Представление оценки через множитель Лагранжа. Если $\hat{\theta}_N(\omega)$ является внутренней точкой проекции $\pi_m\Theta$ в пространстве L_m, то $Q_N'(\hat{\theta}_N) = 0$. В противном случае $\hat{\theta}_N(\omega)$ есть стационарная точка функции Лагранжа

$$\Phi(\theta, \lambda) := Q_N(\theta) + \lambda \| A^{-1/2}\theta \|^2, \quad \theta \in U(\pi_m\Theta), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\lambda_N = \lambda_N(\omega)$ — значение множителя Лагранжа, соответствующее проекционной оценке. Если $\hat{\theta}_N$ — внутренняя точка $\pi_m\Theta$, то можно считать, что $\lambda_N = 0$. Имеем

$$Q_N'(\hat{\theta}_N) + 2\lambda_N A^{-1}\hat{\theta}_N = 0. \tag{15}$$

Обозначим $S_N^* := \sum_{n=1}^{N} f_n'^*(\theta_0)\pi_m\varepsilon_n$, $N \geq 1$. Отметим, что

$$Q_N'(\pi_m\theta_0) = -2S_N^* / N.$$

Раскладывая $Q_N'(\hat{\theta}_N)$ по формуле Тейлора в окрестности $\pi_m\theta_0$, получаем представление оценки

$$(\overline{Q}_N'' / 2 + \lambda_N A^{-1})\hat{\theta}_N = S_N^* / N + \overline{Q}_N''\pi_m\theta_0 / 2. \tag{16}$$

Здесь $\overline{Q}_N''$ — вторая производная в промежуточной точке $\overline{\theta}_N \in [\pi_m\theta_0, \hat{\theta}_N]$. Вектор $\overline{\theta}_N$ выбираем так, чтобы он был случайным вектором со значениями в L_m.

в). С вероятностью 1 $\lambda_N \geq 0$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\hat{\theta}_N$ лежит на границе $\pi_m\Theta$, т. е. $(A^{-1}\hat{\theta}_N, \hat{\theta}_N) = 1$. Из (15) следует $\lambda_N = -(Q_N'(\hat{\theta}_N), \hat{\theta}_N) / 2$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) := Q_N(\hat{\theta}_N - t\hat{\theta}_N)$, $t \in [0, 1]$. Она достигает минимума при $t = 0$. Тогда $\varphi'(0) = (Q_N'(\hat{\theta}_N), -\hat{\theta}_N) \geq 0$, откуда $\lambda_N \geq 0$.

г). Представление $V_N := \overline{Q}_N'' / 2$. Обозначим

$$\Delta\bar{f}_n := f_n(\overline{\theta}_N) - f_n(\theta_0); \ \overline{T}_N := T_N(\overline{\theta}_N).$$

Для последовательностей $\{x_n, y_n;\ n \geq 1\} \subset l_2$ обозначим $[x, y]_N := \sum_{n=1}^{m(N)} (x_n, y_n)$. Справедливо равенство

$$V_N = \overline{T}_N + [\bar{f}'', \Delta\bar{f}]_N - [\bar{f}'', \pi_m\varepsilon]_N = \overline{T}_N^{1/2}(I_m + \overline{T}_N^{-\gamma}Z_N\overline{T}_N^{-\gamma})\overline{T}_N^{1/2}. \tag{17}$$

Здесь I_m — единичный оператор в L_m,

$$Z_N = [\bar{f}''(\bar{T}_N^{\gamma-1/2}, \bar{T}_N^{\gamma-1/2}), \Delta\bar{f}]_N - [\bar{f}''(\bar{T}_N^{\gamma-1/2}, \bar{T}_N^{\gamma-1/2}), \pi_m\varepsilon]_N.$$

В силу (13) $\| \bar{\theta}_N - \pi_m\theta_0 \| \xrightarrow{P} 0$. Тогда по условиям 8 – 10 и аналогу леммы 1 $\| Z_N \| \xrightarrow{P} 0$. Операторы $\{T_N^{-\gamma}(\alpha)\colon N \geq 1, \alpha \in \Theta\}$ ограничены в совокупности по норме, и поэтому при достаточно больших N со сколь угодно большой вероятностью V_N есть строго положительный оператор в пространстве L_m.

