УДК 517.5

В. І. Рукасов, С. О. Чайченко (Слов'ян. пед. ін-т)

НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

We study approximation properties of the Vallée-Poussin sums on the classes $C^q_\beta H_\omega$. We obtain asymptotic equalities that, in some cases ensure the solution of the Kolmogorov – Nikol'skii problem for the Vallée-Poussin sums on the classes $C^q_\beta H_\omega$.

Вивчаються апроксимативні властивості сум Валле Пуссена на класах $C^q_\beta H_\omega$. Одержано асимптотичні рівності, які в деяких випадках забезпечують розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для сум Валле Пуссена на класах $C^q_\beta H_\omega$.

Нехай $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ (див., наприклад, [1]) — класи неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$, що задаються згортками

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t)\,dt, \tag{1}$$

в яких

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0; 1), \quad \beta \in R^1,$$

— відоме ядро Пуассона, а функція $\varphi(\cdot)$, відповідно, майже скрізь задовольняє умову $|\varphi| \le 1$ або ж $\varphi \in H_\omega$,

$$H_\omega = \{\varphi \in C : \omega(\varphi; t) \le \omega(t)\},$$

де C — простір неперервних 2π-періодичних функцій, $\omega(\varphi; t)$ — модуль неперервності функції $\varphi(\cdot)$, а $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

У цьому випадку множини $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ складаються з 2π-періодичних функцій, які дозволяють продовження до функцій $f(z) = f(x+iy)$, регулярних у смузі $|y| < \ln(1/q)$ (див., наприклад, [2]), і називаються інтегралами Пуассона.

У 1946 р. С. М. Нікольський [3] розглянув величину

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right) = \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \| f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинна сума порядку $n-1$ ряду Фур'є функції $f(\cdot)$, і показав, що виконується рівність

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1) q^n n^{-1}, \tag{2}$$

в якій

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}, \quad q \in [0; 1),$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду. У 1980 р. С. Б. Стєчкін [4] цей результат передовів іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член рівності (2).

Аналогічна задача для класів $C^q_\beta H_\omega$ була розв'язана лише у 2000 р. О. І. Степанцем [1]. Він показав, що величина

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_\beta H_\omega\right) = \sup_{f \in C^q_\beta H_\omega} |f(x) - S_{n-1}(f;x)|$$

не залежить від точки x і при $n \to \infty$ виконується рівність

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_\beta H_\omega\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q)\theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t\, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega(1/n), \tag{3}$$

де $\theta_\omega \in [1/2; 1]$, причому $\theta_\omega = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, q і β.

З рівностей (2) і (3) випливає, що суми Фур'є на класах $C^q_{\beta,\infty}$ і $C^q_\beta H_\omega$ дають наближення, яке за порядком збігається з величиною найкращого наближення тригонометричними поліномами степеня не вище n. Незважаючи на це, природним є інтерес до того, як поводять себе інші наближаючі агрегати, зокрема суми Валле Пуссена, на згаданих класах.

З огляду на зазначене вище у роботі [5] було розглянуто величину

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \left\| f(\cdot) - V_{n,p}(f;\cdot)\right\|_C,$$

де

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

— суми Валле Пуссена функції f, і доведено, що для довільних $\beta \in R^1$ і $p < n$ при $n \to \infty$ виконується рівність

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi(1-q^2)}\frac{q^{n-p+1}}{p} + O(1)\left[\frac{q^n}{p} + \frac{q^{n-p+1}}{(n-p)p}\right]. \tag{4}$$

Зауважимо, що рівності (2) і (3) є асимптотично точними при будь-яких значеннях параметрів, що в них входять, в той час як рівність (4) дає розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського (див., наприклад, [2]) для сум Валле Пуссена на класах $C^q_{\beta,\infty}$ лише у випадку, коли одночасно

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}[n - p(n)] = \infty.$$

У цій роботі розглядається аналогічна задача для класів функцій, які задаються згортками вигляду (1), за умови, що $\varphi \in H_\omega$, тобто вивчається при $n \to \infty$ асимптотична поведінка величини

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) = \sup_{f \in C^q_\beta H_\omega} \left\| f(\cdot) - V_{n,p}(f;\cdot)\right\|_C.$$

Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема. *Нехай $q \in (0; 1)$, $\beta \in R^1$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n \to \infty$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^q H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi(1-q^2)}\frac{q^{n-p+1}}{p}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t\,dt\ +$$

$$+\ O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left[\frac{q^n}{(1-q^2)p} + \frac{q^{n-p+1}}{(1-q)^3(n-p)p}\right], \tag{5}$$

де $\theta_\omega \in [1/2;\,1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності, а* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена по* n, q *і* β.

Рівність (5) забезпечує розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для сум $V_{n,p}(f;x)$ на класах $C_\beta^q H_\omega$ за умови, що

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}[n - p(n)] = \infty.$$

Легко бачити, що в цьому випадку суми Валле Пуссена будуть давати наближення, порядок якого гірший за порядок найкращого наближення тригонометричними поліномами степеня не вище n. З рівності (5) також випливає, що суми $V_{n,p}(f;x)$ зможуть наближати клас $C_\beta^q H_\omega$ з найкращим порядком лише у випадку, коли $p = p(n) = O(1)$, $n \to \infty$.

