УДК 517.956

Н. І. Білусяк (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
Л. І. Комарницька (Дрогобиц. пед. ун-т),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

We establish conditions of the correct solvability of a problem with Dirichlet-type conditions on a time variable and with periodicity conditions on spatial coordinates for systems of partial equations which are not solved with respect to the highest time derivative. We prove metric theorems on lower bounds of small denominators that appear in the construction of solution of this problem.

Встановлено умови коректної розв'язності задачі з умовами типу Діріхле за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

1. Розв'язність задач із даними на всій межі області для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1 – 6] та бібліографію в [6]). У даній роботі, яка є узагальненням та розвитком результатів робіт [1, 3, 4], досліджено однозначну розв'язність задачі з умовами типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними зі сталими комплексними коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

В області $D = (0, T) \times \Omega$ (Ω — p-вимірний тор, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \le x_r \le 2\pi,\ r = 1, \ldots, p\}$) розглядаємо задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{|s| \le \omega} A_{sr} \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = f(t, x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2q} u}{\partial t^{2q}}\right|_{t=T} = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де

$$u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_m), \qquad f = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_m),$$

$$A_{qr} = \left\| a_{jh}^{qr} \right\|_{j,h=1}^{m}, \qquad a_{jh}^{qr} \in \mathbb{C},$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{|s| \le 2l} B_s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}}$$

— матричний еліптичний оператор,

$$B_s = \left\| b_{jh}^{s} \right\|_{j,h=1}^{m}, \qquad b_{jh}^{s} \in \mathbb{C}.$$

Припустимо, що

$$A \equiv \det A_{00} \ne 0. \tag{3}$$

Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ на функції $f(t, x)$ та $u(t, x)$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ikx), \tag{4}$$

де

$$u_k(t) = \mathrm{col}\left(u_{1k}(t), \ldots, u_{mk}(t)\right).$$

Нехай вектор-функція $f(t,x)$ розвивається в ряд Фур'є вигляду

$$f(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} f_k(t)\exp(ikx),$$

де

$$f_k(t) = (2\pi)^{-p}\int_{\Omega} f(t,x)\exp(-ikx)\,dx,$$

$$f_k(t) = \mathrm{col}\left(f_{1k}(t), \ldots, f_{mk}(t)\right).$$

Тоді кожна з вектор-функцій $u_k(t)$ є розв'язком крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$L(ik)u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{|s|\leq\omega} A_{sr}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}u_k^{(2r)}(t) = f_k(t), \tag{5}$$

$$\begin{gathered} U_{q+1}(u_k) \equiv u_k^{(2q)}(0) = 0, \quad U_{n+q+1}(u_k) \equiv u_k^{(2q)}(T) = 0, \\ q = 0, 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{6}$$

Надалі вважатимемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$

$$\det L(ik) \equiv \det\left[\sum_{|s|\leq 2l} B_s(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\right] \neq 0 \tag{7}$$

і C_j, $j = 1, \ldots, 20$, — додатні сталі, які не залежать від k.

Лема 1. *Існують сталі C_1 і $K(C_1)$ такі, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K(C_1)$, справджується оцінка*

$$\det L(ik) \geq C_1|k|^{2lm}. \tag{8}$$

Доведення леми 1 базується на еліптичності оператора L і здійснюється за схемою доведення леми 1 із [4].

Нехай для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j \equiv \lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, mn$, рівняння

$$\begin{gathered} \Delta^*(\lambda) \equiv \det\left[\sum_{|s|\leq 2l} B_s(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\lambda^n + \right. \\ \left. + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{|s|\leq\omega} A_{sr}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\lambda^r\right] = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

є різними; із умов (3) і (7) випливає, що вони відмінні від нуля.

