УДК 517.95

В. Н. Павленко, Р. С. Искаков (Челябин. ун-т)

НЕПРЕРЫВНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ РАЗРЫВНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА*

We obtain new variational principles of the existence of strong and semiregular solutions of principal boundary-value problems for elliptic-type second order equations with discontinuous nonlinearity. We study the problem of proximity between the solution sets of approximating problem with nonlinearity continuous in phase variable and initial boundary-value problem with discontinuous nonlinearity.

Одержані нові варіаційні принципи існування сильних і напівправильних розв'язків основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу другого порядку з розривною нелінійністю. Вивчається проблема близькості множин розв'язків апроксимуючої задачі з неперервною за фазовою змінною нелінійністю і розв'язків вихідної крайової задачі з розривною нелінійністю.

Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными нелинейностями часто возникают при рассмотрении идеализированных распределенных систем с непрерывными нелинейностями, которые содержат участки быстрого роста по фазовой переменной. При этом удобно считать, что непрерывные нелинейности зависимы от малого параметра ε, а идеализация возникает как предел при $\varepsilon \to 0$. В этом случае важен анализ близости множеств решений аппроксимирующей задачи и решений предельной краевой задачи. На необходимость таких исследований указано в [1].

В данной работе рассматриваются основные краевые задачи для уравнений эллиптического типа второго порядка с ограниченной разрывной нелинейностью. Получены новые вариационные принципы существования сильных и полуправильных решений [2] для таких задач. С каждой краевой задачей естественным образом связываются функционал J и функциональное пространство X, на котором он определен, и доказывается существование $u_0 \in X$, для которого $J(u_0) = \inf_X J(u)$, причем любое такое u_0 является сильным или полуправильным решением соответствующей краевой задачи в зависимости от характера ограничений на точки разрыва нелинейной части уравнения.

Заметим, что для задачи Дирихле более общие предложения были ранее установлены В. Н. Павленко [3, 4]. K. C. Chang [5] применил вариационное исчисление Кларка для локально липшицевых функций к доказательству существования сильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывной нелинейностью. В [6] им были получены топологическими методами теоремы существования сильных решений основных краевых задач для таких уравнений. В данной статье по сравнению с результатами K. C. Chang ослаблены ограничения на разрывы нелинейности, входящей в уравнение.

Проблема близости множеств решений аппроксимирующей задачи и решений задачи-идеализации обсуждается в случае, когда все разрывы нелинейного члена предельного уравнения по фазовой переменной лежат на объединении конечного числа фиксированных гладких поверхностей S_i, $i = \overline{1, N}$. При этом для каждой поверхности S_i можно так выбрать окрестность U_i, что множества U_i, $i = \overline{1, N}$, попарно не пересекаются. Рассматривается аппроксимирующая последовательность каратеодориевых функций $(g_n(x, u))$ для нелинейности $g(x, u)$ предельного уравнения такая, что $g_n(x, u) = g(x, u)$ вне объединения ε_n-окрестностей поверхностей, S_i, $i = \overline{1, N}$ ($\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$). Последова-

*Выполнена при финансовой поддержке Международной соросовской программы образования в области точных наук (грант № d13).

тельность $(g_n(x, u))$ предполагается равномерно ограниченной по n и фазовой переменной u. При достаточно общих предположениях относительно точек разрыва $g(x, u)$ по u доказывается, что если u_n — сильное решение аппроксимирующей задачи, доставляющее абсолютный минимум функционалу соответствующей краевой задачи, то последовательность (u_n) содержит подпоследовательность, сходящуюся в равномерной метрике к некоторому полуправильному решению предельной краевой задачи, на котором функционал этой задачи достигает нижней грани на всем пространстве. В частности, если функционал предельной краевой задачи достигает своей нижней грани на всем пространстве только в одной точке u_0, то $u_n \to u_0$ в равномерной метрике. Близка по тематике к данному исследованию совместная статья М. А. Красносельского и А. В. Покровского [7], посвященная вопросу существования корректных полуправильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа с разрывной ограниченной нелинейностью, удовлетворяющей одностороннему условию Липшица.

