УДК 519. 21

М. П. Моклячук, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О МИНИМАКСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрена задача оптимального линейного оценивания преобразования $A\xi = \int_0^\infty \langle a(t), \xi(-t)\rangle dt$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве по наблюдениям процесса $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \le 0$. Получены формулы для вычисления величины ошибки и спектральной характеристики оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ при заданных спектральных плотностях процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$. Найдены минимаксные спектральные характеристики и наименее благоприятные спектральные плотности для различных классов плотностей.

Розглянуто задачу оптимального лінійного оцінювання перетворення $A\xi = \int_0^\infty \langle a(t), \xi(-t)\rangle\, dt$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, який набуває значень в гільбертовому просторі, за даними спостережень процесу $\xi(t) + \eta(t)$ при $t \le 0$. Одержано формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки перетворення $A\xi$ при заданих спектральних щільностях процесів $\xi(t)$, $\eta(t)$. Знайдено мінімаксні спектральні характеристики та найменш сприятливі щільності для різних класів щільностей.

Обозначим через X сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и ортонормированным базисом $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ Случайный процесс $\xi(t)$, принимающий значения в X, будет стационарным, если его компоненты $\xi_k(t) = \langle \xi(t), e_k\rangle$, $k = 1, 2, \dots$, непрерывны в среднеквадратическом смысле и удовлетворяют условиям [1, 2]

$$M\,\xi_k(t) = 0,\ M\,\|\xi(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M\,|\xi(t)|^2 < \infty,$$

$$M\,\xi_k(t)\,\overline{\xi}_j(s) = \langle B\,(t-s)e_k, e_j\rangle; \quad k, j = 1, 2, \dots.$$

Корреляционная функция $B\,(t)$ процесса $\xi(t)$ — операторнозначная функция в X. Стационарный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda)$, если его корреляционную функцию $B\,(t)$ можно представить в виде

$$\langle B\,(t)\,e_k, e_j\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\langle f(\lambda)\,e_k, e_j\rangle\, d\lambda; \quad k, j = 1, 2, \dots.$$

Для почти всех λ спектральная плотность $f(\lambda)$ — ядерный оператор с интегрируемой ядерной нормой. Регулярный стационарный процесс $\xi(t)$ допускает каноническое разложение скользящего среднего [1]

$$\xi(t) = \sum_{m=1}^{M_1}\int_{-\infty}^{t}\varphi_m(t-s)\,d\,\zeta_m(s), \tag{1}$$

где $\zeta_m(s)$, $m = \overline{1, M_1}$, — взаимно ортогональные стационарные процессы с некоррелированными приращениями, M_1 — кратность процесса $\xi(t)$, $\varphi_m(t)$, $m = \overline{1, M_1}$, — функции в X такие, что

$$\sum_{m=1}^{M_1}\int_0^{\infty}\|\varphi_m(t)\|^2\,dt = M\,\|\xi(t)\|^2 < \infty.$$

Спектральная плотность $f(\lambda)$ регулярного процесса $\xi(t)$ допускает каноническую факторизацию

$$f_{k,j}(\lambda) = \langle f(\lambda)\, e_k, e_j\rangle = \sum_{m=1}^{M_1} \varphi_{km}(\lambda)\overline{\varphi}_{jm}(\lambda),$$

$$\varphi_{km}(\lambda) = \int_0^{\infty} \varphi_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt, \quad \varphi_{km}(t) = \langle \varphi_m(t)\, e_k\rangle. \tag{2}$$

Это означает, что матрицу $f(\lambda) = \{f_{kj}(\lambda)\}$ можно представить в виде произведения двух матриц $f(\lambda) = \Phi(\lambda)\overline{\Phi}'(\lambda)$, где $\Phi(\lambda) = \{\varphi_{km}(\lambda)\}$, $m = \overline{1, M_1}$; $k = 1, 2, \ldots$.