д). Асимптотика λ_N. Пусть $\lambda_N > 0, V_N > 0$. Обозначим $W_N := V_N^{-1/2}A^{-1}V_N^{-1/2}$. Из (16) следует

$$\hat{\theta}_N = V_N^{-1/2}(I_m + \lambda_N W_N)^{-1}V_N^{-1/2}S_N^* / N + V_N^{-1/2}(I_m + \lambda_N W_N)^{-1}V_N^{1/2}\pi_m\theta_0.$$

Далее,

$$1 = \| A^{-1/2}\hat{\theta}_N \| \leq \| (I_m + \lambda_N W_N)^{-1}W_N^{1/2}V_N^{-1/2}S_N^* / N \| +$$

$$+ \| (I_m + \lambda_N W_N)^{-1}W_N^{1/2}V_N^{1/2}\pi_m\theta_0 \| \leq (2\sqrt{\lambda_N})^{-1}\| V_N^{-1/2}S_N^* / N \| + \| A^{-1/2}\theta_0 \|.$$

По условию 5 $d := 1 - \| A^{-1/2}\theta_0 \| > 0$, откуда

$$\lambda_N \leq \frac{1}{4d^2}\left\| V_N^{-1/2}\frac{S_N^*}{N} \right\|^2 \leq \frac{1}{4d^2 N}\| V_N^{-1/2}T_N^{1/2}(\theta_0) \|^2 \left\| T_N^{-1/2}(\theta_0)\frac{S_N^*}{\sqrt{N}} \right\|^2.$$

Из (17) и условия 6 следует, что последовательность $\{\| V_N^{-1/2}T_N^{1/2}(\theta_0) \|\}$ ограничена по вероятности. Кроме того, $E\left\| T_N^{-1/2}(\theta_0)\frac{S_N^*}{\sqrt{N}} \right\|^2 = \operatorname{tr} I_m = m$. Следовательно, $\lambda_N = mN^{-1}O_p(1)$. Это равенство справедливо без дополнительных условий $\lambda_N > 0$, $V_N > 0$.

е). Представление $\delta_N := \sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \pi_m\theta_0)$ и сходимость конечномерных распределений. Обозначим

$$E_N := \bar{T}_N^{-\gamma}Z_N\bar{T}_N^{-\gamma}; \quad G_N := \bar{T}_N^{-1/2}A^{-1}\bar{T}_N^{-1/2}.$$

Пусть $V_N > 0$. Из (16) следует равенство $\delta_N = D_N - C_N$, где $D_N = \bar{T}_N^{-1/2}(I_m + E_N + \lambda_N G_N)^{-1}\bar{T}_N^{-1/2} S_N^* / \sqrt{N}$; $C_N = \sqrt{N}\lambda_N\bar{T}_N^{-1/2}(I_m + E_N + \lambda_N G_N)^{-1}\bar{T}_N^{-1/2}A^{-1}\pi_m\theta_0$. По условиям 11, 13 $\forall\, k \geq 1$: $\pi_{m(k)}T_N^{-1}(\theta_0)S_N^* / \sqrt{N} \to \pi_{m(k)}\gamma$ по распределению в $L_{m(k)}$. Далее, $\| E_N \| \xrightarrow{P} 0$; по условию 14 $\lambda_N \xrightarrow{P} 0$; операторы $\{\pi_{m(k)}G_N\colon N \geq 1\}$ ограничены по норме неслучайной постоянной. Тогда по условию 11 $\pi_{m(k)}D_N \to \pi_{m(k)}\gamma$ по распределению в $L_{m(k)}$. Кроме того, при $m = O(\sqrt{N})$ $\sqrt{N}\lambda_N = o_p(1)$, откуда $\| \pi_{m(k)}C_N \| \xrightarrow{P} 0$. Сходимость конечномерных распределений δ_N к конечномерным распределениям γ установлена.

ж). Предкомпактность $\{D_N\}$ по распределению в l_2. По условию 12 последовательность $\{T_N^{-1}(\theta_0)S_N^* / \sqrt{N}, N \geq 1\}$ предкомпактна; вместе с ней по условию 6 предкомпактна также последовательность $D_N^* := \bar{T}_N^{-1}S_N^* / \sqrt{N}$. Рассмотрим разность

$$D_N^* - D_N = \lambda_N\bar{T}_N^{-1/2}(I_m + E_N + \lambda_N G_N)^{-1}\bar{T}_N^{-1/2}A^{-1}\bar{T}_N^{-1}S_N^* / \sqrt{N} +$$

$$+ \bar{T}_N^{-1/2}(I_m + E_N + \lambda_N G_N)^{-1}E_N\bar{T}_N^{-1/2} S_N^* / \sqrt{N}.$$