1. Формулировка основных результатов. В ограниченной области $\Omega \subset \subset \mathbf{R}^m$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ [8, с. 23], рассматривается уравнение эллиптического типа

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)u(x) = -g(x, u(x)), \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

совместно с одним из следующих условий:

$$u(x)|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

$$\partial u / \partial n_L(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(n, x_j)|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

$$\partial u / \partial n_L(x) + \sigma(x)u(x)|_{\Gamma} = 0, \tag{4}$$

функция $\sigma \in C_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательная и не равна тождественно нулю, n — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(n, x_j)$, $j = \overline{1, m}$, — направляющие косинусы нормали n. Предполагается, что коэффициенты $a_{ij} \in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $i, j \in \{1, 2, \dots \dots, m\}$, удовлетворяют условию равномерной эллиптичности

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \chi|\xi|^2 \qquad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbf{R}^m \tag{5}$$

при любом $x \in \Omega$, где χ — положительная константа, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ на Ω, $c \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ борелева $(\mathrm{mod}\, 0)$ [9, с. 157] и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет разрывы только первого рода, $g(x, u) \in \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$, $g_-(x, u) = \min\{g(x, u-), g(x, u+)\}$, $g_+(x, u) = \max\{g(x, u-), g(x, u+)\}$, $g(x, u+) = \lim_{s \to +0} g(x, u+s)$, $g(x, u-) = \lim_{s \to +0} g(x, u-s)$.

Определение 1. *Сильным решением задачи* (1) *с одним из краевых условий* (2) – (4) *называется функция* $u \in W_q^2(\Omega)$, $q > 1$, *удовлетворяющая для почти всех* $x \in \Omega$ *уравнению* (1) *и почти всюду на* Γ *одному из краевых условий* (2) – (4).

Определение 2. *Сильное решение* u *задачи* (1) *с одним из краевых условий* (2) – (4) *называется полуправильным решением этой задачи, если для почти всех* $x \in \Omega$ *значение* $u(x)$ *является точкой непрерывности функции* $g(x, \cdot)$.

Определение 3. *Будем говорить, что для уравнения* (1) *выполнено* A-*условие* (A1-*условие*), *если существует конечное или счетное семейство поверх-*

ностей $\{S_i,\ i\in I\}$ *в* $\mathbf{R}^{m+1}$, $S_i=\{(x,u)\in\mathbf{R}^{m+1}\mid u=\varphi_i(x),\ x\in\Omega\}$, $\varphi_i\in W^2_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *таких, что для почти всех* $x\in\Omega$ *неравенство* $g(x,u-)<g(x,u+)$ *влечет существование* $i\in I$, *для которого* $u=\varphi_i(x)$ *и* $(L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)+))(L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)-))>0$ (*либо* $(L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)+))(L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)-))<0$, *либо* $L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x))=0$).

Теорема 1. *Предположим, что*:

1) *для уравнения* (1) *выполнено* A-*условие* (A1-*условие*);

2) *при почти всех* $x\in\Omega$

$$|g(x,u)|\le a(x)\qquad\forall\, u\in\mathbf{R},\tag{6}$$

где $a\in L_q(\Omega)$, $q>n/2$;

3) *коэффициент* $c(x)$ *оператора* L *неотрицателен, а в случае задачи Неймана, кроме того, не равен тождественно нулю на* Ω;

Тогда существует $u\in X$ *такое, что* $J(u)=\inf_X J(v)$, *где*

$$J(v)=\int_\Omega dx\int_0^{v(x)}g(x,\tau)\,d\tau+\sum_{i,j=1}^m\int_\Omega a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\,dx+$$
$$+\int_\Omega c(x)v^2(x)\,dx+\int_\Gamma\hat\sigma(s)v^2(s)\,ds,$$

$X=\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ *для задачи Дирихле,* $X=W^1_2(\Omega)$ *для второй и третьей краевых задач,* $\hat\sigma(s)\equiv0$ *на* Γ *для первой и второй краевых задач и* $\hat\sigma(s)=\sigma$ *для задачи* (1) – (4). *При этом любое такое* u *принадлежит пространству* $W^2_q(\Omega)$ *и является полуправильным (сильным) решением соответствующей краевой задачи.*