Із оцінок коренів полінома через коефіцієнти [7, с. 102], леми 1 та умови (7) випливає така оцінка для коренів полінома (9):

$$|\lambda_j| \leq C_2|k|^{\mu}, \quad \mu = m(\omega - 2l), \quad j = 1, \ldots, mn. \tag{10}$$

Позначимо через N_j номер такого рядка у визначнику $\Delta^*(\lambda_j)$, не всі алгебраїчні доповнення елементів якого дорівнюють нулю. Тоді фундаментальна система розв'язків системи рівнянь

$$L(ik)u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le\omega} A_{sr}(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p} u_k^{(2r)}(t) = 0 \tag{11}$$

зображається у вигляді

$$u_{kj}(t) = \varphi(\lambda_j)\exp(\gamma_j t), \qquad u_{k,mn+j}(t) = \varphi(\lambda_j)\exp(-\gamma_j t),$$

де

$$\gamma_j \equiv \sqrt{|\lambda_j|}\exp(i\arg\lambda_j/2), \qquad \varphi(\lambda_j) = \mathrm{col}(\varphi_{1j},\dots,\varphi_{mj}),$$

$$j = 1,\dots,mn,$$

φ_{qj} — алгебраїчні доповнення елемента, що стоїть на перетині N_j-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta^*(\lambda_j)$. При цьому справедливі такі оцінки:

$$\left|\varphi_{qi}\right| \le C_3|k|^{\theta_1}, \qquad q = 1,\dots,m, \qquad j = 1,\dots,mn, \tag{12}$$

де

$$\theta_1 = (m-1)(\max(2l,\omega) + n\max(0, m(\omega-2l))).$$

Легко бачити, що матриці

$$\begin{gathered} Y_{kj}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1+m(j-1)}\exp(\gamma_{1+m(j-1)}t) & \dots & \varphi_{1,jm}\exp(\gamma_{jm}t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1+m(j-1)}\exp(\gamma_{1+m(j-1)}t) & \dots & \varphi_{m,jm}\exp(\gamma_{jm}t) \end{pmatrix}, \\ Y_{k,n+j}(t) = Y_{kj}(-t), \qquad j = 1,\dots,n, \end{gathered} \tag{13}$$

утворюють систему $2n$ лінійно незалежних розв'язків однорідного матричного диференціального рівняння

$$\sum_{|s|\le 2l} B_s(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p} Y_k^{(2n)}(t) + $$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s|\le\omega} A_{sr}(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p} Y_k^{(2r)}(t) = 0. \tag{14}$$

Відомо [8], що однорідна крайова задача (11), (6) має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta(k) \equiv \det\left\| U_q Y_{kj}(t) \right\|_{q,j=1}^{2n} = 0.$$

Визначник $\Delta(k)$ факторизується у вигляді

$$\Delta(k) = B^2(k)\prod_{j=1}^{mn}\left(\exp(\gamma_j T) - \exp(-\gamma_j T)\right), \tag{15}$$

де

$$B(k) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1,mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{m,mn} \\ \varphi_{11}\gamma_1^2 & \cdots & \varphi_{1,mn}\gamma_{mn}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m1}\gamma_1^2 & \cdots & \varphi_{m,mn}\gamma_{mn}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{11}\gamma_1^{2n-2} & \cdots & \varphi_{1,mn}\gamma_{mn}^{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m1}\gamma_1^{2n-2} & \cdots & \varphi_{m,mn}\gamma_{mn}^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ $B(k) \neq 0$, оскільки $B(k)$ є множником у виразі для визначника Вронського

$$W_k(t) = \det \left\| Y_{kq}^{(2n-j)}(t) \right\|_{q,\, j=1}^{2n}$$

системи розв'язків (13), який відмінний від нуля [8].

Позначимо $\theta_2 = \max(2l, \omega)$. На підставі формули (15) отримуємо таке твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 2.1 із [6] (розд. 3).