Доведення проведемо за схемою доведення теореми 1 з роботи [1]. Позначимо через $f_\beta^q(\cdot)$ функцію φ в зображенні (1). Тоді якщо $f \in C_\beta^q H_\omega$, то

$$\left|f_\beta^q(t') - f_\beta^q(t'')\right| \le \omega(|t'-t''|) \qquad \forall\, t', t'' \in R^1$$

і (див. роботу [5])

$$\rho_{n,p}(f;x) \stackrel{\text{df}}{=} f(x) - V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_\beta^q(x+t)V_{n,p}^{q,\beta}(t)\,dt,$$

де

$$V_{n,p}^{q,\beta}(t) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{\infty} q^i\cos\left(it + \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Класи $C_\beta^q H_\omega$ інваріантні відносно зсуву по аргументу. Отже,

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^q H_\omega; V_{n,p}\right) = \sup_{f\in C_\beta^q H_\omega}\left|f(0) - V_{n,p}(f;0)\right|. \tag{6}$$

Оскільки функція $V_{n,p}^{q,\beta}(t)$ має на періоді нульове середнє значення, то

$$\rho_{n,p}(f;0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\delta(t)V_{n,p}^{q,\beta}(t)\,dt, \qquad \delta(t) = f_\beta^q(t) - f_\beta^q(0). \tag{7}$$

Перетворимо зображення (7) до більш зручного для подальших досліджень вигляду. Беручи до уваги співвідношення (див. [1])

$$\sum_{k=m}^{\infty} q^k\cos(kt + \gamma) = q^m Z_q(t)\cos(mt + \theta(t) + \gamma),$$

в якому

$$Z_q(t) = (1 - 2q\cos t + q^2)^{-1/2}, \tag{8}$$

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{q\sin t}{1 - q\cos t}, \tag{9}$$

і рівність (6), одержуємо

$$\mathscr{E}\left(C_\beta^q H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{\pi p} \sup_{f \in H_{\omega_0}} \left| \int_0^{2\pi} f(t) Z_q^2(t) \cos\left((n-p+1)t + 2\theta(t) + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt - \right.$$

$$\left. - q^p \int_0^{2\pi} f(t) Z_q^2(t) \cos\left((n+1)t + 2\theta(t) + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| dt, \tag{10}$$

де

$$H_{\omega_0} = \{f : f \in H_\omega, f(0) = 0\}.$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\beta \in [0; 4)$.

Зауваживши це, покладемо

$$\tau = \tilde{y}(t) = t + \frac{1}{n-p}\left(2\theta(t) + t + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad n > p. \tag{11}$$

Беручи до уваги рівність (9), знаходимо

$$\tilde{y}'(t) = \left(\frac{n-p+1}{n-p} - 2q\cos t + \frac{n-p-1}{n-p} q^2\right) \times$$

$$\times \frac{1}{1 - 2q\cos t + q^2} = \frac{Z_q^2(t)}{Z_{n,p,q}^2(t)},$$

де

$$Z_{n,p,q}(t) = \left(\frac{n-p+1}{n-p} - 2q\cos t + \frac{n-p-1}{n-p} q^2\right)^{-1/2}. \tag{12}$$

Оскільки $q \in [0; 1)$, то

$$\frac{n-p+1}{n-p} - 2q\cos t + \frac{n-p-1}{n-p} q^2 -$$

$$-(1 - 2q\cos t + q^2) = \frac{1-q^2}{n-p} > 0.$$

Звідси випливає

$$Z_q^2(t) > Z_{n,p,q}^2(t) \qquad \forall t \in R^1. \tag{13}$$

Отже, завжди $\tilde{y}'(t) > 1$, так що функція $\tilde{y}(t)$ монотонно зростає і існує обернена до неї функція $t = y(\tau) = \tilde{y}^{-1}(\tau)$, $\tau \in R^1$. При цьому

$$y'(\tau) = \frac{Z_{n,p,q}^2(y(\tau))}{Z_q^2(y(\tau))} \tag{14}$$

і для всіх дійсних τ і $q \in [0; 1)$

$$0 < y'(\tau) < 1. \tag{15}$$

Позначимо перший інтеграл у рівності (10) через $\mathscr{I}_{n,p}(f)$ і виконаємо в ньому заміну змінної $t = y(\tau)$. Враховуючи рівність (14), одержуємо

$$\mathcal{J}_{n,p}(f) = \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) Z^2_{n,p,q}(y(\tau)) \cos(n-p)\tau \, d\tau \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) Z^2_q(y(\tau)) \cos(n-p)\tau \, d\tau + R^{(1)}_{n,p}(f), \tag{16}$$

де

$$R^{(1)}_{n,p}(f) = \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) r^{(1)}_{n,p}(\tau) \cos(n-p)\tau \, d\tau, \tag{17}$$

$$r^{(1)}_{n,p}(\tau) = Z^2_{n,p,q}(y(\tau)) - Z^2_q(y(\tau)). \tag{18}$$

Для оцінки величини $R^{(1)}_{n,p}(f)$ із співвідношення (17) будемо користуватися наслідком з відомої леми Корнійчука – Стечкіна (лема III.1.3 з роботи [2]). Спочатку покажемо, що у функції $r^{(1)}_{n,p}(t)\cos(n-p)t$ існує послідовність точок x_k, яка задовольняє умову вказаної леми. Беручи до уваги рівності (8), (12) і (13), знаходимо

$$\left[Z^2_q(y(\tau))\right]' = -2q \sin y(\tau) Z^2_q(y(\tau)) Z^2_{n,p,q}(y(\tau)), \tag{19}$$

$$\left[Z^2_{n,p,q}(y(\tau))\right]' = -2q \sin y(\tau) \frac{Z^6_{n,p,q}(y(\tau))}{Z^2_q(y(\tau))} \tag{20}$$