Далее будем предполагать, что функция $g(x,u)$ в уравнении (1) имеет следующую структуру. Пусть функции $\varphi_1,\dots,\varphi_N\in C_{2,0}(\Omega)$ и $\varphi_i(x)<\varphi_{i+1}(x)$ на Ω для любого $i=\overline{1,N-1}$ и для некоторого $\varepsilon>0$ множества $G_i=\{(x,u)\in\mathbf{R}^{m+1}\mid |u-\varphi_i(x)|<\varepsilon\}$, $i=\overline{1,N}$, попарно не пересекаются. Для почти всех $x\in\Omega$ функция $g(x,u)=f_i(x,u)$, если $u\in(\varphi_i(x),\varphi_{i+1}(x))$, $i=\overline{1,N-1}$, $g(x,u)=f_0(x,u)$ при $u<\varphi_1(x)$ и $g(x,u)=f_N(x,u)$ при $u>\varphi_N(x)$, где $f_i(x,u)$ — каратеодориевы функции на $\Omega\times\mathbf{R}$; кроме того, $g(x,\varphi_i(x))\in[f_{i-1}(x,\varphi_i(x)),f_i(x,\varphi_i(x))]$, $i=\overline{1,N}$. Заметим, что $g(x,\varphi_i(x)-)=f_{i-1}(x,\varphi_i(x))$, $g(x,\varphi_i(x)+)=f_i(x,\varphi_i(x))$ почти всюду на Ω, $i=\overline{1,N}$. Потребуем также, чтобы для g было выполнено условие 2 теоремы 1, а для коэффициента $c(x)$ оператора L — условие 3 этой теоремы.

Для уравнения (1) рассмотрим аппроксимирующую последовательность уравнений вида

$$Lu(x)+g_s(x,u(x))=0,\qquad x\in\Omega,\tag{1s}$$

$s\in\mathbf{N}:\ s>\varepsilon^{-1}$, где $g_s(x,u)$ — каратеодориева функция на $\Omega\times\mathbf{R}$, равная $g(x,u)$ вне $\bigcup_{i=1}^N G_i(s^{-1})$ и такая, что для почти всех $x\in\Omega$

$$|g_s(x,u)|\le a_1(x)\quad\forall\, u\in\mathbf{R},\tag{6s}$$

$a_1\in L_q(\Omega)$ и не зависит от s, q — то же, что и в оценке (6) для функции $g(x,u)$. Заметим, что такие аппроксимирующие последовательности (g_s) для g

существуют. Краевой задаче (1s), $s > \varepsilon^{-1}$, с одним из краевых условий (2) – (4) сопоставим функционал $J_s(v)$, определенный на пространстве X как функционал $J(v)$ при формулировке теоремы 1 с заменой g на g_s. Для каждого $s > \varepsilon^{-1}$ функция $u_s \in X$ определяется из условия $J_s(u_s) = \inf_X J_s(v)$. В силу теоремы 1 такое u_s существует, принадлежит $W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением задачи (1s) с одним из краевых условий (2) – (4).

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) *для почти всех* $x \in \Omega$ *неравенство* $f_{i-1}(x, \varphi_i(x)) < f_i(x, \varphi_i(x))$ *для некоторого* $1 \le i \le N$ *влечет* $(L\varphi_i(x) + f_{i-1}(x, \varphi_i(x)))(L\varphi_i(x) + f_i(x, \varphi_i(x))) > 0$;

2) *для почти всех* $x \in \Omega$

$$|f_i(x, u)| \le a(x) \quad \forall\, u \in [\,\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x)], \qquad i = \overline{1, N-1},$$

$$|f_0(x, u)| \le a(x) \quad \forall\, u < \varphi_1(x),$$

$$|f_N(x, u)| \le a(x) \quad \forall\, u > \varphi_N(x),$$

где $a \in L_q(\Omega)$, $q > n/2$;

3) *выполнено условие* 3 *теоремы* 1.

Тогда последовательность (u_s) *решений аппроксимирующих задач* (1s) *с одним из краевых условий* (2) – (4), *построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала* J *на* X [10, *с.* 137] *и содержит подпоследовательность, сходящуюся в* $C(\overline{\Omega})$ *к полуправильному решению* u_0 *предельной задачи* (1) *с одним из краевых условий* (2) – (4), *для которого* $J(u_0) = \inf_X J(v)$. *Если* $u_0 \in X$, *удовлетворяющая последнему равенству, только одна, то* $u_s \to u_0$ *в* $C(\overline{\Omega})$.

2. Вариационные принципы существования сильных и полуправильных решений краевых задач.

Определение 4 [10, с. 253]. *Оператор* $T\colon E \to E^*$ (E *— вещественное банахово пространство*) *называется квазипотенциальным, если существует функционал* $f\colon E \to \mathbf{R}$ *такой, что для любых* $x, h \in E$

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (T(x+th), h)\, dt.$$

При этом f *будем называть квазипотенциалом оператора* T (*через* (y, x) *обозначается значение функционала* $y \in E^*$ *на элементе* $x \in E$).