Теорема 1. *Для единості розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\overline{C}^{(2n,\theta_2)}(\overline{D})$ *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad 1 - \exp(2\gamma_j T) \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, mn.$$

2. Нехай розв'язок задачі (1), (2) єдиний. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдина матриця Гріна

$$G_k(t,\tau) = \left\| g_{kjr}(t,\tau) \right\|_{j,\, r=1}^{m}$$

задачі (11), (6), за допомогою якої розв'язок задачі (5), (6) зображується формулою

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

У квадраті

$$K_T = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t, \tau \leq T\},$$

крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, елементи матриць $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, визначаються формулами

$$g_{kjr}(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2B(k)} \sum_{q=1}^{mn} (-1)^{q+r} \varphi_{jq} B_{nm-r+1,\, q}(k) \gamma_q^{-1} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\delta,\, p=1}^{mn} \Big((-1)^{r+s+\nu} \varphi_{jp} \varphi_{\nu\delta} \gamma_\delta^{2s-3} \big(\operatorname{sh}(\gamma_\delta \tau) \operatorname{sh}(\gamma_p (t-T)) \big) +$$
$$+ \operatorname{sh}(\gamma_\delta(\tau - T)) \operatorname{sh}(\gamma_p t) \big) \Big) \left(2B^2(k) B^{-1}_{(s-1)m+\nu,\, p}(k) B^{-1}_{nm-r+1,\, \delta}(k) \operatorname{sh}(\gamma_p T) \right)^{-1}, \tag{17}$$

де $B_{rq}(k)$ — визначник, отриманий із $B(k)$ шляхом викреслювання r-го рядка та q-го стовпця. На стороні $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата K_T функції $g_{kjr}(t, \tau)$ довизначуємо за неперервністю справа (зліва). Розв'язок задачі (1), (2) формально зображується у вигляді векторного ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau \exp(ikx). \tag{18}$$

Ряд (18), взагалі, є розбіжним, оскільки модулі виразів $\operatorname{sh}(\gamma_q T)$, $q = 1, \ldots, mn$, при $m \geq 2l$ та $\gamma_j(k)$, $B(k)$ можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому розв'язність задачі (1), (2) пов'язана з проблемою малих знаменників.

При дослідженні існування розв'язку задачі (1), (2) будемо розглядати 3 випадки: 1) $\omega < 2l$, 2) $\omega = 2l$, 3) $\omega > 2l$.

1. Нехай $\omega < 2l$. У цьому випадку оцінки (10), (12) набирають вигляду

$$\left|\lambda_j\right| \leq C_2 |k|^{-m(2l-\omega)}, \qquad \left|\varphi_{qj}\right| \leq C_3 |k|^{2l(m-1)}. \tag{19}$$

Лема 2. *Для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справедлива оцінка*

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\gamma_j t}{\operatorname{sh}\gamma_j T}\right| \leq C_4. \tag{20}$$

Доведення. Використовуючи елементарну нерівність

$$\sin x \geq 2x/\pi,$$

яка справджується при $x \in [0, \pi/2]$, і враховуючи, що

$$\left|\operatorname{Im}\gamma_j\right| \leq \sqrt{\left|\lambda_j\right|} \leq \sqrt{C_2 |k|^{-1}},$$

отримуємо, що для всіх k, $|k| > C_2(T/\pi)^2$, справджується оцінка

$$\left|\sin(T \operatorname{Im}\gamma_j)\right| \geq \frac{2}{\pi} T \left|\operatorname{Im}\gamma_j\right| = \frac{2T}{\pi} \sqrt{\left|\lambda_j\right|} \left|\sin\frac{\arg\lambda_j}{2}\right|. \tag{21}$$

Із формули

$$\left|\exp(T \operatorname{Re}\gamma_j) - \exp(-T \operatorname{Re}\gamma_j)\right| = 2\left(\left|T \operatorname{Re}\gamma_j\right| + \frac{\left|T \operatorname{Re}\gamma_j\right|^3}{3!} + \ldots\right) \tag{22}$$

одержуємо

$$2\left|\operatorname{sh}(T \operatorname{Re}\gamma_j)\right| \geq 2T\left|\operatorname{Re}\gamma_j\right| = 2T\sqrt{\left|\lambda_j\right|}\left|\cos\frac{\arg\lambda_j}{2}\right|. \tag{23}$$

