УДК 517. 948

В. Н. Павленко, канд. физ.-мат. наук (Челябин. ун-т)

О РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С РАЗРЫВНЫМИ ПОЛУМОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Методом монотонных операторов получена теорема существования решения со специальным свойством для эллиптического вариационного неравенства с разрывным полумонотонным оператором, которая затем применяется для доказательства существования полуправильного решения вариационного неравенства с дифференциальным полулинейным оператором эллиптического типа высокого порядка с несимметричной линейной частью и разрывной нелинейностью.

Методом монотонних операторів одержана теорема існування розв'язку, що має спеціальну властивість для еліптичної варіаційної нерівності з розривним напівмонотонним оператором, яка потім застосовується для доведення існування напівправильного розв'язку, варіаційної нерівності з диференціальним напівлінійним оператором еліптичного типу високого порядку з несиметричною лінійною частиною і розривною нелінійністю.

Пусть K — выпуклое замкнутое непустое множество в вещественном рефлексивном банаховом пространстве E, оператор T определен на E и действует в сопряженное пространство E^* (возможно, разрывный). Рассматривается задача об отыскании $u \in K$ такого, что

$$\langle Tu, v-u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K, \tag{1}$$

где $\langle y, x\rangle$ — значение линейного функционала $y \in E^*$ на элементе $x \in E$. В такой постановке задача об эллиптических вариационных неравенствах изучалась автором [1, 2] в предположении о квазипотенциальности оператора T. В данной работе это допущение относительно T не делается, что позволяет в приложении к вариационным неравенствам с дифференциальными операторами и разрывными нелинейностями доказать существование полуправильных решений, не требуя, в отличие от [2], симметричности линейной части дифференциального оператора. Отметим, что в [1] полуправильные решения не рассматривались.

1. Общие результаты.

Определение 1. *Оператор T назовем радиально непрерывным относительно K в точке $u \in K$, если для любого $v \in K$*

$$\lim_{t\to+0}\langle T(u+t(v-u)), v-u\rangle = \langle Tu, v-u\rangle.$$

В противном случае точку $u \in K$ будем называть точкой разрыва оператора T относительно K.

Определение 2. *Точку разрыва $u \in K$ оператора T относительно K будем называть регулярной, если найдется $v \in K$ такой, что*

$$\overline{\lim}_{t\to+0}\langle T(u+t(v-u)), v-u\rangle < 0.$$

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *оператор T полумонотонный* [3] *на E и ограниченный;*

2) *множество K содержит нуль пространства E и существует $R > 0$ такое, что $\langle Tu, u\rangle \geq 0$, если $\|u\| > R$ и $u \in K$;*

3) *точки разрыва оператора T относительно K регулярны.*

Тогда задача (1) *имеет решение и любое решение задачи* (1) *является точкой радиальной непрерывности оператора T относительно K.*

Замечания. **1.** Если оператор T строго монотонный [3] на K, то задача (1) имеет не более одного решения. Действительно, если u_1 и u_2 — решения задачи (1), то $\langle Tu_1, u_2-u_1\rangle \geq 0$ и $\langle Tu_2, u_1-u_2\rangle \geq 0$, следовательно, $\langle Tu_2 - Tu_1, u_2 - u_1\rangle \leq 0$. Отсюда с учетом строгой монотонности T следует $u_2 = u_1$.

2. Если оператор T полумонотонный и u — решение задачи (1), то для произвольного $v \in K$

$$\lim_{t \to +0} \langle T(u + t(v - u)), v - u \rangle \geq 0. \quad (2)$$

Действительно, так как оператор T полумонотонный, то $T = F + C$, где F — монотонный, а C — усиленно непрерывный оператор [3] на E, и, значит, для любых $v \in K$ и $0 < t < 1$

$$0 \leq \langle F(u + t(v - u)) - F(u), v - u \rangle = \langle F(u + t(v - u)) + Cu, v - u \rangle -$$
$$- \langle Tu, v - u \rangle \leq \langle F(u + t(v - u)) + Cu, v - u \rangle,$$

откуда с учётом непрерывности C следует (2).