Доказательство теоремы 1 базируется на следующем общем вариационном принципе В. Н. Павленко.

Теорема 3 [11, с. 16]. *Предположим, что:*

1) X, Y, Y_1 *— вещественные банаховы пространства, причем пространства* X, Y *рефлексивные,* X *компактно вложено в* Y *и непрерывно в* Y_1, P, P_1 *— операторы вложения* X *в* Y *и* Y_1 *соответственно*;

2) *оператор* $T_1 : X \to X^*$ *квазипотенциальный, монотонный и радиально непрерывный* [12, *с.* 79] *на* X;

3) *оператор* $T_2 : Y_1 \to Y^*$ *ограниченный* (*т. е. ограниченные множества из* Y_1 *переводит в ограниченные в* Y^*) *и отображение* $P^* T_2 P_1$ *квазипотенциально*;

4) *квазипотенциал* f *оператора* $T = T_1 + P^* T_2 P_1$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Тогда существует $u \in X$ *такой, что* $f(u) = \inf_X f(z)$ *и любое такое* u *удовлетворяет включению*

$$-T_1 u \in P^*(ST_2)(P_1 u). \tag{7}$$

Здесь ST_2 *— секвенциальное замыкание оператора* T_2 [13], *значение* $ST_2 u$, $u \in Y_1$, *которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой в* Y^* *множества всех слабо предельных точек в* Y^* *последовательностей вида* $(T_2 u_n)$, *где* $u_n \to u$ *в* Y_1.

Схема доказательства теоремы 1 следующая: вначале с помощью теоремы 3 устанавливается существование $u \in X$ такого, что $Ju = \inf_X J(v)$, где банахово пространство X и функционал J такие же, как и в формулировке теоремы 1. Согласно теореме 3 любое такое u удовлетворяет включению (7), в котором операторы $T_1 : X \to X^*$ и $T_2 : Y \to Y^*$, $Y_1 = Y = L_p(\Omega)$, $p = q/(q-1)$, q — из условия 2 теоремы 1, определяются равенствами

$$(T_1 w, v) = \sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega a_{ij} w_{x_i} v_{x_j}\, dx +$$

$$+ \int_\Gamma \hat{\sigma}(s) v(s) w(s)\, ds + \int_\Omega c(x) v(x) w(x)\, dx \quad \forall\, w, v \in X, \tag{8}$$

$$T_2 v = g(x, v(x)) \quad \forall\, v \in Y. \tag{9}$$

Как показано в [14], для произвольного $v \in Y$ значение

$$ST_2 v = \{ z : \Omega \to \mathbf{R} \mid z \text{ — измерима на } \Omega,$$

$$z(x) \in [g(x, v(x)), g(x, v(x))] \text{ для п. в. } x \in \Omega \}.$$

Поэтому из (7) следует существование измеримой на Ω функции $z : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такой, что $z(x) \in [g(x, u(x)), g(x, u(x))]$ почти всюду на Ω, и

$$(T_1 u, v) = -\int_\Omega z(x) v(x)\, dx \quad \forall\, v \in X.$$

Заметим, что из условия 2 теоремы 1 функция $z \in L_q(\Omega)$. Отсюда, применяя априорные оценки Агмона – Дуглиса – Ниренберга (L_p-теория) [15, с. 133] с учетом однозначной разрешимости в $C_{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ основных краевых задач для уравнения $Lu = f$, $f \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ [8, с. 165], получаем, что $u \in W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением соответствующей краевой задачи для уравнения

$$Lu(x) = -z(x), \qquad x \in \Omega.$$

Последнее равносильно включению

$$-Lu(x) \in [g(x, u(x)), g(x, u(x))] \text{ почти всюду на } \Omega. \tag{10}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается показать, что u является полуправильным (сильным) решением уравнения (1). Для этого используется А- (А1-) условие и то, что u является минимизатором J на X.

***Доказательство теоремы* 1.** С краевой задачей (1) с одним из краевых условий (2) – (4) связаны операторы $T_1 : X \to X^*$, $T_2 : Y \to Y^*$ и функционал $J : X \to \mathbf{R}$, построенные выше. Проверим выполнение всех условий теоремы 3 с $Y_1 = Y$, $P_1 = P$ и $f = J$. Из теоремы вложения Кондрашева [16, с. 106] заключаем о компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, $q/(q-1)$, поскольку $q > n/2$.