При каждом $l=m(k),\ k\geq 1$ справедливо неравенство

$$\|(I-\pi_l)(D_N^*-D_N)\| \le \frac{m}{N}O_p(1)\|T_N^{-1/2}(\theta_0)A^{-1}\pi_m\|\|(I-\pi_l)\overline{T}_N^{-1/2}S_N^*/\sqrt{N}\|+$$

$$+\|\overline{T}_N^{-1/2}\|\|\overline{T}_N^{-\gamma}\|\|\overline{T}_N^{\gamma}E_N\overline{T}_N^{\gamma}\|\|\overline{T}_N^{-\gamma-1/2}T_N^{\gamma+1/2}(\theta_0)\|\|T_N^{-\gamma-1/2}(\theta_0)S_N^*/\sqrt{N}\|.$$

Далее,

$$\|\overline{T}_N^{\gamma}E_N\overline{T}_N^{\gamma}\|\xrightarrow{P}0;\quad E\|T_N^{-\gamma-1/2}(\theta_0)S_N^*/\sqrt{N}\|^2=\operatorname{tr}T_N^{-2\gamma}(\theta_0)=O(1),$$

и по условию 4

$$\forall\,\alpha>0:\ \overline{\lim_{N\to\infty}}P\{\|(I-\pi_{m(k)})(D_N^*-D_N)\|>\alpha\}\to 0,\quad k\to\infty, \tag{18}$$

что в сочетании с п. е.) обеспечивает предкомпактность $\{D_N\}$ [5].

з). Предкомпактность $\{C_N\}$. Обозначим $z:=A^{-1/2}\theta_0;\ C_N^*:=\sqrt{N}\lambda_N\overline{T}_N^{-1}\times$ $\times A^{-1/2}\pi_m z$. В силу п. д.) и условий 6, 14 $\|C_N^*\|\xrightarrow{P}0$. Рассмотрим разность

$$C_N^*-C_N=\sqrt{N}\lambda_N\overline{T}_N^{-1/2}(I_m+E_N+\lambda_N G_N)^{-1}(E_N+\lambda_N G_N)\overline{T}_N^{-1/2}A^{-1/2}\pi_m z.$$

При $l=m(k),\ k\geq 1$ имеем

$$\|(I-\pi_l)(C_N^*-C_N)\| \le \frac{m}{\sqrt{N}}O_p(1)\|\overline{T}_N^{\gamma}E_N\overline{T}_N^{\gamma}\|\|T_N^{-\gamma-1/2}(\theta_0)A^{-1/2}\pi_m\|\times$$

$$\times\|z\|+O_p(1)\frac{m}{N}\|\overline{T}_N^{-1/2}A^{-1}\pi_m\|\frac{m}{\sqrt{N}}\|\overline{T}_N^{-1}A^{-1/2}\pi_m\|\|(I-\pi_l)z\|.$$

По условиям 6, 14 соотношение (18) выполнено также для последовательности $\{C_N^*-C_N\}$, и $\{C_N\}$ предкомпактно по распределению в l_2.

и). Из пп. е) – з) следует предкомпактность $\{\delta_N\}$ и сходимость $\delta_N\to\gamma$ по распределению в l_2. Теорема доказана.

Прокомментируем условия теоремы 3. Условие 4 задает в качестве параметрического множества эллипсоид в l_2. Требование 5 есть типичное в подобных задачах условие плотности в l_2 множества направлений допустимых сдвигов для θ_0 [5]. Условие 7 обеспечивает отделенность значений функций регрессии для различных значений параметра, что необходимо для состоятельности. Условия 8 – 10 ограничивают сверху колебания функций регрессии и также обеспечивают состоятельность. Требования 11, 13 нацелены на сходимость конечномерных распределений нормированных оценок, а условия 12 — на предкомпактность их распределений в l_2. Условие 14 требует, чтобы размерность пространства медленнее возрастала, чем это допускалось в теореме 2. Наконец, требование 6 является стабилизирующим условием для производных от функций регрессии и имеет технический характер.

1. *Кукуш О. Г.* Збіжність за розподілом нормованої проекційної оцінки нескінченновимірного параметра лінійної регресії // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1993. – Вип. 48. – С. 1 – 10.
2. *Немировский А. С., Хасьминский Р. З.* Непараметрическое оценивание функционалов от производных сигнала, наблюдаемого в белом шуме // Пробл. передачи информации. – 1987. – **23**, № 3. – С. 27 – 38.
3. *Jennrich R. I.* Asymptotic properties of nonlinear square estimators // Ann. Math. Statist. – 1969. – **40**, № 2. – P. 633 – 643.
4. *Иванов А. В.* Теория оценивания параметров нелинейных моделей регрессии: Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1991. – 24 с.
5. *Кукуш А. Г.* Сходимость по распределению нормированной оценки бесконечномерного параметра регрессии // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 5. – С. 11 – 14.

Получено 16. 05. 92