і

$$\left[r^{(1)}_{n,p}(\tau)\right]' = -2q \sin y(\tau) Z^2_q(y(\tau)) Z^2_{n,p,q}(y(\tau)) \left[\frac{Z^4_{n,p,q}(y(\tau))}{Z^4_q(y(\tau))} - 1\right].$$

З останнього співвідношення випливає

$$\operatorname{sign}\left[r^{(1)}_{n,p}(\tau)\right]' = \operatorname{sign} \sin y(\tau), \qquad \tau \in [\tilde{y}(0); \tilde{y}(2\pi)].$$

Отже, функція $r^{(1)}_{n,p}(\tau)$ на проміжку $(\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi))$ монотонно зростає, а на проміжку $(\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi))$ монотонно спадає.

Нехай

$$x_k = \frac{k\pi}{n-p} \qquad \text{і} \qquad \tau_k = x_k + \frac{\pi}{2(n-p)}.$$

Тоді з урахуванням (11) одержуємо

$$\tilde{y}(0) < x_2 < \tau_2 < x_3 < \ldots < \tau_{n-p} < x_{n-p+1} < \tilde{y}(\pi) <$$

$$< x_{n-p+3} < \tau_{n-p+3} < \ldots < \tau_{2(n-p)+1} < x_{2(n-p+1)} < \tilde{y}(2\pi). \tag{21}$$

Внаслідок монотонності функції $r^{(1)}_{n,p}(\tau)$ числа

$$|\alpha_k| = \left| \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} r^{(1)}_{n,p}(\tau) \cos(n-p)\tau \, d\tau \right|$$

при $k = 2, 3, \ldots, n-p+1$ не спадають, а при $k = (n-p+3), \ldots, 2(n-p)$ не зростають, причому

$$\operatorname{sign}\alpha_k = \operatorname{sign}\cos(n-p)x_{k+1} = (-1)^k.$$

Звідси випливає, що функція

$$r^{+}_{n,p}(\tau) = \int_{\tau_2}^{\tau} r^{(1)}_{n,p}(v)\cos(n-p)v\,dv$$

на кожному проміжку $[\tau_k; \tau_{k+1}]$ буде мати єдиний простий нуль $\bar{\tau}_k$, $k = 2, 3, \ldots, (n-p+1)-2$, а функція

$$r^{-}_{n,p}(\tau) = \int_{\tau_{2(n-p)+1}}^{\tau} r^{(1)}_{n,p}(v)\cos(n-p)v\,dv$$

— єдиний такий нуль $\bar{\tau}_k$ на кожному проміжку $[\tau_k; \tau_{k+1}]$, $k = n-p+3, \ldots$ $\ldots, 2(n-p)$.

Застосовуючи на кожному з відрізків $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$ і $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$ лему III.1.3 з роботи [2], одержуємо

$$\left|R^{(1)}_{n,p}(f)\right| \le \max_{\tilde{y}(0)\le\tau<\tau_2}|f(y(\tau))|\int_{\tilde{y}(0)}^{\tau_2}\left|r^{(1)}_{n,p}(\tau)\right|d\tau +$$

$$+ \max_{\tau_{n-p}\le\tau<\tau_{n-p+3}}|f(y(\tau))|\int_{\tau_{n-p}}^{\tau_{n-p+3}}\left|r^{(1)}_{n,p}(\tau)\right|d\tau +$$

$$+ \max_{\tau_{2(n-p)}\le\tau<\tilde{y}(2\pi)}|f(y(\tau))|\int_{\tau_{2(n-p)}}^{\tilde{y}(2\pi)}\left|r^{(1)}_{n,p}(\tau)\right|d\tau +$$

$$+ \omega\left(\frac{4\pi}{n-p}\right)\int_{\tau_2}^{\tau_{2(n-p)}}\left|r^{(1)}_{n,p}(\tau)\right|d\tau.$$

Звідси, враховуючи співвідношення

$$\left|r^{(1)}_{n,p}(\tau)\right| = \frac{1}{n-p}\times$$

$$\times\frac{1-q^2}{\left(\frac{n-p+1}{n-p} - 2q\cos t + \frac{n-p-1}{n-p}q^2\right)(1-2q\cos t + q^2)} \le$$

$$\le \frac{1}{n-p}\frac{1+q}{(1-q)^3}$$

і

$$(\tau_2 - \tilde{y}(0)) + \left(\tau_{n-p+3} - \tau_{n-p}\right) + \left(\tilde{y}(2\pi) - \tau_{2(n-p)}\right) \le \frac{12\pi}{n-p},$$

одержуємо

$$\left|R^{(1)}_{n,p}(f)\right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \tag{22}$$

Для подальшого спрощення інтеграла із співвідношення (16) означимо функцію $l_{n,p}(\tau) = l_{n,p,q}(\tau)$, поклавши

$$l_{n,p}(\tau) = \begin{cases} Z_q(y(\tau_k)), & \tau \in [x_k; x_{k+1}], \quad k = 2, 3, \ldots, 2(n-p)+1; \\ 0, & \tau \in [\tilde{y}(0); x_2] \cup [x_{2(n-p+1)}; \tilde{y}(2\pi)]. \end{cases} \tag{23}$$