***Доказательство теоремы* 1.** Из замечания 2 следует, что если оператор T полумонотонный и его точки разрыва из K регулярны, то любое решение задачи (1) является точкой радиальной непрерывности оператора T относительно K. Поэтому, чтобы доказать теорему 1, достаточно установить существование решения неравенства (1). В силу условия 1 теоремы 1 оператор $T = F + C$, где F — монотонный, а C — усиленно непрерывный на E оператор. Пусть $\Phi : E \to 2^{E^*}$ — максимально монотонное отображение, график которого содержит график оператора F. Так как Φ определено на E, то отображение Φ псевдомонотонное [4] (предложение 8). Обозначим через J нормальное дуальное отображение из E в 2^{E^*}. Для любого $v \in K$ его значение определяется равенством

$$Jv = \{ z \in E^* \mid \langle z, v \rangle = \| z \| \| v \|, \ \| z \| = \| v \| \}.$$

Известно [5], что J — максимальный монотонный оператор на E. Поскольку сумма псевдомонотонных отображений из E в 2^{E^*} есть псевдомонотонный оператор [4] (предложение 9), то для любого натурального n отображение $\Phi + C + (J/n)$ псевдомонотонное. В силу предложения 1 из [6] из ограниченности F следует ограниченность Φ и для любых $v \in K$ и $w \in \Phi(v)$

$$\langle w, v \rangle \geq \lim_{t \to +0} \langle F(v_t), v_t \rangle, \quad (3)$$

где $v_t = (1 - t)v$. Если $v \in K$ и $\| v \| > R$, то для $0 < t < (\| v \| - R) / \| v \|$ элемент $v_t \in K$ (так как K выпукло и содержит нуль) и $\| v_t \| > R$. Значит, в силу условия 2 теоремы 1 $\langle F(v_t) + Cv_t, v_t \rangle \geq 0$. Отсюда и (3) для $v \in K$ с $\| v \| > R$, $w \in \Phi(v)$ и $z \in Jv$ получим

$$\langle w + Cv + z / n, v \rangle \geq \| v \|^2 / n. \quad (4)$$

Следовательно, отображение $\Phi + C + J/n$ коэрцитивное на K. Множество K и отображение $\Phi + C + J/n$ удовлетворяют всем условиям теоремы 15 из [4]. Поэтому для любого натурального n существуют $u_n \in K$, $w_n \in \Phi(u_n)$, $z_n \in Ju_n$ такие, что для произвольного $v \in K$

$$\langle w_n + Cu_n + z_n / n, v - u_n \rangle \geq 0. \quad (5)$$

Отсюда при $v = 0$ имеем

$$\langle w_n + Cu_n + z_n / n, u_n \rangle \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

и, значит, в силу (4) $\| u_n \| \leq R$. Так как Φ — ограниченное отображение и $w_n \in \Phi(u_n)$, то последовательность (w_n) ограничена. Из рефлексивности E следует существование подпоследовательности (u_{n_k}) последовательности (u_n) такой, что $u_{n_k} \rightharpoonup u$, $w_{n_k} \rightharpoonup w$. Заметим, что $u \in K$, поскольку множество K слабо замкнуто. Полагая в неравенстве (5) $v = u$, получаем

$$\overline{\lim}_{k \to \infty} \langle w_{n_k} + Cu_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle \leq 0,$$

поскольку $z_{n_k}/n_k \to 0$. Отображение $\Phi + C$ является обобщенно псевдомонотонным [4] (предложение 3), поэтому из последнего неравенства следует

$$\lim_{k\to\infty}\langle w_{n_k} + Cu_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \langle w + Cu, u\rangle$$

и $w \in \Phi(u)$ [4] (определение 2). Отсюда с учетом (5) вытекает $\langle w + Cu, v - u\rangle \geq 0$ для всех $v \in K$, и, значит, для произвольного $v \in K$

$$\langle F(v) + Cu, v - u\rangle = \langle F(v) - w, v - u\rangle + \langle w + Cu, v - u\rangle \geq 0.$$

Если $v \in K$ и $0 < t < 1$, то $v_t = u + t(v - u) \in K$ и $\langle F(v_t) + Cu, v - u\rangle \geq 0$. Поэтому

$$\lim_{t\to+0}\langle F(v_t) + Cv_t, v - u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \tag{6}$$

и, следовательно, u — точка радиальной непрерывности оператора T относительно K (в силу условия 3 теоремы 1). Отсюда с учетом (6) следует $\langle Tu, v - u\rangle \geq 0$ для любого $v \in K$. Таким образом, u — решение задачи (1). Теорема 1 доказана.