Оператор $T_1: X \to X^*$ — линейный ограниченный и самосопряженный. Из этого следует, что функционал $J_1(u) = 2^{-1}(T_1 u, u)$ является его потенциалом [10, с. 63]. Кроме того, существует положительная константа M такая, что

$$J_1(v) \geq M\|v\|^2 \quad \forall\, v \in X \tag{11}$$

($\|\cdot\|$ — норма в X). Действительно, в случае задачи Дирихле

$$J_1(v) \geq \chi \sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega v_{x_i}^2\, dx = \chi\|v\|^2 \quad \forall\, v \in X,$$

где χ — константа равномерной эллиптичности оператора L в (5). Для задачи Неймана

$$J_1(v) \geq \chi\left(\sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega v_{x_i}^2\, dx + \int_\Omega \frac{c(x)}{\chi} v^2(x)\, dx\right) = \chi\|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in X,$$

причем в силу условия 3 теоремы 1 норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме в $W_2^1(\Omega)$ [17, с. 156], из чего заключаем о справедливости (11) с подходяще выбранной константой $M > 0$. Наконец, для третьей краевой задачи

$$J_1(v) \geq \chi \sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega v_{x_i}^2\, dx + \int_\Omega \sigma(s) v^2(s)\, ds \geq$$

$$\geq \min\{\chi, 1\}\left(\sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega v_{x_i}^2\, dx + \int_\Gamma \sigma(s) v^2(s)\, ds\right) = \min\{\chi, 1\}\|v\|_2^2 \quad \forall\, v \in X,$$

что влечет (11) с некоторой положительной константой M, так как из $\sigma(s) \geq 0$ ($\sigma \in C_{1,\alpha}$) и $\sigma \not\equiv 0$ на Γ следует эквивалентность нормы $\|\cdot\|_2$ норме в $W_2^1(\Omega)$ [17, с. 156]. Из условия 2 теоремы 1 следует оценка

$$\|T_2 v\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |g(x, v(x))|^q\, dx\right)^{1/q} \leq \|a\|_{L_q(\Omega)} \quad \forall\, v \in L_p(\Omega)$$

и, значит, $T_2: Y \to Y^*$ ограничен на Y. Так же, как в [18], доказывается, что

$$J_2(v) = \int_\Omega dx \int_0^{v(x)} g(x, s)\, ds$$

— квазипотенциал оператора $P^* T_2 P$ на X. Поскольку для любого $v \in X$

$$|J_2(v)| \leq \int_\Omega a(x)|v(x)|dx \leq k\|v\|$$

(постоянная k равна произведению $\|a\|_{L_q(\Omega)}$ на норму оператора вложения X в $L_q(\Omega)$), то

$$J(v) = J_1(v) + J_2(v) \geq M\|v\|^2 - k\|v\| \quad \forall\, v \in X$$

и, следовательно,

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3, из чего заключаем, что существует $u \in X$, для которого $Ju = \lim_X J(v)$, и любое такое u удовлетворяет включению (7) с $P_1 = P$. Как показано выше, функция u, на которой функционал J достигает своей нижней грани на X, удовлетворяет соответствующим граничным условиям и включению (10). Для завершения доказательства теоремы 1 остается показать, что u является полуправильным (сильным) решением уравнения (1), если для него выполнено A- (A1-) условие. Функции $u(x)$ поставим в соответствие два множества:

$$\Omega_H = \{x \in \Omega \mid u(x) \text{— точка непрерывности } g(x, \cdot)\},$$

$$\Omega_P = \{x \in \Omega \mid g(x, u(x)-) \neq g(x, u(x)+)\}.$$

Эти множества не пересекаются и их объединение с точностью до множества меры нуль совпадает с Ω. Если $x \in \Omega_H$, то $[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] = \{g(x, u(x))\}$, и, значит, почти всюду на Ω_H $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Пусть

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid g(x, u(x)-) > g(x, u(x)+)\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid g(x, u(x)-) < g(x, u(x)+)\}.$$

Тогда $\Omega_P = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Покажем, что $\operatorname{mes} \Omega_1 = 0$. Допустим противное, тогда отлична от нуля мера одного из множеств:

$$\Omega_{11} = \{x \in \Omega \mid Lu(x) + g(x, u(x)+) \geq 0\},$$

$$\Omega_{12} = \{x \in \Omega \mid Lu(x) + g(x, u(x)+) < 0\}.$$

Пусть $\operatorname{mes} \Omega_{11} \neq 0$. Поскольку $g(x, u(x)-) > g(x, u(x)+)$ на Ω_1, то $Lu(x) + g(x, u(x)-) > 0$ на Ω_{11}, и, значит, мера множества

$$\{x \in \Omega \mid Lu(x) + g(x, u(x)-) > 0\}$$

не равна нулю. Следовательно, для некоторого $\varepsilon > 0$ ненулевой будет мера множества

$$\Omega_{11}(\varepsilon) = \{x \in \Omega \mid Lu(x) + g(x, u(x)-) > \varepsilon\}.$$