Тоді

$$\mathcal{J}_{n,p}(f) = \int_{x_2}^{2(n-p+1)} f(y(\tau)) l_{n,p}^2(\tau) \cos(n-p)\tau \, d\tau + R_{n,p}^{(1)}(f) + R_{n,p}^{(2)}(f), \tag{24}$$

де

$$R_{n,p}^{(2)}(f) = \int_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(2\pi)} f(y(\tau)) r_{n,p}^{(2)}(\tau) \cos(n-p)\tau \, d\tau \tag{25}$$

і

$$r_{n,p}^{(2)}(\tau) = Z_q^2(y(\tau)) - l_{n,p}^2(y(\tau)). \tag{26}$$

Для оцінки величини $R_{n,p}^{(2)}(f)$ знову скористаємось лемою III.1.3 з роботи [2]. Спочатку переконаємося, що функція $r_{n,p}^{(2)}(\tau)$ із співвідношення (26) задовольняє умову цієї леми. Справедливе наступне твердження.

Лема. *Функція* $Z_q^2(y(\tau))$, $0 < q < 1$, $n > p \geq 1$, *монотонно спадає на проміжку* $(\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi))$ *і монотонно зростає на проміжку* $(\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi))$. *При цьому на вказаних проміжках вона має по єдиній точці перегину.*

Доведення. Із співвідношення (19) випливає

$$\operatorname{sign}\left[Z_q^2(y(\tau))\right]' = -\operatorname{sign}\sin y(\tau).$$

Отже, функція $Z_q^2(y(\tau))$ на проміжку $(\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi))$ монотонно спадає, а на проміжку $(\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi))$ монотонно зростає.

Беручи до уваги ще співвідношення (14) і (20), знаходимо

$$\begin{aligned} \left[Z_q^2(y(\tau))\right]'' &= -2q\cos y(\tau) Z_q^2(y(\tau)) Z_{n,p,q}^2(y(\tau)) y'(\tau) - \\ &- 2q\sin y(\tau)\left[\left(Z_q^2(y(\tau))\right)' Z_{n,p,q}^2(y(\tau)) + Z_q^2(y(\tau))\left(Z_{n,p,q}^2(y(\tau))\right)'\right] = \\ &= -2qZ_{n,p,q}^4(y(\tau))\left[\cos y(\tau) + 2q\sin^2 y(\tau)\left(Z_q^2(y(\tau)) + Z_{n,p,q}^2(y(\tau))\right)\right]. \end{aligned}$$

Останнє співвідношення дозволяє стверджувати, що функція $Z_q^2(y(\tau))$ на кожному з проміжків $(\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi))$ і $(\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi))$ має по єдиній точці перегину.

Лему доведено.

Розглянемо тепер величину $R_{n,p}^{(2)}(f)$. Позначимо через τ^* точку перегину функції $Z_q^2(y(\tau))$, яка знаходиться на проміжку $(\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi))$. Тоді на проміжку $(\tilde{y}(0); \tau^*)$ функція $Z_q^2(y(\tau))$ спадає і опукла доверху, а на проміжку $(\tau^*; \tilde{y}(\pi))$ спадає і опукла донизу. Виберемо число k_0 з умови

$$x_{k_0} \leq \tau^* \leq x_{k_0+1}.$$

Нехай спочатку $k = \overline{2; k_0 - 1}$ і

$$\alpha_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} r_{n,p}^{(2)}(\tau)\cos(n-p)\tau\, d\tau.$$

У цьому випадку

$$\operatorname{sign}\alpha_k = (-1)^k \tag{27}$$

і числа $|\alpha_k|$ не спадають. Дійсно, нехай для визначеності k — парне. Тоді, беручи до уваги рівність (26), одержуємо

$$|\alpha_k| - |\alpha_{k+1}| = \left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} r_{n,p}^{(2)}(\tau)\cos(n-p)\tau\, d\tau\right| -$$

$$- \left|\int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} r_{n,p}^{(2)}(\tau)\cos(n-p)\tau\, d\tau\right| =$$

$$= \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left|Z_q^2(y(\tau)) - Z_q^2(y(\tau_k))\right| |\cos(n-p)\tau|\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \left|Z_q^2(y(\tau)) - Z_q^2(y(\tau_k))\right| |\cos(n-p)\tau|\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\left|Z_q^2(y(\tau)) - Z_q^2(y(\tau_k))\right| - \left|Z_q^2(y(\tau+h)) - Z_q^2(y(\tau_k+h))\right|\right) \times$$

$$\times\ |\cos(n-p)\tau|\, d\tau,$$

де $h = \pi/(n-p)$.

