УДК 517.9

А. М. Самойленко, А. Г. Пелюх (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛІНІЙНИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТІВ

Conditions for the existence and uniqueness are obtained for analytical solution of a nonlinear functional-differential equation with nonlinear deviations of argument.

Одержано умови існування та єдиності аналітичного розв'язку одного нелінійного диференціально-функціонального рівняння з нелінійними відхиленнями аргументу.

Диференціально-функціональні рівняння вигляду

$$x'(t) = f\big(t, x(\varphi_1(t)), \ldots , x(\varphi_k(t)), x'(\psi_1(t)), \ldots , x'(\psi_l(t))\big), \tag{1}$$

де $f\colon R\times R^k\times R^l \to R$, $\varphi_i(t)\colon R\to R$, $i = \overline{1,k}$, $\psi_j(t)\colon R\to R$, $j = \overline{1,l}$, були об'єктом дослідження багатьох математиків. Завдяки цьому в даний час існує велика кількість робіт, які присвячені вивченню різноманітних питань теорії таких рівнянь. Особливо це стосується питань існування і єдиності різного роду розв'язків (періодичних, неперервно диференційовних, аналітичних та ін.) [1 – 8]. Зокрема, в [4, 5] досліджені питання існування і єдиності аналітичних розв'язків лінійних, а в [6 – 8] — деяких класів нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду (1) з лінійно перетвореним аргументом.

В даній роботі продовжуються дослідження, основною метою яких є встановлення достатніх умов існування і єдиності аналітичного розв'язку $x(t)$ рівняння (1), що задовольняє умови

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) *функції* $f(t, x_1, \ldots , x_k, y_1, \ldots , y_l)$, $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, $\psi_j(t)$, $j = \overline{1,l}$, *розкладаються в ряди*

$$f(t, x_1, \ldots , x_k, y_1, \ldots , y_l) = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1}^{\infty} f_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} \times$$
$$\times\, t^{i_0}x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k}\, y_1^{j_1}\ldots y_l^{j_l},$$
$$\varphi_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_i^n t^n, \quad i = \overline{1,k}, \tag{3}$$
$$\psi_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_j^n t^n, \quad j = \overline{1,l},$$

які збігаються при $|t| < a$, $|x_i| < b$, $i = \overline{1,k}$, $|y_j| < b$, $j = \overline{1,l}$, (a, b — *деякі додатні сталі*);

2) $0 < \varphi_i^1 < 1$, $i = \overline{1,k}$, $0 < \psi_j^1 < 1$, $j = \overline{1,l}$;

3) $p = |f_{00\ldots010\ldots0}| + \ldots + |f_{0\ldots0\ldots01}| < 1$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) *у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{m=2}^{\infty} x_m t^m, \tag{4}$$

якій збігається при $|t| \le \rho$, *де* $\rho < a$.

Доведення. Покажемо спочатку, що при виконанні умов теореми рівняння (1) має єдиний формальний розв'язок у вигляді ряду (4). Дійсно, підставляючи (3), (4) в (1), одержуємо

$$\sum_{m=2}^{\infty} m x_m t^{m-1} = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1}^{\infty} f_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} t^{i_0} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=2}^{\infty} x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1^n t^n \right)^m \right)^{i_1} \ldots \left(\sum_{m=2}^{\infty} x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_k^n t^n \right)^m \right)^{i_k} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=2}^{\infty} m x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_1^n t^n \right)^{m-1} \right)^{j_1} \ldots \left(\sum_{m=2}^{\infty} m x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_l^n t^n \right)^{m-1} \right)^{j_l}.$$

Тепер виконаємо в останньому співвідношенні звичайні формальні операції і прирівняємо коефіцієнти при t^m, $m = 1, 2, \ldots$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} 2x_2 &= (f_{0\ldots010\ldots0}\psi_1^1 + \ldots + f_{0\ldots0\ldots01}\psi_l^1)\, 2x_2 + f_{10\ldots0\ldots0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m x_m &= (f_{0\ldots010\ldots0}(\psi_1^1)^{m-1} + \ldots + f_{0\ldots0\ldots01}(\psi_l^1)^{m-1})\, m x_m + \\ &\quad + P_m(x_2, \ldots, x_{m-1}), \quad m = 3, 4, \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