Так как $Lu(x)$ и $\psi(x) = \max\{|g(x, u(x)-)|, |g(x, u(x)+)|\}$ суммируемы на Ω, то существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} E < \delta$ верны неравенства [17, с. 61]

$$\int_E |Lu(x)|\,dx < \varepsilon \operatorname{mes} \Omega_{11}(\varepsilon)/8, \qquad \int_E \psi(x)\,dx < \varepsilon \operatorname{mes} \Omega_{11}(\varepsilon)/8.$$

Для измеримого множества $\Omega_{11}(\varepsilon) \subset \Omega$ найдутся замкнутое множество $F \subset \Omega_{11}(\varepsilon)$ и открытое множество G: $F \subset G$ с $\overline{G} \subset \Omega$ такие, что $\operatorname{mes} F > \operatorname{mes} \Omega_{11}(\varepsilon)/2$ и $\operatorname{mes}(G \setminus F) < \delta$ [19]. Существует функция $h \in C_\infty(\overline{\Omega})$, равная единице на F, нулю вне G и удовлетворяющая неравенству $0 \leq h(x) \leq 1$ на $G \setminus F$ [20, с. 805]. Заметим, что $h \in W_q^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Поскольку J — квазипотенциал оператора $T = T_1 + P^* T_2 P$, u — минимизатор J на X и $h \in X$, то для любого $t > 0$

$$0 \leq (J(u + t(-h)) - Ju)/t = \int_0^1 (T(u + \tau t(-h)), -h)\,d\tau.$$

Переходя к пределу при $t \to +0$, получаем

$$0 \leq T_1(u, -h) + \int_0^1 d\tau \int_\Omega \left(\lim_{s \to +0} g(x, u(x) - sh(x))(-h(x)) \right) dx =$$

$$= \int_\Omega \left(Lu(x) + \lim_{s \to +0} g(x, u(x) - sh(x)) \right) (-h(x))\,dx \leq$$

$$\leq -\int_F (Lu(x) + g(x, u(x)-))\,dx + \int_{G\setminus F} (|Lu(x)| + \psi(x))\,dx <$$

$$< -\varepsilon \operatorname{mes} F + \varepsilon \operatorname{mes} \Omega_{11}(\varepsilon)/4 < -\varepsilon \operatorname{mes} \Omega_{11}(\varepsilon)/2 + \varepsilon \operatorname{mes} \Omega_{11}(\varepsilon)/4 < 0.$$

(Предельный переход под знаком интеграла возможен в силу теоремы Лебега [17, с. 57].)

Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{mes}\Omega_{11}(\varepsilon) = 0$. Аналогично, если $\operatorname{mes}\Omega_{12}(\varepsilon) \neq 0$, то существует $\varepsilon > 0$, для которого мера множества

$$\Omega_{12}(\varepsilon) = \{x \in \Omega \mid Lu(x) + g(x, u(x)) < \varepsilon\}$$

не равна нулю. Из суммируемости $Lu(x)$ и $\psi(x)$ следует существование $\delta > 0$ такого, что для любого измеримого подмножества $E \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} E < \delta$ выполняются неравенства

$$\int_E |Lu(x)|\,dx < \varepsilon \operatorname{mes}\Omega_{12}(\varepsilon)/8, \qquad \int_E \psi(x)\,dx < \varepsilon \operatorname{mes}\Omega_{12}(\varepsilon)/8.$$