Если стационарный процесс $\eta(t)$ регулярен, то его спектральная плотность $g(\lambda)$ допускает каноническую факторизацию

$$g_{k,j}(\lambda) = \langle g(\lambda)\, e_k, e_j\rangle = \sum_{m=1}^{M_2} \psi_{km}(\lambda)\overline{\psi}_{jm}(\lambda),$$

$$\psi_{km}(\lambda) = \int_0^{\infty} \psi_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt, \quad \psi_{km}(t) = \langle \psi_m(t), e_k\rangle, \tag{3}$$

где M_2 — кратность процесса $\eta(t)$. Матрицу $g(\lambda) = \{g_{kj}(\lambda)\}$, $k, j = 1, 2, \ldots$, можно представить в виде произведения $g(\lambda) = \Psi(\lambda)\overline{\Psi}'(\lambda)$, где $\Psi(\lambda) = \{\psi_{km}(\lambda)\}$, $m = \overline{1, M_2}$; $k = 1, 2, \ldots$.

Спектральная плотность регулярного процесса $\xi(t) + \eta(t)$ допускает каноническую факторизацию

$$\langle f(\lambda) + g(\lambda)\, e_k, e_j\rangle = \sum_{m=1}^{M} d_{km}(\lambda)\overline{d}_{jm}(\lambda),$$

$$d_{km}(\lambda) = \int_0^{\infty} d_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt, \quad d_{km}(t) = \langle d_m(t), e_k\rangle, \tag{4}$$

где M — кратность процесса $\xi(t) + \eta(t)$. Матрицу $f(\lambda) + g(\lambda)$, можно представить в виде $f(\lambda) + g(\lambda) = D(\lambda)\overline{D}'(\lambda)$, где $D(\lambda) = \{d_{km}(\lambda)\}$, $m = \overline{1, M}$; $k = 1, 2, \ldots$. Регулярный процесс $\xi(t) + \eta(t)$ допускает каноническое разложение скользящего среднего

$$\xi(t) + \eta(t) = \sum_{m=1}^{M} \int_{-\infty}^{t} d_m(t-s)\, d\,\theta_m(s), \tag{5}$$

где $\theta_m(s)$, $m = \overline{1, M}$, — взаимно ортогональные случайные процессы с некоррелированными приращениями такие, что подпространство $H_\theta(t)$, порожденное величинами $\theta_m(s)$, $m = \overline{1, M}$, $s \le t$, в пространстве $H = L_2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, совпадает с подпространством $H_{\xi+\eta}(t)$, порожденным в H величинами $\xi(s) + \eta(s)$, $s \le t$. Будем предполагать, что функция $a(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\infty} \|a(t)\|\, dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} t\, \|a(t)\|^2\, dt < \infty. \tag{6}$$

Если заданы спектральные плотности $f(\lambda), g(\lambda)$ процессов $\xi(t), \eta(t)$ и процессы $\eta(t)$, $\xi(t)+\eta(t)$ регулярны, то величину ошибки линейной оценки $\hat{A}\xi$ преобразования $A\xi$ по наблюдениям $\xi(s)+\eta(s)$ при $s \le 0$ будем вычислять по формуле

$$\Delta(h; f, g) = M\|A\xi - \hat{A}\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} [(D_k(a_k - h_{kk}), (a_k - h_{kk}))_{L_2} -$$

$$-(\Psi_k(a_k - h_{kk}), a_k)_{L_2} - (a_k - h_{kk}, \Psi_k a_k)_{L_2} + (\Psi_k a_k, a_k)_{L_2}],$$

где $(a, h)_{L_2}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2[0, \infty)$, матрица $h(\lambda) = \{h_{kj}(\lambda)\}$, $k, j = 1, 2, \ldots$, — спектральная характеристика оценки $\hat{A}\xi$; $h(\lambda) = \int_0^\infty h(t) e^{-it\lambda} dt$. Операторы D_k, Ψ_k в пространстве $L_2[0, \infty)$ задаются ядрами

$$D_k(u, v) = \sum_{m=1}^{M} \int_{-\infty}^{\min(u,v)} d_{km}(u-s)\, \overline{d}_{km}(v-s)\, ds,$$

$$\Psi_k(u, v) = \sum_{m=1}^{M_2} \int_{-\infty}^{\min(u,v)} \psi_{km}(u-s)\, \overline{\psi}_{km}(v-s)\, ds.$$