2. Приложения. Рассмотрим задачу отыскания $u \in K = \{v \in \overset{0}{W}{}_2^m(\omega) \mid v(x) \geq 0$ почти всюду на $\omega\}$ такого, что для любого $v \in K$

$$\sum_{1\leq|\alpha|,|\beta|\leq m}\int_\omega a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u(x)D^\beta(v-u)(x)\,dx + \int_\omega f(x,u(x))(v-u)(x)\,dx \geq 0, \tag{7}$$

где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей S, функции $a_{\alpha\beta}$ вещественные, имеют непрерывные частные производные любого порядка в замкнутой области $\overline{\omega}$ и удовлетворяют для произвольных $x \in \overline{\omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ условию $\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \geq \chi|\xi|^{2m}$ с постоянной $\chi > 0$, функция $f: \omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, $2m > n$, и для любого $d > 0$ существует $a_d \in L_q(\omega)$, $q > 1$, такая, что $|f(x, u)| \leq a_d(x)$ для любого $u \in [0, d]$ и почти всех $x \in \omega$.

Отметим, что при сделанных предположениях левая часть неравенства (7) определена для произвольных $u, v \in K$.

Определение 3 [2]. *Решение u задачи (7) называется полуправильным, если для почти всех $x \in \omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности функции $f(x, \cdot)$.*

Определение 4 [2]. *Предположим, что вещественнозначная функция $\varphi(x, u)$, заданная на $\omega \times [0, +\infty)$, для любого $u \in [0, +\infty)$ измерима по x на ω и для почти всех $x \in \omega$ функция $\varphi(x, \cdot)$ имеет разрывы только первого рода и непрерывна справа на $[0, +\infty)$ (отсюда следует, что φ суперпозиционно измерима [7]). Будем говорить, что φ удовлетворяет A-условию по отношению к дифференциальному оператору*

$$\tau = \sum_{1\leq|\alpha|,|\beta|\leq m}(-1)^{|\beta|}D^\beta a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha,$$

если существует семейство гиперповерхностей

$$S_i = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \omega, u = \varphi_i(x)\},\ \varphi_i \in C_{2m}(\overline{\omega}),\ i \in \Lambda$$

(множество Λ конечное или счетное) таких, что для почти всех $x \in \omega$ и любого $u \in \{v \in [0, +\infty) \mid \varphi(x, v-) < \varphi(x, v)\}$ найдется $i \in \Lambda$ такое, что $(x, u) \in S_i$ и

$$(\tau\varphi_i(x) + \varphi(x, \varphi_i(x)))(\tau\varphi_i(x) + \varphi(x, \varphi_i(x)-)) > 0.$$

Замечание 3. Если $\varphi(x, u) \equiv g(u)$, $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет разрывы только первого рода и непрерывна справа на $[0, +\infty)$, причем из неравенства $g(u-) < g(u)$ следует $g(u)\,g(u-) > 0$, то функция φ удовлетворяет A-условию по отношению к τ. Действительно, в этом случае множество точек разрыва функции g не более чем счетно и в качестве семейства поверхностей $\{S_i\}$, фигурирующего в определении 4, можно взять плоскости $u = u_i$, где u_i — точка разрыва g такая, что $g(u_i) > g(u_i -)$.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) *функция* $f = f_1 + f_2$, $f_i : \omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *и для любого* $u \in [0, +\infty)$ *функция* $f_i(\cdot, u)$, $i = 1, 2$, *измерима на* ω, *для почти всех* $x \in \omega$ *функция* $f_1(x, \cdot)$ *неубывающая и непрерывная справа, а* $f_2(x, \cdot)$ *непрерывная на* $[0, +\infty)$, *и для функции* f *выполнено* A*-условие по отношению к* τ;