Покладаючи в рівності

$$|\operatorname{sh}\alpha| = \sqrt{(\exp(\operatorname{Re}\alpha) - \exp(-\operatorname{Re}\alpha))^2 + 4\sin^2(\operatorname{Im}\alpha)}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{24}$$

$\alpha = \gamma_j T$, на основі оцінок (21), (23) маємо

$$\left|\operatorname{sh}\gamma_j T\right| \geq \max\left(2\left|\sin T \operatorname{Im}\gamma_j\right|, \left|\exp(T \operatorname{Re}\gamma_j) - \exp(-T \operatorname{Re}\gamma_j)\right|\right) \geq$$
$$\geq \frac{4T}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left|\lambda_j\right|}. \tag{25}$$

На основі формул (22), (24) та формули для суми геометричної прогресії отримуємо, що для всіх k, $|k| > 4C_2T^2$, справджується нерівність

$$\left|\operatorname{sh}(t\gamma_j)\right| \le 4t\left|\operatorname{Im}\gamma_j\right| + 2\left|t\operatorname{Re}\gamma_j\right|\left(1 + \frac{\left|t\operatorname{Re}\gamma_j\right|^2}{3!} + \frac{\left|t\operatorname{Re}\gamma_j\right|^4}{5!} + \ldots\right) \le$$

$$\le 4T\sqrt{\left|\lambda_j\right|} + 2T\sqrt{\left|\lambda_j\right|}\frac{1}{3!}\left|3! + \frac{\left|t\operatorname{Re}\gamma_j\right|^2}{1-\left|t\operatorname{Re}\gamma_j\right|^2}\right| \le$$

$$\le \sqrt{\left|\lambda_j\right|}\,T\left(4 + \frac{7}{3}\right) \le \frac{19}{3}T\sqrt{\left|\lambda_j\right|}. \tag{26}$$

Із (25), (26) одержуємо

$$\frac{\left|\operatorname{sh}(\gamma_j t)\right|}{\left|\operatorname{sh}(\gamma_j T)\right|} \le C_4.$$

Теорема 2. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі* (1), (2) *і існують сталі* C_5, C_6, α_1, α_2 *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$\left|\gamma_j(k)\right| \ge C_5|k|^{-\alpha_1}, \qquad j = 1, \ldots, mn, \tag{27}$$

$$|B(k)| \ge C_6|k|^{-\alpha_2}. \tag{28}$$

Якщо

$$f \in \overline{C}^{(0,h_1)}(\overline{D}), \qquad h_1 > h_1^* + 2n + 2l + p,$$

де

$$h_1^* = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4lmn(m-1) + m(2l-\omega)(mn(n-1) - n + 1),$$

то існує розв'язок задачі (1), (2) *з простору* $\overline{C}^{(2n,2l)}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від* $f(t,x)$ *і зображається рядом* (18).

Доведення. Із формули (17), оцінок (19), (27), (28) та з леми 2 знаходимо

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^z}{\partial t^z}\int_0^T\sum_{r=1}^{m} g_{kjr}(t,\tau)f_{rk}(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le C_7|k|^{h_1^*+z}\sum_{r=1}^{m}\max_{0\le t\le T}|f_{rk}(t)|. \tag{29}$$

За умов теореми

$$\max_{0\le t\le T}|f_{rk}(t)| \le C_8|k|^{-h_1^*-2n-2l-p-\delta}\|f_r\|_{C^{(0,h_1)}(\overline{D})}. \tag{30}$$