Спектральная характеристика $h(f, g)$ оптимальной оценки преобразования $A\xi$ определяется условием

$$\Delta(f, g) = \Delta(h(f, g); f, g) = \min_{h \in L_2^-(f+g)} \Delta(h; f, g),$$

где $L_2^-(f+g)$ — подпространство, порожденное матрицами вида

$$h(\lambda) = \int_0^\infty h(t) e^{-it\lambda} dt, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h_{kk}(\lambda)|^2 \langle (f(\lambda) + g(\lambda))\, e_k, e_k \rangle\, d\lambda < \infty.$$

Величина $\Delta(h; f, g)$ достигает минимума при

$$a_k(t) - h_k(t) = (D_k^{-1} \Psi_k a_k)(t) = (B_k \Psi_k a_k)(t),$$

а сам минимум равен

$$\Delta(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k^g, a_k)_{L_2} - (B_k c_k^g, c_k^g)_{L_2}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k^g, a_k)_{L_2} - \sum_{m=1}^{M} (C_k^g b_{mk}, C_k^g b_{mk})_{L_2}], \tag{7}$$

где $c_k^g(t) = (\Psi_k a_k)(t)$. Функции $b_{mk}(t)$ задают разложение функций $b_{mk}(\lambda) = \int_0^\infty b_{mk}(t) e^{-it\lambda} dt$, которые находятся из системы уравнений

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{mp}(\lambda)\, d_{pj}(\lambda) = \delta_{mj}, \quad m, j = \overline{1, M}. \tag{8}$$

Операторы B_k задаются ядром

$$B_k(u, v) = \sum_{m=1}^{M} \int_{-\infty}^{\min(u,v)} b_{mk}(u-s)\, \overline{b}_{mk}(v-s)\, ds,$$

а оператор C_k^g определяется соотношением

$$(C_k^g b)(t) = \int_0^{\infty} c_k^g(t+u)\, \overline{b}(u)\, du.$$

Спектральную характеристику $h(f, g)$ оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ можно вычислить по формуле

$$h_{kj}(f, g) = A_k(\lambda)\, \delta_{kj} - \sum_{m=1}^{M} r_{km}^g(\lambda)\, b_{mp}(\lambda), \tag{9}$$

$$r_{km}^g(\lambda) = \int_0^{\infty} (C_k^g b_{mk})(t)\, e^{-it\lambda}\, dt. \tag{10}$$

Если заданы спектральные плотности $f(\lambda), g(\lambda)$ и процессы $\eta(t)$, $\xi(t) + \eta(t)$ регулярны, то величину ошибки и спектральную характеристику оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ можно вычислить по формулам

$$\Delta(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(c_k^f, a_k)_{L_2} - \sum_{m=1}^{M} (C_k^f b_{mk}, C_k^f b_{mk})_{L_2} \right], \tag{11}$$

$$h_{kj}(f, g) = \sum_{m=1}^{M} r_{km}^f(\lambda)\, b_{mj}(\lambda), \tag{12}$$

$$r_{km}^g(\lambda) = \int_0^{\infty} (C_k^f b_{mk})(t)\, e^{-it\lambda}\, dt, \tag{13}$$

где $C_k^f(t) = (\Phi_k a_k)(t)$, а операторы Φ_k, C_k^f определены так же, как Ψ_k, C_k^g.

Лемма 1. *Если выполняются условия* (6), *то величину ошибки* $\Delta(f, g)$ *оптимальной линейной оценки преобразования* $A\xi$ *стационарного случайного процесса* $\xi(t)$ *со спектральной плотностью* $f(\lambda)$ *по наблюдениям регулярного процесса* $\xi(s) + \eta(s)$ *при* $s \le 0$, *где* $\eta(s)$ — *некоррелированный с* $\xi(s)$ *регулярный процесс с плотностью* $g(\lambda)$, *можно вычислить по формулам* (7), (3), (4), (8). *Спектральную характеристику* $h(f, g)$ *оптимальной линейной оценки преобразования* $A\xi$ *можно вычислить по формулам* (9), (10), (3), (4), (8).