2) *для любого* $d > 0$ *существует* $a_d \in L_q(\omega)\,(q > 1)$ *такая, что* $|f_i(x, u)| \le a_d(x)$ *для произвольного* $u \in [0, d]$ *и почти всех* $x \in \omega$, $i = 1, 2$;

3) $\sum\limits_{1 \le |\alpha|, |\beta| \le m} \int_\omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta u\, dx \ge M \sum\limits_{|\alpha| = m} \left\| D^\alpha u \right\|^2_{L_2(\omega)}$ *для любого* $u \in \overset{0}{W}{}^m_2(\omega)$, $M > 0$, $\|\cdot\|_{L_2(\omega)}$ *— норма в* $L_2(\omega)$;

4) $f(x, u)\,u \ge -ku^2 - k_1(x) u^{2-\gamma} - k_2(x)$ *для произвольного* $u \in [0, +\infty)$ *и почти всех* $x \in \omega$, *где* $k > 0$, $0 < \gamma < 2$, $k_1 \in L_{2/\gamma}(\omega)$, $k_2 \in L(\omega)$, *причем* $M - kC > 0$, C *— постоянная в неравенстве*

$$\|u\|^2_{L_2(\omega)} \le C \sum_{|\alpha| = m} \left\| D^\alpha u \right\|^2_{L_2(\omega)} \quad \forall u \in \overset{0}{W}{}^m_2(\omega).$$

Тогда задача (7) *имеет решение и любое ее решение полуправильное.*

Замечание 4. В отличие от теоремы 3 из [2] в теореме 2 отсутствует требование самосопряженности оператора τ.

Доказательство теоремы 2. Определим продолжение $\tilde{f}_i$ функции f_i на $\omega \times \mathbb{R}$, положив $\tilde{f}_i(x, u) = f_i(x, 0) + u$ для любого $x \in \omega$ и $u < 0$, и зададим операторы $T_i : E \to E^*$, где $E = \overset{0}{W}{}^m_2(\omega)$ с нормой $\|u\| = \left(\sum_{|\alpha| = m} \left\| D^\alpha u \right\|^2_{L_2(\omega)} \right)^{1/2}$, соотношением: для любых $u, v \in K$

$$\langle T_i u, v \rangle = \int_\omega \tilde{f}_i(x, u(x)) \cdot v(x) dx, \ i = 1, 2.$$

В силу условий 1, 2 теоремы 2 и компактности вложения $\overset{0}{W}{}^m_2(\omega)$ в $C(\overline{\omega})$ при $n < 2m$ операторы T_1 и T_2 определены на E, причем оператор T_1 монотонный и ограниченный, а оператор T_2 усиленно непрерывный. Оператор $T_3 : E \to E^*$, определяемый равенством

$$\langle T_3 u, v \rangle = \sum_{1 \le |\alpha|, |\beta| \le m} \int_\omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta v\, dx$$

для любых $u, v \in K$, линейный и ограниченный. Из условия 3 теоремы 2 следует, что $\langle T_3 u, u \rangle \ge M \|u\|^2$ для произвольного $u \in E$. Отсюда с учетом условия 4 теоремы 2 получаем

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \langle T_1 u + T_2 u + T_3 u, u \rangle = +\infty$$

и, значит, найдется $R > 0$ такое, что $\langle Tu, u \rangle \ge 0$, если $\|u\| > R$ $(T = T_1 + T_2 +$