На проміжку $\left(\tilde{y}(0); x_{k_1}\right)$ функція $Z_q^2(y(\tau))$ спадає і $\left[Z_q^2(y(\tau))\right]'' \le 0$. Тому, застосовуючи лему 3 роботи [1] при $a = x_k$, $h = \pi/(n-p)$ і $g(\tau) = Z_q(y(\tau))$, переконуємося, що

$$|\alpha_k| \le |\alpha_{k+1}|, \qquad k = \overline{2; k_0 - 2}. \tag{28}$$

Якщо ж $k_0 + 1 \le k \le n - p$, то аналогічно одержуємо

$$\operatorname{sign}\alpha_k = (-1)^{k+1} \tag{29}$$

і

$$|\alpha_k| \ge |\alpha_{k+1}|, \qquad k = \overline{k_0, n-p-1}. \tag{30}$$

Нехай

$$\Phi_1(x) = \int\limits_{x_2}^{x} r_{n,p}^{(2)}(\tau)\cos(n-p)\tau\, d\tau$$

і

$$\Phi_2(x) = \int\limits_{x_{n-p}}^{x} r_{n,p}^{(2)}(\tau)\cos(n-p)\tau\, d\tau.$$

Із співвідношень (27) – (30) випливає, що функція $\Phi_1(x)$ на кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$ має по одному простому нулю $\bar{x}_k$, $k = \overline{2; k_1}$, а функція $\Phi_2(x)$ має такі ж нулі на кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{k_2, n-p-1}$. Покладемо

$$G(t) = f(y(\tau))r^{(2)}_{n,p}(\tau)\cos(n-p)\tau.$$

Із співвідношення (25) одержуємо

$$R^{(2)}_{n,p}(t) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\tilde{y}(\pi)}^{\tilde{y}(2\pi)} G(\tau)\,d\tau \overset{\text{df}}{=} J^{(1)}_{n,p}(f) + J^{(2)}_{n,p}(f). \tag{31}$$

Отримаємо оцінки для інтегралів із правої частини співвідношення (31). Маємо

$$J^{(1)}_{n,p}(f) = \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{x_2} G(\tau)\,d\tau + \int\limits_{x_2}^{\bar{x}_{k_1-1}} G(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} G(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\bar{x}_{k_2}}^{x_{n-p}} G(\tau)\,d\tau + \int\limits_{x_{n-p}}^{\tilde{y}(\pi)} G(\tau)\,d\tau \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{5} j_i(f) \tag{32}$$

і згідно з вибором точок x_k

$$\tilde{y}(0) \le x_2 = \frac{2\pi}{n-p} < x_{k_1-1} < \bar{x}_{k_1-1} < x_{k_1} < \tau^* < x_{k_2} <$$

$$< \bar{x}_{k_2} < x_{k_2+1} < x_{n-p} = \pi < x_{n-p+1} \le \tilde{y}(\pi) = \pi + \frac{2+\beta}{2(n-p)}\pi. \tag{33}$$

Беручи до уваги співвідношення (23) і (26), для будь-якої функції $f \in H_{\omega_0}$ знаходимо

$$|j_1(f)| = \left| \int\limits_{\tilde{y}(0)}^{x_2} f(y(\tau)) Z_q^2(\tau)\cos(n-p)\tau\,d\tau \right| \le$$

$$\le \omega\left(\frac{2\pi}{n-p}\right)\frac{2\pi}{(1-q)^2(n-p)} = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^2(n-p)}. \tag{34}$$

З огляду на зазначені вище властивості функцій $\Phi_i(x)$, $i = 1, 2$, для оцінки інтегралів $j_2(f)$ і $j_4(f)$ можна застосувати лему III.1.3 з роботи [2]. Застосовуючи цю лему, знаходимо

$$|j_2(f)| + |j_4(f)| \le \omega\left(\frac{4\pi}{n-p}\right) \int\limits_{x_2}^{x_{n-p}} \left| r^{(2)}_{n,p}(\tau) \right| d\tau.$$

Але при $\tau \in [x_2; x_{n-p}]$

$$\left| r^{(2)}_{n,p}(\tau) \right| \le \max_{2 \le k \le n-p} \left| Z_q^2\big(y(x_{k+1})\big) - Z_q^2\big(y(x_k)\big) \right| =$$

$$= \max_{2 \le k \le n-p} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \left| \frac{\partial Z_q^2(y(\tau))}{\partial \tau} \right| |y'(\tau)|\,d\tau.$$

Оскільки для довільного τ $|y'(\tau)| < 1$ і

$$\left|\left[Z_q^2(t)\right]'\right| = \left|\frac{2q\sin t}{1 - 2q\cos t + q^2}\right| = \left|2\sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt\right| \leq \frac{2}{1-q},$$

то

$$\left|r_{n,p}^{(2)}(\tau)\right| = O(1)\frac{1}{(1-q)(n-p)}, \qquad \tau \in [x_2; x_{n-p}]. \tag{35}$$

Таким чином,

$$|j_2(f)| + |j_4(f)| \leq K\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)(n-p)}. \tag{36}$$

Внаслідок співвідношень (33) і (35) маємо

$$|j_3(f)| = \left|\int\limits_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} G(\tau)\,d\tau\right| \leq \int\limits_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} \left|r_{n,p}^{(2)}(\tau)\right| d\tau = O(1)\frac{1}{(1-q)(n-p)^2} \tag{37}$$

і

$$|j_5(f)| = \left|\int\limits_{x_{n-p}}^{\bar{y}(\pi)} G(\tau)\,d\tau\right| \leq \omega(\pi)\int\limits_{\pi}^{\bar{y}(\pi)} \left|r_{n,p}^{(2)}(\tau)\right| d\tau = O(1)\frac{1}{(1-q)(n-p)^2}. \tag{38}$$

Об'єднуючи співвідношення (34), (36) – (38), одержуємо

$$\left|J_{n,p}^{(1)}(f)\right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^2(n-p)} \qquad \forall f \in H_{\omega_0}.$$