Лемма 2. *Если выполняются условия* (6), *то величину ошибки* $\Delta(f, g)$ *оптимальной линейной оценки преобразования* $A\xi$ *регулярного стационарного процесса* $\xi(t)$ *с плотностью* $f(\lambda)$ *по наблюдениям регулярного процесса* $\xi(s) + \eta(s)$ *при* $s \le 0$, *где* $\eta(s)$ — *некоррелированный с* $\xi(s)$ *стационарный процесс с плотностью* $g(\lambda)$, *можно вычислить по формулам* (11), (12), (4), (8). *Спектральную характеристику оптимальной линейной оценки преобразования* $A\xi$ *можно вычислить по формулам* (12), (13), (2), (4), (8)..

Формулами (1) – (13) можно пользоваться, если известны спектральные плотности $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ стационарных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$, допускающие каноническую факторизацию (2), (4) или (3), (4). В случае, когда задается лишь множество $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_f \times \mathfrak{D}_g$ возможных плотностей, применяют минимаксный подход к задачам оценивания неизвестных значений случайных процессов и их преобразований [3 – 8]. Наименее благоприятные в $\mathfrak{D}$ спектральные плотности $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ определяются условием $\Delta(h(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f,g)\in\mathfrak{D}} \Delta(h(f, g); f, g)$.

Лемма 3. *Спектральные плотности $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ будут наименее благоприятными в классе $\mathfrak{D}$ при оптимальном линейном оценивании преобразования $A\xi$, если они допускают каноническую факторизацию* (3), (4), *где функции $\psi_{km}(t)$, $d_{km}(t)$ определяют решение задачи на условный экстремум*

$$\Delta(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(c_k^g, a_k)_{L_2} - \sum_{m=1}^{M} \left\| C_k^g b_{mk} \right\|_{L_2}^2 \Big] \to \sup,$$
$$g(\lambda) = \Psi(\lambda)\overline{\Psi}'(\lambda) \in \mathfrak{D}_g,\ f(\lambda) = D(\lambda)\overline{D}'(\lambda) - \Psi(\lambda)\overline{\Psi}'(\lambda) \in \mathfrak{D}_f. \tag{14}$$

Здесь $\Psi(\lambda)$ — матрица с элементами $\psi_{km}(\lambda) = \int_0^\infty \psi_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt$, $m = \overline{1, M_2}$; $k = 1, 2, \ldots$; $D(\lambda)$ — матрица с элементами $d_{km}(\lambda) = \int_0^\infty d_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt$, $m = \overline{1, M}$; $k = 1, 2, \ldots$; функции $d_{km}(\lambda)$, $b_{mp}(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (8).

Лемма 4. *Спектральные плотности $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ будут наименее благоприятными в классе $\mathfrak{D}$ при оптимальном линейном оценивании преобразования $A\xi$, если они допускают каноническую факторизацию* (2), (4), *где функции $\varphi_{km}(t)$, $d_{km}(t)$ определяют решение задачи на условный экстремум*

$$\Delta(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(c_k^f, a_k)_{L_2} - \sum_{m=1}^{M} \left\| C_k^f b_{mk} \right\|_{L_2}^2 \Big] \to \sup,$$
$$f(\lambda) = \Phi(\lambda)\overline{\Phi}'(\lambda) \in \mathfrak{D}_f,\ g(\lambda) = D(\lambda)\overline{D}'(\lambda) - \Phi(\lambda)\overline{\Phi}'(\lambda) \in \mathfrak{D}_g. \tag{15}$$

Здесь $\Phi(\lambda)$ — матрица с элементами $\varphi_{km}(\lambda) = \int_0^\infty \varphi_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt$, $m = \overline{1, M_1}$; $k = 1, 2, \ldots$; $D(\lambda)$ — матрица с элементами $d_{km}(\lambda) = \int_0^\infty d_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt$, $m = \overline{1, M}$; $k = 1, 2, \ldots$; функции $d_{km}(\lambda)$, $b_{km}(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (8).

В случае, когда одна из плотностей задана, задачи на условный экстремум (14), (15) — это задачи на экстремум лишь по переменной $b_{km}(t)$, $m = \overline{1, M}$; $k = 1, 2, \ldots$.