де $P_m(x_2, \ldots, x_{m-1})$ — деякі многочлени відносно всіх своїх аргументів з коефіцієнтами, що виражаються через $f_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l}$, $i_0 + i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_l = 1, \ldots, m-1$, φ_i^n, $i = \overline{1,k}$, ψ_j^n, $j = \overline{1,l}$, $n = 1, \ldots, m-1$, лише за допомогою операцій додавання і множення.

Беручи до уваги умову 3, неважко показати, що при всіх $m \geq 0$ виконуються нерівності

$$1 - f_{0\ldots010\ldots0}(\psi_1^1)^m - \ldots - f_{0\ldots0\ldots01}(\psi_l^1)^m > 1 - p > 0. \tag{6}$$

Тоді безпосередньо із (5), (6) однозначно одержуємо

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\left(1 - f_{0\ldots010\ldots0}\psi_1^1 - \ldots - f_{0\ldots0\ldots01}\psi_l^1\right)^{-1} f_{10\ldots0\ldots0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \frac{1}{m}\left(1 - f_{0\ldots010\ldots0}(\psi_1^1)^{m-1} - \ldots - f_{0\ldots0\ldots01}(\psi_l^1)^{m-1}\right)^{-1} \times \\ &\quad \times P_m(x_2, \ldots, x_{m-1}), \quad m \geq 3. \end{aligned} \tag{7}$$

Це й доводить, що ряд (4), коефіцієнти якого визначаються за допомогою співвідношень (7), формально задовольняє рівняння (1). Отже, для завершення доведення теореми залишається показати, що цей ряд збігається в деякому околі точки $t = 0$.

Нехай $|f(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)| \leq L$, $|\varphi_i(t)| \leq M$, $i = \overline{1,k}$, $|\psi_j(t)| \leq M$, $j = \overline{1,l}$, при всіх $|t| \leq a_1 < a$, $|x_i| \leq b_1 < b$, $i = \overline{1,k}$, $|y_j| \leq b_1$, $j = \overline{1,l}$. Тоді

$$\left| f_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} \right| \leq \frac{L}{a_1^{i_0}\, b_1^{i_1+\ldots+i_k}\, b_1^{j_1+\ldots+j_l}}, \quad i_0 + i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_l \geq 1,$$

$$\left|\varphi_i^n\right| \leq \frac{M}{a_1^n},\ i = \overline{1,k},\ \left|\psi_j^n\right| \leq \frac{M}{a_1^n},\ j = \overline{1,l},\ n \geq 1, \quad \text{і функції}$$

$$\tilde f\,(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = \left|f_{0\ldots010\ldots0}\right| y_1 + \ldots + \left|f_{0\ldots0\ldots01}\right| y_l +$$

$$+ \frac{L}{\left(1-\frac{t}{a_1}\right)\left(1-\frac{x_1}{b_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x_k}{b_1}\right)\left(1-\frac{y_1}{b_1}\right)\ldots\left(1-\frac{y_l}{b_1}\right)} - L - \frac{L}{b_1}y_1 - \ldots - \frac{L}{b_1}y_l,$$

$$\tilde\varphi(t) = \lambda t + \frac{M}{1-\frac{t}{a_1}} - M - \frac{M}{a_1}t,$$

де $\lambda = \max\left\{\varphi_i^1,\ i=\overline{1,k},\ \psi_j^1,\ j=\overline{1,l}\right\}$, розкладаються в ряди

$$\tilde f\,(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1}^{\infty} \tilde f_{i_0 i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} \times$$

$$\times\, t^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}\, y_1^{j_1} \ldots y_l^{j_l}, \tag{8}$$

$$\tilde\varphi(t) = \lambda t + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde\varphi_i\, t^i,$$