Зрозуміло, що аналогічна оцінка має місце і для величини $\left|J_{n,p}^{(2)}(f)\right|$. Тому згідно з співвідношенням (31) отримуємо

$$\left|R_{n,p}^{(2)}(f)\right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^2(n-p)} \qquad \forall f \in H_{\omega_0}. \tag{39}$$

Таким чином, із співвідношень (24), (22) і (39) випливає, що для будь-якої функції $f \in H_{\omega_0}$

$$\mathcal{J}_{n,p}(f) = \int\limits_{x_2}^{2(n-p+1)} f(y(\tau))\, l_{n,p}^2(\tau)\cos(n-p)\tau\,d\tau \; +$$

$$+ \; O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \tag{40}$$

Нехай

$$i_{n,p}^q(f) = \int\limits_{x_2}^{2(n-p+1)} f(y(\tau))\, l_{n,p}^2(\tau)\cos(n-p)\tau\,d\tau. \tag{41}$$

Враховуючи означення функції $l_{n,p}(\tau)$, знаходимо

$$i_{n,p}^q(f) = \sum_{k=2}^{2(n-p)+1} Z_q^2(y(\tau_k)) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(y(\tau))\cos(n-p)\tau\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=2}^{2(n-p)+1} Z_q^2(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\cos((n-p)\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)\,dt, \qquad t_k = y(x_k).$$

Звідси випливає

$$\sup_{f\in H_{\omega_0}} \left| i_{n,p}^q(f) \right| \le \sum_{k=2}^{2(n-p)+1} Z_q^2(y(\tau_k)) S_k(\omega), \tag{42}$$

де

$$S_k(\omega) = \sup_{f\in H_{\omega_0}} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\cos((n-p)\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)\,dt \right|. \tag{43}$$

На кожному проміжку $[t_k; t_{k+1}]$, $k = 2, \ldots, 2(n-p)+1$, функція

$$\psi(t) = \cos((n-p)\tilde{y}(t))\tilde{y}'(t) \tag{44}$$

неперервна і змінює свій знак в єдиній точці $c_k = y(\tau_k)$. При цьому

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi(t)\,dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos(n-p)\tau\,d\tau = 0.$$

Тому для знаходження величини $S_k(\omega)$ можна користуватися лемою Корнійчука – Стечкіна (див., наприклад, [6]). Нехай $\rho_k(t)$ — функція, означена на проміжку $[t_k; c_k]$ рівністю

$$\int_{t_k}^{t} \psi(t)\,dt = \int_{t_k}^{\rho_k(t)} \psi(t)\,dt, \qquad t_k \le t \le c_k \le \rho_k(t) \le t_{k+1}. \tag{45}$$

Тоді згідно з лемою Корнійчука – Стечкіна для будь-якого модуля неперервності $\omega(t)$

$$S_k(\omega) \le \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\,\omega(\rho_k(t) - t)\,dt. \tag{46}$$

Якщо при цьому $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, то в (46) має місце знак рівності, і верхня межа реалізується функціями із H_{ω_0} вигляду $s_k \pm f_k(t)$, де s_k — довільні сталі,

$$f_k(t) = \begin{cases} -\int_t^{c_k} \omega'(\rho_k(v) - v)\,dv, & t\in[t_k; c_k]; \\ \int_{c_k}^{t} \omega'\big(v - \rho_k^{-1}(v)\big)\,dv, & t\in\big[c_k; t_{k+1}\big], \end{cases}$$

$\rho_k^{-1}(v)$ — функція, обернена до $\rho_k(v)$.

Об'єднуючи співвідношення (42), (43) і (46), для довільного модуля неперервності $\omega(t)$ одержуємо

$$\sup_{f\in H_{\omega_0}} \left| i_{n,p}^q(f) \right| \le \sum_{k=2}^{2(n-p)+1} Z_q^2(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\,\omega(\rho_k(t) - t)\,dt. \tag{47}$$

Нехай тепер $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності. Скориставшись міркуваннями з роботи [1], побудуємо функцію $f^* \in H_{\omega_0}$, для якої буде виконуватися рівність

$$i_{n,p}^{q}(f^*) = \sum_{k=2}^{2(n-p)+1} Z_q^2(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\,\omega(\rho_k(t) - t)\,dt \; +$$

$$+ \; O(1)\,\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \qquad (48)$$

Функцію $f^*(\cdot)$ будемо будувати на основі функцій $f_k(t)$. Для цього спочатку зауважимо, що для величин $d_k = t_{k+1} - t_k$, $t_k = y(x_k)$ виконується рівність

$$d_k - d_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(\tau)\,d\tau - \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} y'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(y'(\tau) - y'\left(\tau + \frac{\pi}{n-p}\right)\right) d\tau. \qquad (49)$$

Беручи до уваги співвідношення (14), (19) і (20), знаходимо

$$y''(\tau) = 2q \sin y(\tau)\,\frac{Z_{n,p,q}^6(y(\tau))}{Z_q^6(y(\tau))}\left[Z_q^2(y(\tau)) - Z_{n,p,q}^2(y(\tau))\right].$$