Лемма 5. *Спектральная плотность $f^0(\lambda)$ будет наименее благоприятной в классе $\mathfrak{D}_f$ при заданной регулярной плотности $g(\lambda)$, если плотность $f^0(\lambda) + g(\lambda)$ допускает каноническое разложение* (4), *где функции $d_{km}(t)$ определяют решение задачи на условный экстремум*

$$\sum_{m=1}^{M} \left\| C_k^g b_{mk} \right\|_{L_2}^2 \to \inf,\ f(\lambda) = D(\lambda)\overline{D}'(\lambda) - g(\lambda) \in \mathfrak{D}_f. \tag{16}$$

Здесь $D(\lambda) = \{d_{km}(\lambda)\}$, $d_{km}(\lambda) = \int_0^\infty d_{km}(t)\, e^{-it\lambda}\, dt$, $m = \overline{1, M}$; $k = 1, 2, \ldots$; функции $d_{km}(\lambda)$, $b_{mj}(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (8).

Лемма 6. *Спектральная плотность $g^0(\lambda)$ будет наименее благоприятной в классе $\mathfrak{D}_g$ при заданной регулярной плотности $f(\lambda)$, если плотность $f(\lambda)+g^0(\lambda)$ допускает каноническую факторизацию* (4), *где функции $d_{km}(t)$ определяют решение задачи на условный экстремум*

$$\sum_{m=1}^{M}\left\|C_k^f b_{mk}\right\|_{L_2}^2 \to \inf,\ g(\lambda) = D(\lambda)\overline{D}'(\lambda)-f(\lambda)\in\mathfrak{D}_g. \tag{17}$$

Здесь $D(\lambda)=\{d_{km}(\lambda)\}$, $d_{km}(\lambda)=\int_0^\infty d_{km}(t)e^{-it\lambda}dt$, $m=\overline{1,M}$; $k=1,2,\ldots$; функции $d_{km}(\lambda)$, $b_{mj}(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений (8).

Минимаксная (робастная) спектральная характеристика $h^0(\lambda)$ оптимальной оценки преобразования $A\xi$ определяется соотношениями

$$h^0(\lambda)\in H_{\mathfrak{D}} = \bigcap_{(f,g)\in\mathfrak{D}} L_2^-(f+g),$$

$$\min_{h\in H_{\mathfrak{D}}}\ \sup_{(f,g)\in\mathfrak{D}}\Delta(h;f,g) = \sup_{(f,g)\in\mathfrak{D}}\Delta(h;f,g).$$

Наименее благоприятные спектральные плотности $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ и минимаксная спектральная характеристика $h^0(\lambda)$ образуют седловую точку функции $\Delta(h;f,g)$ на множестве $H_{\mathfrak{D}}\times\mathfrak{D}$:

$$\Delta(h;f^0,g^0)\ge\Delta(h^0;f^0,g^0)\ge\Delta(h^0;f,g)\quad\forall h\in H_{\mathfrak{D}},\quad\forall(f,g)\in\mathfrak{D}.$$

Эти соотношения выполняются, если $h^0=h(f^0,g^0)\in H_{\mathfrak{D}}$ и f^0, g^0 являются решениями задач на условный экстремум

$$\Delta(h(f^0,g^0);f^0,g^0) = \sup_{(f,g)\in\mathfrak{D}}\Delta(h(f^0,g^0);f,g), \tag{18}$$

где

$$\Delta(h(f^0,g^0);f,g) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|r_{km}^g(\lambda)\right|^2\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}b_{mp}(\lambda)\overline{b}_{mq}(\lambda)f_{pq}(\lambda)\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\left|r_{km}^f(\lambda)\right|^2\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}b_{mp}(\lambda)\overline{b}_{mq}(\lambda)g_{pq}(\lambda)\,d\lambda\right].$$

В этом соотношении функции $r_{km}^f(\lambda)$, $r_{km}^g(\lambda)$, $b_{mp}(\lambda)$ вычислены по формулам (10), (13), (8) при $f(\lambda)=f^0(\lambda)$, $g(\lambda)=g^0(\lambda)$. Пользуясь соотношением (18), можно найти наименее благоприятные плотности и минимаксные спектральные характеристики для конкретных классов $\mathfrak{D}$. Будем рассматривать эквивалентную задаче (18) задачу на безусловный экстремум в пространстве L_1 [9]

$$\Delta_{\mathfrak{D}}(f,g) = -\Delta(h(f^0,g^0);f,g)+\delta((f,g)\,|\,\mathfrak{D})\to\inf,$$