де $\tilde f_{0\ldots0 j_1\ldots j_l} = \left|f_{0\ldots0 j_1\ldots j_l}\right|$, $j_1 + \ldots + j_l = 1$, $\tilde f_{i_0 i_1\ldots i_k 0\ldots0} = L/(a_1^{i_0}\, b_1^{i_1+\ldots+i_k})$, $i_0 + i_1 + \ldots + i_k = 1$, $\tilde f_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} = L/(a_1^{i_0}\, b_1^{i_1+\ldots+i_k}\, b_1^{j_1+\ldots+j_l})$, $i_0 + i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_l \geq 2$, $\tilde\varphi_i = \frac{M}{a_1^i}$, $i \geq 2$, які збігаються при $|t| < a_1$, $|x_i| < b_1$, $i = \overline{1,k}$, $|y_j| < b_1$, $j = \overline{1,l}$, і є мажорантами відповідно для функцій $f(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ і $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, $\psi_j(t)$, $j = \overline{1,l}$.

Розглянемо „мажорантне" рівняння

$$\tilde x'(t) = \tilde f\,(t, \tilde x(\tilde\varphi(t)), \ldots, \tilde x(\tilde\varphi(t)), \tilde x'(\tilde\varphi(t)), \ldots, \tilde x'(\tilde\varphi(t))) \tag{9}$$

і покажемо, що воно має єдиний формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\tilde x(t) = \sum_{m=2}^{\infty} \tilde x_m\, t^m. \tag{10}$$

Дійсно, підставляючи (8), (10) в (9), одержуємо

$$\sum_{m=2}^{\infty} m\tilde x_m\, t^{m-1} = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1}^{\infty} \tilde f_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l}\, t^{i_0} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=2}^{\infty} \tilde x_m \left(\lambda t + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde\varphi_i\, t^i\right)^m\right)^{i_1} \ldots \left(\sum_{m=2}^{\infty} \tilde x_m \left(\lambda t + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde\varphi_i\, t^i\right)^m\right)^{i_k} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=2}^{\infty} m\tilde x_m \left(\lambda t + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde\varphi_i\, t^i\right)^{m-1}\right)^{j_1} \ldots \left(\sum_{m=2}^{\infty} m\tilde x_m \left(\lambda t + \sum_{i=2}^{\infty} \tilde\varphi_i\, t^i\right)^{m-1}\right)^{j_l}.$$

Прирівнюючи в останньому співвідношенні коефіцієнти при t^m, $m = 1, 2, \ldots$, отримуємо

$$\begin{gathered} 2\,\tilde x_2 = (\tilde f_{0\ldots010\ldots0} + \ldots + \tilde f_{0\ldots0\ldots01})\,\lambda 2\tilde x_2 + \tilde f_{10\ldots0\ldots0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m\tilde x_m = (\tilde f_{0\ldots010\ldots0} + \ldots + \tilde f_{0\ldots0\ldots01})\,\lambda^{m-1} m\tilde x_m + \tilde P_m(\tilde x_2, \ldots, \tilde x_{m-1}), \end{gathered} \tag{11}$$

де $\tilde{P}_m(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{m-1})$, $m \geq 3$, є многочленами $P_m(x_2, \ldots, x_{m-1})$, в яких x_i, $i = \overline{2, m-1}$, замінені на $\tilde{x}_i$, $i = \overline{2, m-1}$, а φ_i^n, $i = \overline{1, k}$, і ψ_j^n, $j = \overline{1, l}$, $n \geq 1$, — на λ і $\tilde{\varphi}_n$, $n \geq 2$. Оскільки $\tilde{f}_{0\ldots 0 j_1 \ldots j_l} = \left| f_{0\ldots 0 j_1 \ldots j_l} \right|$, $j_1 + \ldots + j_l = 1$ і $\left(\left| f_{0\ldots 010\ldots 0} \right| + \ldots + \left| f_{0\ldots 0\ldots 01} \right| \right) \lambda^m < 1$ при всіх $m \geq 1$, то із (11) однозначно знаходимо

$$\tilde{x}_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\left| f_{0\ldots 010\ldots 0} \right| + \ldots + \left| f_{0\ldots 0\ldots 01} \right| \right) \lambda \right)^{-1} \tilde{f}_{10\ldots 0\ldots 0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{12}$$

$$\tilde{x}_m = \frac{1}{m} \left(1 - \left(\left| f_{0\ldots 010\ldots 0} \right| + \ldots + \left| f_{0\ldots 0\ldots 01} \right| \right) \lambda^{m-1} \right)^{-1} \times$$

$$\times \; \tilde{P}_m(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_{m-1}).$$