Звідси видно, що

$$\operatorname{sign} y''(\tau) = \operatorname{sign}\sin y(\tau).$$

З останньої рівності випливає, що на проміжку $[\tilde{y}(0); \tilde{y}(\pi)]$ функція $y'(\tau)$ монотонно зростає, а на проміжку $[\tilde{y}(\pi); \tilde{y}(2\pi)]$ — монотонно спадає. Таким чином, співвідношення (49) дозволяє стверджувати, що числа d_k із зростанням номера k спочатку зростають, а потім, починаючи з деякого k, спадають. Нехай $\bar{k}$ — значення номера k, при якому змінюється характер вказаної монотонності, тобто числа d_k при $k = 2, \ldots, \bar{k}$ монотонно зростають, а при $k = \bar{k} + 1, \ldots \ldots, 2(n-p)+1$ монотонно спадають. Зрозуміло, що

$$n - p < \bar{k} < n - p + 6.$$

Зауваживши це, покладемо

$$f_0(t) = \begin{cases} (-1)^k f_k(t) + \gamma_k, & t \in [t_k; t_{k+1}], \quad k = 2, \ldots, \bar{k}; \\ (-1)^k f_k(t) + \delta_k, & t \in [t_k; t_{k+1}], \quad k = \bar{k}+1, \ldots, 2(n-p)+1, \end{cases}$$

де $\gamma_2 = \delta_{2(n-p)+1} = 0$, а інші числа γ_k і δ_k вибрано так, щоб функція $f_0(t)$ була неперервною на проміжках $(t_2; t_{\bar{k}})$ і $(t_{\bar{k}+1}; t_{2(n-p)})$. Позначимо через $f^*(t)$ 2π-періодичну функцію, яка на періоді $[0; 2\pi]$ визначається рівністю

$$f^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; c_2] \cup \left[c_{2(n-p)+1}; 2\pi\right]; \\ f_0(t), & t \in \left[c_2; t_{\bar{k}}\right] \cup \left[t_{\bar{k}+2}; c_{2(n-p)+1}\right]; \\ m(t), & t \in \left[t_{\bar{k}}; t_{\bar{k}+2}\right], \quad \text{якщо} \quad f_0(t_{\bar{k}+1} - 0) > 0; \\ M(t), & t \in \left[t_{\bar{k}}; t_{\bar{k}+2}\right], \quad \text{якщо} \quad f_0(t_{\bar{k}+1} - 0) < 0, \end{cases}$$

де

$$m(t) = \min\left\{f_0(t);\ f_0(t_{\bar{k}+1} - 0);\ f_0(t_{\bar{k}+1} + 0)\right\},$$

$$M(t) = \max\left\{f_0(t);\ f_0(t_{\bar{k}+1} - 0);\ f_0(t_{\bar{k}+1} + 0)\right\}.$$

Функція $f^*(t)$ — шукана. Перевіркою переконуємося, що

$$i^q_{n,p}(f^*) = \sum_{k=2}^{2(n-p)+1} Z_q^2(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\, \omega(\rho_k(t) - t)\, dt. \tag{50}$$

Функції $f_0(t)$ і $f^*(t)$ відрізняються лише на проміжках $(t_2; c_2)$, $(t_{\bar{k}}; t_{\bar{k}+2})$ і $(c_{2(n-p)+1}; t_{2(n-p)})$. Звідси випливає, що виконується рівність

$$i^q_{n,p}(f^*) = i^q_{n,p}(f_0) + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}.$$

Співставляючи останню рівність із співвідношенням (50), отримуємо рівність (48). Отже, беручи до уваги те, що $f^* \in H_{\omega_0}$ (останнє включення доведено в роботі [1, с. 24, 25]), для опуклого модуля неперервності $\omega(t)$ одержуємо

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} \left|i^q_{n,p}(f)\right| = \sum_{k=2}^{2(n-p)+1} Z_q^2(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\, \omega(\rho_k(t) - t)\, dt\ + $$
$$+\ O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \tag{51}$$

Покладаючи $t = y(t)$ і беручи до уваги співвідношення (44), отримуємо

$$\int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\, \omega(\rho_k(t) - t)\, dt = \int_{x_k}^{\tau_k} \cos((n-p)\tau)\, \omega(\rho_k(y(\tau)) - y(\tau))\, d\tau. \tag{52}$$

Нехай при деякому $k = \overline{2, 2(n-p)+1}$ має місце включення $\tau \in [x_k; \tau_k]$. Тоді

$$\int_{x_k}^{\tau} \cos(n-p)v\, dv = \int_{x_k}^{2\tau_k - \tau} \cos(n-p)v\, dv,$$

або поклавши $v = \tilde{y}(t)$ і згадуючи, що $y(x_k) = t_k$, отримаємо

$$\int_{t_k}^{y(\tau)} \cos[(n-p)\tilde{y}(t)]\tilde{y}'(t)\, dt = \int_{t_k}^{y(2\tau_k - \tau)} \cos[(n-p)\tilde{y}(t)]\tilde{y}'(t)\, dt.$$

Співставляючи останню рівність і співвідношення (45), можна стверджувати, що

$$y(2\tau_k - \tau) = \rho(y(\tau)), \quad t_k \le y(\tau) \le c_k \le \rho(y(\tau)) \le t_{k+1}. \tag{53}$$

Таким чином, згідно з співвідношеннями (52) і (53) маємо

$$\int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\,\omega(\rho_k(t) - t)\,dt = \left| \int_{x_k}^{\tau_k} \cos((n-p)\tau)\,\omega(y(2\tau_k - \tau) - y(\tau))\,d\tau \right|. \tag{54}$$