Із формули (18) та оцінок (29), (30) отримуємо оцінку для норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\|u\|_{\overline{C}^{(2n,2l)}(\overline{D})} = \sum_{j=1}^{m}\|u_j\|_{C^{(2n,2l)}(\overline{D})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{|s| \le 2l,\, s_0 \le 2n} \max_{(t,x)\in\overline{D}} \left| \frac{\partial^{|s^*|} u_j(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{m} \sum_{s_0=0}^{2n} \sum_{|s| \le 2l} \sum_{|k| \ge 0} \max_{0 \le t \le T} \left| \frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}} \int_0^T \sum_{r=1}^{m} g_{kjr}(t,\tau) f_{rk}(\tau) d\tau \right| \times$$

$$\times \max_{x\in\Omega} \left| \frac{\partial^{|s|} \exp(ikx)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| \le$$

$$\le C_9 \sum_{|k| \ge 0} |k|^{-p-\delta_1} \sum_{r=1}^{m} \| f_r \|_{C^{(0,h_1)}(\overline{D})} \le C_{10} \| f \|_{\overline{C}^{(0,h_1)}(\overline{D})}.$$

Із останньої нерівності випливає доведення теореми.

2. Нехай $\omega = 2l$.

Теорема 3. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі* (1), (2) *і існують сталі* $C_5, C_6, C_{15}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *такі, що для всіх* (*крім скінченного числа*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності* (27), (28) *та оцінки*

$$\left| \operatorname{sh}(\gamma_j T) \right| \ge C_{11} |k|^{-\alpha_3}, \quad j = 1, \ldots, mn. \tag{31}$$

Якщо

$$f \in \overline{C}^{(0,h_2)}(\overline{D}), \quad h_2 > h_2^* + 2n + 2l + p,$$

де

$$h_2^* = 4lmn(m-1) + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3,$$

то існує розв'язок задачі (1), (2) *з простору* $\overline{C}^{(2n,2l)}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від* f *і зображається рядом* (18).

Доведення здійснюється за схемою доведення теореми 2.

3. Нехай $\omega > 2l$. У цьому випадку при дослідженні розв'язності задачі (1), (2) будемо використовувати такі простори: $\overline{A}_\delta^\gamma(\Omega)$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$, — простір 2π-періодичних по $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних вектор-функцій

$$\varphi(x) = \operatorname{col}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)),$$

де

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k| \ge 0} \varphi_{jk} \exp(ikx), \quad j = 1, \ldots, m,$$

з нормою

$$\| \varphi \|_{\overline{A}_\delta^\gamma} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{|k| \ge 0} |\varphi_{rk}| \exp(\delta |k|^\gamma);$$

$\overline{C}\left([0,T], \overline{A}_\delta^\gamma(\Omega)\right)$ — простір 2π-періодичних по $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних вектор-функцій

$$u(t,x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp(ikx),$$

неперервних по t і таких, що для кожного $t \in [0,T]$ $u(t,x) \in \overline{A}_\delta^\gamma(\Omega)$,

$$\|u\|_{\overline{C}([0,T],\overline{A}^{\gamma}_{\delta})} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{|k|\geq 0} \max_{0\leq t\leq T} |u_{rk}(t)| \exp(\delta|k|^{\gamma}).$$

При $\omega > 2l$ оцінки (10), (12) набирають вигляду

$$\left|\lambda_j\right| \leq C_2|k|^{m(\omega-2l)}, \qquad \left|\varphi_{qj}\right| \leq C_3|k|^{(m-1)(\omega+nm(\omega-2l))}. \tag{32}$$

Теорема 4. *Нехай має місце єдиність розв'язку задачі* (1), (2) *і існують сталі* $C_5, C_6, C_{11}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності* (27), (28), (31). *Якщо* $f \in \overline{C}\left([0,T], \overline{A}^{\mu/2}_{\delta_1}\right)$, $\mu = m(\omega-2l)$, $\delta_1 > 2\sqrt{C_2}T$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\overline{C}^{(2n,\omega)}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від* f.