Тоді, беручи до уваги (7), (12) і нерівності

$$1 - \left(f_{0\ldots 010\ldots 0} (\psi_1^1)^m + \ldots + f_{0\ldots 0\ldots 01} (\psi_l^1)^m \right) \geq$$

$$\geq 1 - \left(\left| f_{0\ldots 010\ldots 0} \right| + \ldots + \left| f_{0\ldots 0\ldots 01} \right| \right) \lambda^m, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

неважко послідовно показати, що при всіх $m \geq 0$ виконуються співвідношення

$$\tilde{x}_m > 0, \quad |x_m| \leq \tilde{x}_m. \tag{13}$$

Звідси безпосередньо випливає, що для доведення збіжності ряду (4), коефіцієнти x_m, $m \geq 2$, якого визначаються за допомогою формул (7), достатньо довести збіжність ряду (10) з коефіцієнтами $\tilde{x}_m$, $m \geq 2$, що визначаються за допомогою формул (12).

Оскільки згідно з [9] існує розв'язок $\gamma(t)$ рівняння

$$\gamma(\tilde{\varphi}(t)) = \lambda \gamma(t)$$

у вигляді степеневого ряду

$$\gamma(t) = t + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i t^i,$$

який збігається при $|t| < a_2 < a_1$, то виконуючи в (9) заміну змінних

$$\tilde{x}(t) = y(\gamma(t)), \quad \gamma(t) = \tau, \quad t = \gamma^{-1}(\tau), \tag{14}$$

одержуємо рівняння

$$y'(\tau) = F(\tau, y(\lambda\tau), y(\lambda\tau), \ldots, y(\lambda\tau), y'(\lambda\tau), \ldots, y'(\lambda\tau)), \tag{15}$$

де $F(\tau, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l) = [\gamma'(\gamma^{-1}(\tau))]^{-1} \tilde{f}(\gamma^{-1}(\tau), y(\lambda\tau), \ldots, y(\lambda\tau), \gamma'(\gamma^{-1}(\lambda\tau)) y'(\lambda\tau), \ldots, \gamma'(\gamma^{-1}(\lambda\tau)) y'(\lambda\tau))$.

Враховуючи властивості функцій $\gamma(t)$ і $\tilde{f}(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$, можна показати, що функція $F(\tau, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$ розкладається в степеневий ряд

$$F(\tau, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l) = \sum_{i_0 + i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_l = 1}^{\infty} F_{i_0 i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} \tau^{i_0} y_1^{i_1} \ldots y_k^{i_k} z_1^{j_1} \ldots z_l^{j_l},$$

який збігається при $|\tau| < a_3 < a_2$, $|y_i| < b_2 < b_1$, $i = \overline{1, k}$, $|z_j| < b_2$, $j = \overline{1, l}$.

Таким чином, за допомогою взаємно однозначної заміни змінних (14) питання про існування аналітичного в деякому околі точки $t = 0$ розв'язку рівняння (9) зводиться до дослідження аналогічного питання для рівняння (15). З огляду на [10] рівняння (15) має єдиний розв'язок у вигляді степеневого ряду

$$y(\tau) = \sum_{m=2}^{\infty} y_m \tau^m,$$

який збігається при $|\tau| \le a_4 < a_3$. Отже (випливає із (14)), рівняння (9) має розв'язок $\tilde{x}(t)$ у вигляді степеневого ряду

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=2}^{\infty} \tilde{x}^m t^m, \tag{16}$$

який збігається при $|t| \le \rho < a_4$. Оскільки рівняння (9) може мати не більше одного такого розв'язку, ряд (16) співпадає із рядом (10). Таким чином, ряд (10) з коефіцієнтами $\tilde{x}_m$, $m \ge 2$, що визначаються формулами (12), збігається при $|t| \le \rho$. Тоді на підставі (13) ряд (4), коефіцієнти x_m, $m \ge 2$, якого визначаються за допомогою співвідношень (7), також збігається при $|t| \le \rho$. Теорему доведено.