За формулою Лагранжа

$$y(2\tau_k - \tau) - y(\tau) = 2y'(\xi)(\tau_k - \tau), \quad \xi \in [\tau; 2\tau_k - \tau] \subset [x_k; x_{k+1}],$$

і згідно з співвідношеннями (14) і (15)

$$y'(\xi) = 1 - \gamma_{n,p}. \tag{55}$$

Звідси знаходимо

$$\gamma_{n,p} = 1 - \frac{Z^2_{n,p,q}(y(\xi))}{Z^2_q(y(\xi))}. \tag{56}$$

Виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$0 < \gamma_{n,p} < \frac{3(1-q^2)}{n-p}. \tag{57}$$

Із співвідношень (54) – (57) випливає

$$\int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\,\omega(\rho_k(t) - t)\,dt = \int_{x_k}^{\tau_k} \cos((n-p)\tau)\,\omega\big(2(1-\gamma_{n,p})(\tau_k - \tau)\big)\,d\tau =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2(n-p)}} \sin((n-p)\tau)\,\omega\big(2\tau(1-\bar\gamma_{n,p})\big)\,d\tau, \tag{58}$$

де $\bar\gamma_{n,p}$ — величина, яка задовольняє умову

$$0 < \bar\gamma_{n,p} < \frac{3(1-q^2)}{n-p}. \tag{59}$$

Скориставшись твердженням 1 з роботи [1], одержуємо, що при достатньо великому n

$$\omega\big(2\tau(1-\bar\gamma_{n,p})\big) = \omega(2\tau)\big(1 - r_{n,p}(\tau)\big), \tag{60}$$

де

$$0 \le r_{n,p}(\tau) \le \frac{\bar\gamma_{n,p}}{1-\bar\gamma_{n,p}}. \tag{61}$$

Отже, із співвідношень (58) – (61) знаходимо

$$\int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\,\omega(\rho_k(t) - t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2(n-p)}} \omega(2t)\sin(n-p)t\,dt \; -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2(n-p)}} r_{n,p}(t)\omega(2t)\sin(n-p)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{n-p}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t\,dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)^2}.$$

Останнє співвідношення разом з рівністю (51) означає, що для будь-якого модуля неперервності при $n\to\infty$

$$\sup_{f\in H_{\omega_0}}\left|i^q_{n,p}(f)\right| = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p}\right)\sin t\,dt\frac{\pi}{n-p}\sum_{k=2}^{2(n-p)+1}Z_q^2(y(\tau_k)) +$$

$$+ O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \tag{62}$$

Покажемо, що

$$\frac{\pi}{n-p}\sum_{k=2}^{2(n-p)+1}Z_q^2(y(\tau_k)) =$$

$$= \frac{2\pi}{1-q^2} + O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \tag{63}$$

Маємо

$$\frac{\pi}{n-p}\sum_{k=2}^{2(n-p)+1}Z_q^2(y(\tau_k)) = \int\limits_{\tilde y(0)}^{\tilde y(2\pi)}Z_q^2(y(\tau))\,d\tau + R^{(2)}_{n,p}, \tag{64}$$

де

$$R^{(2)}_{n,p} = -\int\limits_{\tilde y(0)}^{\tilde y(2\pi)} r^{(2)}_{n,p}(\tau)\,d\tau,$$

$r^{(2)}_{n,p}(\tau)$ — функція, означена рівністю (26).

Враховуючи співвідношення (21) і (35), одержуємо

$$R^{(2)}_{n,p} = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \tag{65}$$

Далі маємо

$$\int\limits_{\tilde y(0)}^{\tilde y(2\pi)}Z_q^2(y(\tau))\,d\tau = \int\limits_0^{2\pi}Z_q^2(t)\,dt + R^{(1)}_{n,p}, \tag{66}$$

де з урахуванням співвідношень (18) і (22)

$$R^{(1)}_{n,p} = -\int\limits_{\tilde y(0)}^{\tilde y(2\pi)} r^{(1)}_{n,p}(\tau)\,d\tau = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\frac{1}{(1-q)^3(n-p)}. \tag{67}$$

Із співвідношень (64) – (67) з урахуванням рівності

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2q\cos t + q^2} = \frac{2\pi}{1 - q^2}, \quad 0 \le q < 1,$$

одержуємо рівність (63).

Таким чином, із співвідношень (40), (41), (62) і (63) випливає

$$\mathcal{I}_{n,p}(f) = \frac{2\theta_\omega}{1 - q^2} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n - p}\right) \sin t \, dt +$$

$$+ O(1)\omega\left(\frac{1}{n - p}\right) \frac{1}{(1 - q)^3 (n - p)}. \tag{68}$$

Позначимо через $\mathcal{I}^*_{n,p}(f)$ другий інтеграл із співвідношення (10). Очевидно, що $\mathcal{I}^*_{n,p}(f) = \mathcal{I}_{n,0}(f)$. Отже, має місце рівність

$$\mathcal{I}^*_{n,p}(f) = O(1) \frac{\omega(1/n)}{1 - q^2}. \tag{69}$$

Співставляючи співвідношення (10), (68) і (69), одержуємо твердження теореми.

Теорему доведено.

1. *Степанец А. И.* Приближение аналитических непрерывных функций // Мат. сб. – 2001. – **192**, № 1. – С. 113 – 138.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207 – 256.
4. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
5. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – С. 109 – 110.
6. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.

Одержано 12.06.2002