где $\delta((f,g)\,|\,\mathfrak{D})$ — индикаторная функция множества $\mathfrak{D}$. Решение $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ этой задачи характеризуется условием $0\in\partial\Delta_{\mathfrak{D}}(f^0,g^0)$, где $\partial\Delta_{\mathfrak{D}}(f^0,g^0)$ — субдифференциал выпуклого функционала $\Delta_{\mathfrak{D}}(f,g)$.

Рассмотрим задачу для множества спектральных плотностей

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_0\times\mathfrak{D}_v^u.$$

$$\mathfrak{D}_0 = \{ f(\lambda) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda \le P_1 \},$$

$$\mathfrak{D}_v^u = \{ g(\lambda) \mid v(\lambda) \le g(\lambda) \le u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle g(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda \le P_2 \},$$

где $v(\lambda)$, $u(\lambda)$ — заданные спектральные плотности. Спектральные плотности из класса $\mathfrak{D}_0$ задают случайные процессы $\xi(t)$, удовлетворяющие условию $M\,\|\xi(t)\|^2 \le P_1$, а класс $\mathfrak{D}_v^u$ описывает „полосовую" модель случайных процессов [3, 4]. Из условия $0 \in \partial \Delta_{\mathfrak{D}}(f^0, g^0)$ для такого множества $\mathfrak{D}$ найдем соотношения для определения функций $\varphi_{km}(t)$, $\psi_{km}(t)$, $d_{km}(t)$, которые задают факторизации (2) – (4) плотностей $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$, $f^0(\lambda) + g^0(\lambda)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} \left| \int_0^{\infty} (C_k^g b_{mk})(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 b_{mp}(\lambda) \bar{b}_{mq}(\lambda) = \alpha_{pq1}^{-1}, \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} \left| \int_0^{\infty} (C_k^f b_{mk})(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 b_{mp}(\lambda) \bar{b}_{mq}(\lambda) = \beta_{pq}^1(\lambda) + \beta_{pq}^2(\lambda) + \alpha_{pq2}^{-1}, \tag{20}$$

где $\beta_{pq}^1(\lambda) \le 0$ и $\beta_{pq}^1(\lambda) = 0$ при $f_{pq}^0(\lambda) > v_{pq}(\lambda)$; $\beta_{pq}^2(\lambda) \ge 0$ и $\beta_{pq}^2(\lambda) = 0$ при $f_{pq}^0(\lambda) < u_{pq}(\lambda)$.

Неизвестные константы α_{pq1}, α_{pq2} определяются из условий

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda = P_1; \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle g(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda = P_2. \tag{21}$$

Если регулярный процесс $\xi(t) + \eta(t)$ имеет кратность $M = 1$, то спектральная плотность $f(\lambda) + g(\lambda)$ допускает факторизацию $f_{pq}(\lambda) + g_{pq}(\lambda) = d_p(\lambda) \bar{d}_q(\lambda)$ и выполняется равенство $\sum_{m=1}^{M} b_{mp}(\lambda) \bar{b}_{mq}(\lambda) = (f_{pq}(\lambda) + g_{pq}(\lambda))^{-1}$. Поэтому из уравнений (19), (20) находим

$$f_{pq}^0(\lambda) + g_{pq}^0(\lambda) = \alpha_{pq1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} (C_k^g b_k)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2, \tag{22}$$

$$f_{pq}^0(\lambda) + g_{pq}^0(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} (C_k^f b_k)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 \left(\beta_{pq}^1(\lambda) + \beta_{pq}^2(\lambda) + \alpha_{pq2} \right)^{-1}. \tag{23}$$

В случае, когда одна из плотностей зафиксирована, для определения наименее благоприятной плотности можно использовать лишь одно из соотношений (19), (20) (или (22), (23) при $M = 1$). Если задана регулярная плотность $g(\lambda)$ и $M = 1$, то наименее благоприятная плотность $f^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_0$ имеет вид

$$f_{pq}^0(\lambda) = \left[\alpha_{pq1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} (C_k^g b_k)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 - g_{pq}(\lambda) \right]_+. \tag{24}$$