Доведення. Із формули (17) та оцінок (27), (28), (31), (32) маємо

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{\partial^z}{\partial t^z}\int_0^T \sum_{r=1}^{m} g_{kjr}(t,\tau) f_{kr}(\tau)d\tau\right| \leq$$

$$\leq C_{13}|k|^{h_3^z+z}\exp\left(2\sqrt{C_2}|k|^{\mu/2}T\right)\sum_{r=1}^{m}\max_{0\leq t\leq T}|f_{rk}(t)|, \tag{33}$$

$$h_3^z = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2mn(m-1) \times$$

$$\times (\omega + nm(\omega-2l)) + m(\omega-2l)(n-1)(mn-1).$$

Використовуючи елементарну нерівність

$$d^{\alpha} \leq C_{14}\exp(\rho d), \qquad C_{14} \equiv C_{14}(\alpha),$$

яка при $d > 0$ справджується для довільних $\alpha > 0$, $\rho > 0$, отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\|u\|_{\overline{C}^{(2n,\omega)}(\overline{D})} \leq C_{15}\sum_{r=1}^{m}\sum_{|k|\geq 0}\exp\left(\left(2\sqrt{C_2}T+\rho_1\right)|k|^{\mu/2}\right) \times$$

$$\times \max_{0\leq t\leq T}|f_{rk}(t)| \leq C_{16}\|f\|_{\overline{C}([0,T],\overline{A}^{\mu/2}_{\delta_1})}.$$

Із останньої нерівності випливає доведення теореми.

3. Виясними, коли виконуються нерівності (27), (28), (31). Позначимо через β_1 кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $s_1 + s_2 + \ldots + s_p \leq \omega$, а через β_2 — кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $s_1 + s_2 + \ldots + s_p \leq 2l$.

Зобразимо вільний член рівняння (9) у вигляді

$$P_0(k) = \sum_{\nu=0}^{\omega}\sum_{|s|=\nu} c_{\nu s}k_1^{ms_1}\ldots k_p^{ms_p} + i\sum_{\nu=0}^{\omega}\sum_{|s|=\nu} d_{\nu s}k_1^{ms_1}\ldots k_p^{ms_p}, \tag{34}$$

де

$$c_{\nu s} = (-1)^{\nu/2}\operatorname{Re}(\det A_{s0}), \qquad d_{\nu s} = (-1)^{\nu/2}\operatorname{Im}(\det A_{s0}),$$

$$\nu = 2j, \qquad j = 0, 1, \ldots, [\omega/2];$$

$$c_{\nu s} = (-1)^{(\nu-1)/2}\operatorname{Im}(\det A_{s0}), \qquad d_{\nu s} = (-1)^{(\nu-1)/2}\operatorname{Re}(\det A_{s0}),$$

$$\nu = 2j+1, \qquad j = 0, 1, \ldots, [(\omega-1)/2].$$

Нехай $c = (c_1, \ldots, c_{\beta_1}) \in \mathbb{R}^{\beta_1}$, $d = (d_1, \ldots, d_{\beta_1}) \in \mathbb{R}^{\beta_1}$ — вектори, складені відповідно із коефіцієнтів $c_{\nu s}$ та $d_{\nu s}$ полінома $P_0(k)$.

Теорема 5. *Нерівності* (27) *виконуються при* $\alpha_1 > (p + 2lm + m(\omega - 2l)(mn-1))/2$ *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{\beta_1}$*) векторів* c *і для довільного фіксованого* d *(або для майже всіх векторів* d *і для довільного фіксованого* c*) для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення. Із формули (34) отримуємо

$$|P_0(k)| \geq \max(|\operatorname{Re} P_0(k)|, |\operatorname{Im} P_0(k)|) \geq |\operatorname{Re} P_0(k)|.$$

Покажемо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\beta_1}$) векторів c виконується нерівність

$$|\operatorname{Re} P_0(k)| \geq |k|^{-p-\varepsilon}. \tag{35}$$

Позначимо через Ψ множину тих векторів c, які належать деякому β_1-вимірному паралелепіпеду $P_{\beta_1} = [a_1, b_1] \times P_{\beta_1 - 1}$, для яких нерівність

$$|\operatorname{Re} P_0(k)| < |k|^{-p-\varepsilon} \tag{36}$$

має нескінченне число розв'язків $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зафіксуємо k і $c_2, \ldots, c_{\beta_1}$. Тоді для $\Psi_k(c_2, \ldots, c_{\beta_1})$ — множини тих $c_1 \in [a_1, b_1]$, для яких виконується нерівність (36), справедлива оцінка

$$\operatorname{mes} \Psi_k(c_2, \ldots, c_{\beta_1}) < 2|k|^{-p-\varepsilon}. \tag{37}$$