Зауваження. Задача про знаходження аналітичного розв'язку рівняння (1), що задовольняє умову

$$x(0) = x^0, \quad x'(0) = x^1, \tag{17}$$

зводиться до знаходження аналітичного розв'язку задачі вигляду (1), (2) у випадку, коли функція $f(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ розкладається в степеневий ряд

$$f(t, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1}^{\infty} f_{i_0 i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} \times$$
$$\times\; t^{i_0}\left(x_1 - x^0\right)^{i_1} \ldots \left(x_k - x^0\right)^{i_k} \left(y_1 - x^1\right)^{j_1} \ldots \left(y_l - x^1\right)^{j_l},$$

який збігається при $|t| < a$, $\left|x_i - x^0\right| < b$, $i = \overline{1,k}$, $\left|y_j - x^1\right| < b$, $j = \overline{1,l}$, і $f(0, x^0, \ldots, x^0, x^1, \ldots, x^1) = x^1$.

Дійсно, виконуючи в (1) заміну змінних

$$x(t) = x^0 + x^1 t + y(t),$$

одержуємо рівняння

$$y'(t) = F(t, y(\varphi_1(t)), \ldots, y(\varphi_k(t)), y'(\psi_1(t)), \ldots, y'(\psi_l(t))),$$

де функція $F(t, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l) = f(t, x^0 + x^1\varphi_1(t) + y(\varphi_1(t)), \ldots, x^0 + x^1\varphi_k(t) + y(\varphi_k(t)), x^1 + y'(\psi_1(t)), \ldots, x^1 + y'(\psi_l(t))) - x^1$ розкладається в збіжний степеневий ряд вигляду (3), і умову

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

що й треба було довести.

Покажемо тепер, що твердження теореми справедливе також у випадку, коли замість умови 3 виконується більш загальна умова

3′) $f_{0\ldots010\ldots0}(\psi_1^1)^m + \ldots + f_{0\ldots0\ldots01}(\psi_l^1)^m \ne 1$, $m = 1, 2, \ldots$.

Внаслідок умов 2 і 3′ існує таке ціле число r, що при всіх $m \ge r$ виконується нерівність

$$\left|f_{0\ldots010\ldots0}\right|(\psi_1^1)^m+\ldots+\left|f_{0\ldots0\ldots01}\right|(\psi_l^1)^m < 1. \tag{18}$$

Зважаючи на це, виконаємо в рівнянні (1) заміну змінних

$$x(t) = \sum_{m=2}^{r} x_m t^m + y(t), \tag{19}$$

де x_m, $m = 2, \ldots, r$, — деякі, поки що невідомі, сталі. В результаті одержуємо

$$\sum_{m=2}^{r} m x_m t^{m-1} + y'(t) = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1}^{\infty} f_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} t^{i_0} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=2}^{r} x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1^n t^n \right)^m + y(\varphi_1(t)) \right)^{i_1} \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(\sum_{m=2}^{r} x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_k^n t^n \right)^m + y(\varphi_k(t)) \right)^{i_k} \times$$

$$\times \left(\sum_{m=2}^{r} m x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_1^n t^n \right)^{m-1} + y'(\psi_1(t)) \right)^{j_1} \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(\sum_{m=2}^{r} m x_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_l^n t^n \right)^{m-1} + y'(\psi_l(t)) \right)^{j_l}.$$