Для множества $\Omega_{12}(\varepsilon)$ найдутся замкнутое множество $F \subset \Omega_{12}(\varepsilon)$ и открытое множество $G\colon F \subset G$ с $\overline{G} \subset \Omega$ такие, что $\operatorname{mes} F > \operatorname{mes}\Omega_{12}(\varepsilon)/2$ и $\operatorname{mes}(G\setminus F) < \delta$. Пусть функция $h \in C_\infty(\overline{\Omega})$, равна единице на F, нулю вне G и $0 \leq h(x) \leq 1$ на $G\setminus F$. Тогда $h \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и для любого $t > 0$

$$0 \leq (J(u+th) - Ju)/t = \int_0^1 (T(u+\tau th), h)\,d\tau,$$

из чего, по аналогии со случаем $\operatorname{mes}\Omega_{11} \neq 0$, получаем

$$0 \leq \lim_{t\to+0} \frac{J(u+th) - Ju}{t} < -\varepsilon \operatorname{mes}\Omega_{12}(\varepsilon)/4.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{mes}\Omega_{12} = 0$. Если выполнено A1-условие для уравнения (1), то для почти всех $x \in \Omega$ либо $Lu(x) + g(x, u(x)) = 0$, либо для некоторого $i \in I$ значение $u(x)$ равно $\varphi_i(x)$ и $(L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)+))(L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)-)) > 0$. Последнее неравенство равносильно тому, что $-L\varphi_i(x) \notin [g_-(x, \varphi_i(x)), g_+(x, \varphi_i(x))]$. Если предположить, что мера множества

$$\{x \in \Omega_2 \mid Lu(x) \neq g(x, u(x))\}$$

отлична от нуля, то поскольку I не более чем счетно, найдется $i \in I$, для которого не равна нулю мера множества

$$\omega = \{x \in \Omega_2 \mid u(x) = \varphi_i(x),\ -L\varphi_i(x) \notin [g_-(x, \varphi_i(x)), g_+(x, \varphi_i(x))]\}.$$

Так как $Lu(x) = L\varphi_i(x)$ почти всюду на ω [21, с. 151], то почти всюду на ω функция $u(x)$ не удовлетворяет включению (10). Получено противоречие. Таким образом, $u(x)$ является сильным решением уравнения (1). Если для уравнения (1) выполнено A-условие, то, как видно из приведенных выше рассуждений, $\operatorname{mes}\Omega_2 = 0$, и, следовательно, $u(x)$ — полуправильное решение уравнения (1). Теорема 1 доказана полностью.

3. Доказательство теоремы 2. Далее пользуемся обозначениями, введенными в п. 1. Функция $g(x, u)$ в уравнении (1) совпадает с каратеодориевой функцией $f_i(x, u)$ для почти всех $x \in \Omega$ и $u \in (\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x))$, $i = \overline{1, N-1}$; $g(x, u) = f_0(x, u)$, если $u < \varphi_1(x)$; $g(x, u) < f_N(x, u)$ при $u > \varphi_N(x)$ ($f_0(x, u)$, $f_N(x, u)$ также каратеодориевы функции). Поскольку $g(x, \varphi_i(x)-) = f_{i-1}(x, \varphi_i(x))$, $g(x, \varphi_i(x)+) = f_i(x, \varphi_i(x))$, то из условия 1 теоремы 2 заключаем, что для уравнения (1) выполнено А-условие. В силу условия 2 теоремы 2 для $g(x, u)$ верна оценка

$$|g(x,u)| \le a(x) \quad \forall\, u \in \mathbf{R} \text{ и почти всех } x \in \Omega$$

(предполагается, что $g(x, \varphi_i(x)) \in [f_{i-1}(x, \varphi_i(x)), f_i(x, \varphi_i(x))]$, $i = \overline{1, N}$, почти всюду на Ω). Из теоремы 1 следует существование $u \in X$ такого, что $J(u) = \inf_X J(v)$ и любое такое u является полуправильным решением соответствующей краевой задачи. Это же заключение справедливо и для аппроксимирующих задач с $s > \varepsilon^{-1}$ при учете наличия оценки (6s) для аппроксимирующей нелинейности $g_s(x, u)$. Пусть $s > \varepsilon^{-1}$, $u_s \in X$ и удовлетворяет равенству $J_s(u_s) = \inf_X J_s(v)$ (согласно теореме 1 отсюда следует, что $u_s \in W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи).

Докажем существование постоянной $C > 0$ такой, что

$$|J_s(v) - J(v)| \le C/s \quad \forall\, v \in X, \quad s > \varepsilon^{-1}. \tag{12}$$

Для $v \in X$ и $s > \varepsilon^{-1}$ имеем

$$|J_s(v) - J(v)| = \left| \int_\Omega dx \int_0^{v(x)} (g_s(x,t) - g(x,t))\,dt \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^N \int_\Omega dx \int_{\varphi_i(x)-s^{-1}}^{\varphi_i(x)+s^{-1}} |g_s(x,t) - g(x,t)|\,dt \le$$

$$\le \sum_{i=1}^N \int_\Omega dx \int_{\varphi_i(x)-s^{-1}}^{\varphi_i(x)+s^{-1}} (a_1(x) + a(x))\,dt = \frac{2N}{s} \int_\Omega (a_1(x) + a(x))\,dx = C/s,$$