Інтегруючи оцінку (37) по паралелепіпеду $P_{\beta_1 - 1}$, отримуємо, що міра множини $\Psi(k)$ тих векторів $c \in P_{\beta_1}$, для яких виконується нерівність (36), при фіксованому k задовольняє нерівність

$$\operatorname{mes} \Psi(k) < 2C_{17}|k|^{-p-\varepsilon},$$

де C_{17} — об'єм паралелепіпеда $P_{\beta_1 - 1}$. Оскільки ряд $\sum_{|k|>0} 2C_{17}|k|^{-p-\varepsilon}$ збіжний, то із леми 2.1 [6] (розд. 1) випливає, що $\operatorname{mes} \Psi = 0$, тобто для майже всіх $c \in P_{\beta_1}$ виконується нерівність (35). Враховуючи, що простір $\mathbb{R}^{\beta_1}$ можна покрити зліченною кількістю паралелепіпедів P_{β_1}, отримуємо, що нерівність (35) виконується для майже всіх $c \in \mathbb{R}^{\beta_1}$.

Використовуючи нерівності (19), (35), теорему Вієта та оцінку $\det L(ik) \leq C_{18}|k|^{2lm}$, одержуємо

$$|\gamma_j| = |\lambda_j|^{1/2} = \left(\frac{|P_0(k)|}{|\det L(ik)| \, |\lambda_1 \ldots \lambda_{j-1} \lambda_{j+1} \ldots \lambda_{mn}|} \right)^{1/2} \geq$$

$$\geq \frac{C_{19}|k|^{-(p+\varepsilon)/2}}{|k|^{lm}|k|^{-m(2l-\omega)(mn-1)/2}} \geq$$

$$\geq C_5|k|^{-(p+2lm+m(\omega-2l)(mn-1))/2-\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, mn.$$

Теорему доведено.

Розглянемо тепер визначник $B(k) \equiv P_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn})$, який є многочленом змінних λ_j степеня $mn(n-1)/2$ з коефіцієнтами, поліноміально залежними від μ_{jh}^{sr} ($\mu_{jh}^{sr} \equiv a_{jh}^{sr}$, $r = 0, \ldots, n-1$, $\mu_{jh}^{sn} \equiv b_{jh}^{s}$), причому степінь цих коефіцієнтів по μ_{jh}^{sr} не перевищує $mn(n-1)$.

Позначимо через $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{\beta_3})$ вектор, складений з усіх дійсних та уявних елементів матриць B_s, A_{sr}, що входять у систему (1), де $\beta_3 = 2m^2(n\beta_1 + \beta_2)$.

Теорема 6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{\beta_3}$*) векторів* $\bar{\mu}$ *нерівність* (28) *виконується при*

$$\alpha_2 > mn(mn!p(m(n+1) - (n+3)/2) + (mn! - 1)(\theta_1 + \mu(n-1)/2))$$

для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення. Позначимо

$$\Delta_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}) = \prod_{(j_1, \ldots, j_{mn})} P_1(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_{mn}}),$$

де добуток береться за всіма можливими перестановками чисел $1, \ldots, mn$. Очевидно, що Δ_1 є симетричним многочленом змінних $\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}$. За основною теоремою про симетричні функції [9] $\Delta_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn})$ зображується єдиним чином у вигляді полінома від елементарних симетричних функцій S_j, $j = 1, \ldots, mn$, тобто

$$\Delta_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}) = \Delta_2(S_1, \ldots, S_{mn}).$$