Если задана регулярная плотность $f(\lambda)$ и $M = 1$, то наименее благоприятная плотность $g^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_v^u$ имеет вид

$$g_{pq}^0(\lambda) = \max\{v_{pq}(\lambda), \min(u_{pq}(\lambda), \alpha_{pq2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}(C_k^f b_k)(t)e^{-it\lambda}\,dt\right|^2 - f_{pq}(\lambda))\}. \quad (25)$$

Операторы C_k^f, C_k^g находят по факторизации (2), (3) плотностей $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, а неизвестные α_{pq1}, α_{pq2}, $b_k(t)$ — пользуясь уравнениями факторизации (2) – (4) плотностей $f^0(\lambda)$, $g(\lambda)$, $f^0(\lambda)+g(\lambda)$ (или $f(\lambda)$, $g^0(\lambda)$, $f(\lambda)+g^0(\lambda)$) и уравнениями (8), (21).

Теорема 1. *Наименее благоприятные в классе* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{D}_v^u$ *спектральные плотности* $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ *при оптимальном линейном оценивании преобразования* $A\xi$ *определяются соотношениями* (2) – (4), (8), (14), (15), (19) – (21), *или соотношениями* (2) – (4), (8), (14), (15), (21) – (23) *при* $M = 1$. *Если* $M = 1$ *и задана регулярная плотность* $g(\lambda)$, *то наименее благоприятная плотность* $f^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_0$ *имеет вид* (24) *и определяется соотношениями* (4), (8), (16), (21). *Если* $M = 1$ *и задана регулярная плотность* $f(\lambda)$, *то наименее благоприятная плотность* $g^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_v^u$ *имеет вид* (25) *и определяется соотношениями* (4), (8), (17), (21). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной линейной оценки* $A\xi$ *вычисляется по формулам* (9), (10) *или* (12), (13).

Рассмотрим задачи для множества плотностей $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\varepsilon \times \mathfrak{D}_{1\varepsilon}$,

$$\mathfrak{D}_\varepsilon = \{f(\lambda) \mid f(\lambda) = (1-\varepsilon)v(\lambda) + \varepsilon u(\lambda);\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{kk}(\lambda)\,d\lambda = P_1\},$$

$$\mathfrak{D}_{1\varepsilon} = \{g(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle (g(\lambda) - g^1(\lambda))e_k, e_k\rangle\,d\lambda \le \varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle g(\lambda)e_k, e_k\rangle\,d\lambda = \varepsilon_1 + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle g^1(\lambda)e_k, e_k\rangle\,d\lambda = P_2\},$$

где $v(\lambda)$ — известная, а $u(\lambda)$ — неизвестная спектральные плотности, $g^1(\lambda)$ — ограниченная плотность. Множество $\mathfrak{D}_\varepsilon$ описывает модель "ε-загрязнения" случайных процессов [3], а множество $\mathfrak{D}_{1\varepsilon}$ — модель "ε-окрестности" в пространстве L_1. Из условия $0 \in \partial\Delta_{\mathfrak{D}}(f^0, g^0)$ находим соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\left|\int_0^{\infty}(C_k^g b_{mk})(t)e^{-it\lambda}\,dt\right|^2 b_{mp}(\lambda)\bar{b}_{mq}(\lambda) = \left(1+\gamma_{pq}^1(\lambda)\right)\alpha_{pq1}^{-1}, \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\left|\int_0^{\infty}(C_k^f b_{mk})(t)e^{-it\lambda}\,dt\right|^2 b_{mp}(\lambda)\bar{b}_{mq}(\lambda) = \gamma_{pq2}^{-1}(\lambda)\alpha_{pq2}^{-1}, \quad (27)$$