где

$$C = 2N \int_\Omega (a_1(x) + a(x))\,dx,$$

функция $a_1(x)$ — из оценки (6s), $a(x)$ — из условия 2 теоремы 2. Пусть $J(u) = \inf_X J(v)$. Из (12) для произвольного $s > \varepsilon^{-1}$ имеем

$$J_s(u) \le J(u) + Cs^{-1}, \qquad J(u_s) - Cs^{-1} \le J_s(u_s).$$

Отсюда и из определения u_s для $s > \varepsilon^{-1}$ следует

$$J(u) - Cs^{-1} \le J(u_s) - Cs^{-1} \le J_s(u_s) \le J_s(u) \le J(u) + Cs^{-1},$$

что влечет неравенство

$$|J_s(u_s) - J(u)| \le Cs^{-1} \quad \forall\, s > \varepsilon^{-1}.$$

Полученная оценка совместно с (12) дает

$$|J(u_s) - J(u)| \le |J(u_s) - J_s(u_s)| + |J_s(u_s) - J(u)| \le 2Cs^{-1}$$

для любого натурального $s > \varepsilon^{-1}$, из чего немедленно следует, что $\lim_{s\to\infty} J(u_s) = J(u) = \inf_X J(v)$, и, значит, (u_s) — минимизирующая последовательность функционала J на X.

В силу оценки (6s) для любого $s > \varepsilon^{-1}$

$$\|Lu_s\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |g_s(x, u_s(x))|^q dx \right)^{1/q} \le \|a_1\|_{L_q(\Omega)},$$

что в соответствии с результатами Агмона – Дуглиса – Ниренберга (L_p-теория) [15, с. 133] приводит к ограниченности в $W_q^2(\Omega)$ последовательности (u_s). Поскольку пространство $W_q^2(\Omega)$ рефлексивно, то последовательность (u_s) содержит слабо сходящуюся к некоторому u_0 в $W_q^2(\Omega)$ последовательность (u_{s_l}). Учитывая компактность вложения $W_q^2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$ и $C(\overline{\Omega})$ (по условию $q > n/2,\ n \geq 2$) [16, с. 106], получаем, что (u_{s_l}) сильно сходится к u_0 в X и $C(\overline{\Omega})$. Функционал J непрерывен на X, поэтому $J(u_0) = \lim_{l\to\infty} J(u_{s_l}) = \inf_X J(v)$. Отсюда с учетом теоремы 1 заключаем, что u_0 — полуправильное решение соответствующей краевой задачи. Если нижняя грань функционала J на X достигается в единственной точке $u_0 \in X$, то $u_s \to u_0$ в $C(\overline{\Omega})$, поскольку в этом случае из любой подпоследовательности последовательности (u_s) можно выделить подпоследовательность, которая сильно сходится к u_0 в $C(\overline{\Omega})$. Теорема 2 полностью доказана.

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Уравнения с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. – 1979. – **248**, № 5. – С. 1056 – 1059.
2. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Там же. – 1976. – **226**, № 3. – С. 506 – 509.
3. *Павленко В. Н.* Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами // Вестн. Челябин ун-та. Математика. Механика. – 1994. – № 1(2). – С. 87 – 95.
4. *Павленко В. Н.* Вариационный метод для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 4. – С. 138.
5. *Chang K. C.* Variational methods for nondifferentiable functional and their applications to partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1981. – **80**, № 1. – P. 102 – 129.
6. *Chang K. C.* The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities // Communs Pure and Appl. Math. – 1980. – **33**, № 2. – P. 117 – 146.
7. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями // Тр. Всесоюзн. конф. по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию академика И. Г. Петровского. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – С. 346 – 347.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 540 с.
9. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
10. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
11. *Павленко В. Н.* Уравнения и вариационные неравенства с разрывными нелинейностями: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 1995. – 35 с.
12. *Глевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
13. *Павленко В. Н.* О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 1991. – 27, № 3. – С. 520 – 526.
14. *Павленко В. Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 729 – 736.
15. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 205 с.
16. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 334 с.
17. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
18. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1397 – 1402.
19. *Павленко В. Н.* Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. – 1973. – № 6. – С. 21 – 29.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1966. – Т. 2. – 1063 с.
21. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Получено 21.11.96