Виконуючи звичайні формальні перетворення, отримуємо

$$\sum_{m=2}^{r} m x_m t^{m-1} + y'(t) = \sum_{m=2}^{r} \left[\left(f_{0\ldots010\ldots0} (\psi_1^1)^{m-1} + \ldots + f_{0\ldots0\ldots01} (\psi_l^1)^{m-1} \right) m x_m + \right.$$

$$\left. + \ P_m(x_2, \ldots, x_{m-1}) \right] t^{m-1} + \sum_{m=r}^{\infty} P_{m+1} t^m +$$

$$+ \sum_{\substack{i_0+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1 \\ i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l \neq 0}}^{\infty} \tilde{f}_{i_0 i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} t^{i_0} \left(y(\varphi_1(t))\right)^{i_1} \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(y(\varphi_k(t))\right)^{i_k} \left(y'(\psi_1(t))\right)^{j_1} \ldots \left(y'(\psi_l(t))\right)^{j_l},$$

де P_m, $m = 2, \ldots, r$ — деякі многочлени відносно всіх своїх аргументів, причому $P_2 = f_{10\ldots0}$ і P_m, $m \geq r+1$, — деякі сталі, що залежать від x_m, $m = 2, \ldots, r$. Покладемо в останньому співвідношенні замість x_m, $m = 2, \ldots, r$, значення

$$x_m = \frac{1}{m}\left(1 - \left(f_{0\ldots010\ldots0} (\psi_1^1)^{m-1} + \ldots + f_{0\ldots0\ldots01} (\psi_l^1)^{m-1}\right)\right)^{-1} P_m(x_2, \ldots, x_{m-1}).$$

Тоді, очевидно, одержимо рівняння

$$y'(t) = \bar{f}\,(t, y(\varphi_1(t)), \ldots, y(\varphi_k(t)), y'(\psi_1(t)), \ldots, y'(\psi_l(t))). \tag{20}$$

де функція $\bar{f}\,(t, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$ розкладається в ряд

$$\bar{f}\,(t, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l) = \sum_{i=r}^{\infty} P_{i+1} t^i + \sum_{\substack{i_0+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l=1 \\ i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_l \neq 0}}^{\infty} \bar{f}_{i_0 i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l} \times$$

$$\times\ t^{i_0} y_1^{i_1} \ldots y_k^{i_k} z_1^{j_1} \ldots z_l^{j_l}, \tag{21}$$

причому $\bar{f}_{0\ldots 0 j_1 \ldots j_l} = f_{0\ldots 0 j_1 \ldots j_l}$, $j_1 + \ldots + j_l = 1$, який збігається при $|t| < a_1$, $|y_i| < b_1$, $i = \overline{1,k}$, $|z_j| < b_1$, $j = \overline{1,l}$, де a_1, b_1 — деякі додатні числа $(a_1 < a$, $b_1 < b)$.

Оскільки для рівняння (20) виконується нерівність

$$\left|f_{0\ldots 010\ldots 0}\right| (\psi_1^1)^r + \ldots + \left|f_{0\ldots 0\ldots 01}\right| (\psi_l^1)^r < 1$$

і функція $\bar{f}\,(t, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$ розкладається в збіжний степеневий ряд (21), воно має єдиний розв'язок у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{m=r+1}^{\infty} y_m t^m,$$

який збігається при $|t| \le \rho < a_1$. Доведення цього твердження аналогічне доведенню теореми 1. Звідси і з (19) випливає така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* 1, 2 *і* 3′. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у вигляді ряду* (4), *який збігається при* $|t| \le \rho < a_1$.

1. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №6. – С. 737 – 747.
3. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 412 с.
4. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(x) + by(\lambda x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891 – 937.
5. *Frederickson P.O.* Dirichlet series solutions for certain functional differential equations // Lect. Notes Math. – 1971. – **243**. – P. 249 – 254.
6. *Пелюх Г. П.* О голоморфных решениях нелинейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 121 – 124.
7. *Grimm L. J., Hall L. M.* Holomorphic solutions of functional-differential systems near singular points // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – **42**, №1. – P. 167 – 170.
8. *Грудо Э. Н.* К аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, №4. – С. 700 – 711.
9. *Szekeres G.* Regular iteration of real and complex functions // Acta. Math. – 1958. – **100**. – P. 203 – 258.
10. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.

Одержано 02.07.98