где $\gamma_{pq}^1(\lambda) \le 0$ и $\gamma_{pq}^1(\lambda) = 0$ при $f_{pq}^0(\lambda) > (1-\varepsilon)v_{pq}(\lambda)$, $|\gamma_{pq2}(\lambda)| \le 1$ и $\gamma_{pq2}(\lambda) = \operatorname{sign}(g_{pq}^0(\lambda) - g_{pq}^1(\lambda))$ при $g_{pq}^0(\lambda) \ne g_{pq}^1(\lambda)$. Если регулярный процесс $\xi(t) + \eta(t)$ имеет кратность $M = 1$, то уравнения (26), (27) имеют вид

$$f_{pq}^{0}(\lambda) + g_{pq}^{0}(\lambda) = \alpha_{pq1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{0}^{\infty} (C_k^g b_k)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 \left(1 + \gamma_{pq}^{1}(\lambda)\right), \tag{28}$$

$$f_{pq}^{0}(\lambda) + g_{pq}^{0}(\lambda) = \alpha_{pq2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{0}^{\infty} (C_k^f b_k)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 \gamma_{pq2}(\lambda). \tag{29}$$

Если задана плотность $g(\lambda)$ и $M = 1$, то наименее благоприятная плотность $f^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_\varepsilon$ имеет вид

$$f_{pq}^{0}(\lambda) = \max \left\{ \alpha_{pq1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{0}^{\infty} (C_k^g b_k)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 - g_{pq}(\lambda), (1-\varepsilon) v_{pq}(\lambda) \right\}. \tag{30}$$

Если задана плотность $f(\lambda)$ и $M = 1$, то наименее благоприятная спектральная плотность $g^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_{1\varepsilon}$ имеет вид

$$g_{pq}^{0}(\lambda) = \max \left\{ \alpha_{pq2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{0}^{\infty} (C_k^f b_k)(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2 - f_{pq}(\lambda), g_{pq}^{1}(\lambda) \right\}. \tag{31}$$

Теорема 2. *Наименее благоприятные в классе* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\varepsilon \times \mathfrak{D}_{1\varepsilon}$ *спектральные плотности* $f^0(\lambda)$, $g^0(\lambda)$ *определяются соотношениями* (2) – (4), (8), (14), (15), (21), (26), (27), *или соотношениями* (2) – (4), (8), (14), (15), (21), (28), (29) *при* $M = 1$. *Если* $M = 1$ *и задана регулярная плотность* $g(\lambda)$, *то наименее благоприятная спектральная плотность* $f^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_\varepsilon$ *имеет вид* (30) *и определяется соотношениями* (3), (4), (8), (16), (21). *Если* $M = 1$ *и задана плотность* $f(\lambda)$, *допускающая каноническую факторизацию* (2), *то наименее благоприятная спектральная плотность* $g^0(\lambda) \in \mathfrak{D}_{1\varepsilon}$ *имеет вид* (31) *и определяется соотношениями* (4), (8), (17), (21). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной линейной оценки преобразования* $A\xi$ *вычисляется по формулам* (9), (10) *или* (12), (13).

1. *Розанов Ю. А.* Теория обновляющих процессов. – М. : Наука, 1974. – 128 с.
2. *Kallianpur G., Mandrekar V.* Multiplicity and representation theory of purely nondeterministic stochastic processes // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – **10**, №4. – С. 614 – 644.
3. *Kassam S. A., Poor V. H.* Robust techniques for signal processing : A survey // Proc. IEEE. – 1985. – **73**, №3. – P. 433 – 481.
4. *Franke J.* Minimax-robust prediction of discrete time series // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1985. – **68**, №2. – S. 337 – 364.
5. *Franke J., Poor V. H.* Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors // Lecture Notes Statist. – 1984. – **26**. – P. 87 – 126.
6. *Moklyachuk M. P.* Estimation of linear functionals of stationary stochastic processes and a two-person zero-sum game. Stanford University Technical Report. – 1981. – №169. – 87 p.
7. *Моклячук М. П.* Об одной задаче теории игр и экстраполяции случайных процессов со значениями в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика – 1981.– Вып. 24. – С. 107 – 114.
8. *Моклячук М. П.* Минимаксная фильтрация линейных преобразований стационарных процессов // Там же. – 1991. – Вып. 44. – С. 96 – 105.
9. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. – М. : Наука, 1982. – 144 с.

Получено 04. 04. 91