$+T_3$). Так как пространство E рефлексивно, а множество K выпукло и замкнуто, то утверждение теоремы 2 будет следовать из теоремы 1, если доказать следующие два утверждения: а) $u \in K$ — точка радиальной непрерывности оператора T относительно K тогда и только тогда, когда мера Лебега множества $\Omega = \{x \in \omega \mid u(x)$ — точка разрыва $f(x, \cdot)\}$ равна нулю; б) точки разрыва оператора T относительно K регулярны. Если $\mathrm{mes}\,\Omega = 0$, то радиальная непрерывность оператора T относительно K в точке u следует из теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла. Предположим, что $\mathrm{mes}\,\Omega \neq 0$. В силу условия 1 теоремы 2 множество Ω лишь на множество меры нуль может отличаться от множества $\{x \in \omega \mid f(x, u(x)) > f(x, u(x)-)\}$. Так как $u \in K$, то функция u неотрицательна и непрерывна на $\overline{\omega}$. Поскольку, для почти всех $x \in \omega$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна в нуле и $\mathrm{mes}\,\Omega \neq 0$, то для некоторого натурального n множество

$$\Omega_1 = \{x \in \omega \mid u(x) \geq 1/n \quad \text{и} \quad f(x, u(x)) > f(x, u(x)-)\}$$

имеет ненулевую меру. Пусть F_1 — замкнутое подмножество Ω_1 такое, что $\mathrm{mes}\,(\Omega_1 \setminus F_1) > \mathrm{mes}\,\Omega_1 \setminus 2$ и $h \in C_\infty(\omega)$ равна 1 на F_1 и нулю вне $\Omega_2 = \{x \in \omega \mid u(x) > 1/2n\}$, а для любого $x \in \Omega_2 \setminus F_1$ $0 \leq h(x) \leq 1$ (такая функция существует, поскольку множество Ω_2 открытое и содержит F_1). Тогда $v = u - h/2n \in K$ и $\lim_{t \to +0} \langle T(u + t(v-u)), v-u \rangle \neq \langle Tu, v-u \rangle$, так как разность между левой и правой частями последнего неравенства равна

$$1/2n \int_{\Omega_-} f(x, u(x)-) - f(x, u(x))) \, (-h(x)) \, dx,$$

где $\Omega_- = \{x \in \omega \mid h(x) > 0\}$. Таким образом, u является точкой разрыва оператора T относительно K. Утверждение а) доказано. Осталось проверить, что точки разрыва оператора T относительно K регулярны. Допустим противное. Тогда найдется точка разрыва $u \in K$ оператора T относительно K, которая не является регулярной. В этом случае для любого $h \in \overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$ такого, что $u + h \in K$, верно неравенство

$$\lim_{t \to +0} \langle T(u + th), h \rangle \geq 0, \tag{8}$$

а в силу утверждения а) и условия 1 теоремы 2 мера множества $\Omega' = \{x \in \omega \mid f(x, u(x)) > f(x, u(x)-)\}$ отлична от нуля. Как и при доказательстве теоремы 3 из [2], отсюда следует принадлежность $u|_{\omega_+}$ пространству $W^{2m}_{\mathrm{loc},q}(\omega_+)$, $\omega_+ = \{x \in \omega \mid u(x) > 0\}$, причем $\mathrm{mes}\,(\omega_+ \cap \Omega') = \mathrm{mes}\,\Omega'$. Исходя из этого и пользуясь A-условием для f по отношению к τ, можно построить $h \in \overset{0}{C}_\infty(\omega)$ с $u + h \in K$, для которого (8) не выполняется (такое h строится так же, как в [2] при доказательстве теоремы 3). Полученное противоречие доказывает утверждение б). Теорема 2 доказана.

1. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения.– 1988.– **24**, №8.– С. 1397–1402.
2. *Павленко В. Н.* Полуправильные решения эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, №2. – С. 230 – 235.
3. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.–М.: Наука,1972.–416 с.
4. *Browder F., Hess P.* Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces // J. Function. Anal. – 1972. – **11**, №3. – P. 251 – 294.
5. *Browder F.* Nonlinear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces // Math. Ann. – 1969. – **183**. – P. 213 – 231.
6. *Павленко В. Н.* Существование решений нелинейных уравнений с разрывными полумонотонными операторами // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, №4. – С. 547 – 551.
7. *Шрагин И. В.* Условия измеримости суперпозиций // Докл. АН СССР. – 1971. – **197**, №2. – С. 295 – 298.

Получено 29. 05. 91