Тому Δ_2, а отже, і $\operatorname{Re}\Delta_2$, $\operatorname{Im}\Delta_2$ поліноміально залежать від коефіцієнтів рівняння (9). Зауважимо, що степінь полінома Δ_2 відносно μ_j не перевищує величини

$$\sigma_1 = (mn)!\, mn(m(n+1) - (n+3)/2).$$

Оцінимо тепер міру множини тих $\bar{\mu}$, для яких для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$\max\{|\operatorname{Re}\Delta_2(k)|, |\operatorname{Im}\Delta_2(k)|\} \le |\Delta_2(k)| < |k|^{\sigma} \tag{38}$$

для деякого значення $\sigma \in \mathbb{Z}$. Оскільки $B(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, то і $\Delta_2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Нехай $\operatorname{Re}\Delta_2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Тоді існує деяка похідна $\partial^{\bar{\sigma}} \operatorname{Re}\Delta_2(k) / \partial\mu_1^{\bar{\sigma}_1} \ldots \partial\mu_{\beta_3}^{\bar{\sigma}_{\beta_3}}$ за змінними μ_j, $j = 1, \ldots, \beta_3$, така, що $\left|\partial^{\bar{\sigma}} \operatorname{Re}\Delta_2(k) / \partial\mu_1^{\bar{\sigma}_1} \ldots \partial\mu_{\beta_3}^{\bar{\sigma}_{\beta_3}}\right| \ge 1$. Згідно з лемою Бореля – Кантеллі [10] та лемою 2.3 [6] (розд. 1) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\beta_3}$) векторів $\bar{\mu}$ виконується нерівність, протилежна до (38) при $\sigma < -p\sigma_1$:

$$|\Delta_2(k)| \ge |\operatorname{Re}\Delta_2(k)| \ge C_{20}|k|^{-p\sigma_1 - \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Враховуючи рівність

$$B(k) = P_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}) = \frac{\Delta_2(k)}{\prod\limits_{(j_1, \ldots, j_{mn}) \neq (1, \ldots, mn)} P(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_{mn}})}$$

та оцінки (10), (12), отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\beta_3}$) векторів $\bar{\mu}$ справедлива оцінка

$$|B(k)| \geq C_6 |k|^{-p\sigma_1 - (\theta_1 mn + mn(n-1)\mu/2)(mn! - 1) - \varepsilon}.$$

Теорему доведено.

Теорема 7. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *нерівності* (31) *виконуються при* $\alpha_3 > \mu p/2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Доведення. Позначимо через $d_j(k)$ ціле число, для якого

$$\left| T \operatorname{Im}\gamma_j / \pi - d_j(k) \right| \leq \frac{1}{2}, \quad j = 1, \ldots, mn.$$

Використовуючи лему 2.4 із [6] (розд. 1) та оцінку

$$\left|\operatorname{sh}(\gamma_j T)\right| \geq \left|\sin(\operatorname{Im}\gamma_j T)\right| \geq 2\left|T \operatorname{Im}\gamma_j / \pi - d_j(k)\right| \geq$$

$$\geq \frac{2T|k|^{\mu/2}}{\pi} \left| \frac{\operatorname{Im}\gamma_j}{|k|^{\mu/2}} - \frac{d_j(k)\pi}{T|k|^{\mu/2}} \right|,$$

отримуємо, що для майже всіх чисел T виконується нерівність

$$\left|\operatorname{sh}(\gamma_j T)\right| \geq \frac{2T}{\pi} |k|^{\mu/2} |k|^{\mu/2(-p-1-\varepsilon_1)} \geq C_{11} |k|^{-\mu p/2 - \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

1. *Білусяк Н. І.* Крайова задача для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Тези доп. міжнар. наук. конф. „Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1 – 5 жовтня 2001р.). – Київ, 2001. – С. 19.
2. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795 – 802.
3. *Комарницька Л. І.* Задача типу Діріхле для системи диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Тези доп. міжнар. наук. конф. „Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1 – 5 жовтня 2001р.). – Київ, 2001. – С. 73.
4. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197 – 1208.
5. *Пташник Б. И.* Задача типа Дирихле для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 18 – 23.
6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
7. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
9. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
10. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.

Одержано 20.08.2001