УДК 519.21

Л. І. Ясинська, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Юрченко, асп. (Чернівец. ун-т)

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Stability and instability, with respect to the quadratic mean, of the trivial solution of systems of stochastic differential equations with random operators is considered in the critical case.

Розглядається стійкість та нестійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку систем стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами в критичному випадку.

Введемо такі позначення: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — імовірнісний простір, $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — потік σ-алгебр, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$; $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{D}_n := \mathbb{D}_n([-r, 0])$ — простір Скорохода неперервних справа функцій $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі (НПЛГ) з рівномірною нормою

$$\| \varphi(t) \| := \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|, \tag{1}$$

$\mathfrak{N}_1$ — простір неперервних на $[0, \infty)$ дійсних функцій $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\int_0^\infty |2\alpha(t) + \alpha^2(t)|\, dt < \infty;$$

$\mathfrak{N}_2$ — простір неперервних додатних функцій $\beta(t) \in \mathbb{R}^n$, для яких

$$\int_0^\infty (\beta(t) + \beta^2(t))\, dt < +\infty.$$

Розглянемо випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^n$, що визначається рівнянням

$$dx(t) = a(x_t)dt + [I + B(t)]\, dw_0(t)\, b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)) + \\ + [I + D(t)] \int_{\mathbb{U}} c\,(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u)\, \tilde{\nu}_0(du, dt) \tag{2}$$

з початковими умовами

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{3}$$

де $x_t := \{x(t+\theta), \theta \in [-r, 0]\}$; лінійні неперервні функції

$$a(\cdot):\ \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n; \quad b(\cdot,\cdot,\cdot):\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

$$c(\cdot,\cdot,\cdot,u):\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n,\ \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n,$$

з операторами $A_i(\cdot)$, $B_i(\cdot)$, $D_i(\cdot)$: $\mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n$ вигляду

$$A_i(x_t) := \int_{-r}^{0} x(t+\theta)\, d\beta_i(\theta),$$

$$B_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \alpha_i\, dw_i(\theta)\, x(t+\theta), \tag{4}$$

$$D_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \int_{\mathbb{U}} \gamma_i(\theta, u)\, x(t+\theta)\, \tilde{\nu}_i(du, d\theta), \tag{5}$$

де $\beta_i(t)$ — функції обмеженої варіації; $\alpha_i(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \in \mathfrak{N}_{\mathbb{R}_+}$ вимірні локально обмежені відносно t; $\gamma_i(t, u)\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ вимірні відносно $\mathfrak{N}_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{U}$ локально обмежені відносно t та

$$\int_{\mathbb{U}} |\gamma_i(t, u)|^2\, \Pi_i(du), \quad i = 1, 2.$$

Матриці $w_i(t) := \left\{ w_{kl}^{(i)}(t),\ t \geq 0 \right\}$, $k, l = \overline{1, n}$, складаються з одновимірних вінерівських процесів, попарно незалежних між собою; $\tilde{\nu}_i(du, dt)$, $i = 0, 1, 2$, — центровані пуассонові міри, незалежні між собою та від елементів матриць $w_i(t)$ [1];

$$B(t) := \operatorname{diag}\{b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)\}, \quad b_i \in \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2,\ i = \overline{1, n};$$

$$D(t) := \operatorname{diag}\{d_1(t), d_2(t), \ldots, d_n(t)\}, \quad d_i \in \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2,\ i = \overline{1, n}.$$

Під сильним розв'язком задачі (2), (3) розуміємо сепарабельний процес $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \infty)$, визначений при $t \in [-r, 0]$ співвідношенням (3), вимірний відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{L}_t$ ($\mathcal{L}_t$ — σ-алгебра борелевих множин відрізка $[-r, t]$) такий, що при довільних $t \in (0, \infty)$ майже скрізь виконується співвідношення

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t a(x_s)\, ds\ +$$

$$+ \int_0^t [I + B(s)]\, dw_0(s)\, b\big(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)\big)\ +$$

$$+ \int_0^t [I + D(s)] \int_{\mathbb{U}} c\,(A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u)\, \tilde{\nu}_0(du, ds). \tag{6}$$

Зауважимо, що коефіцієнти a, b, c задані на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де визначені $w_i(t)$, $\tilde{\nu}_i$, $i = 0, 1, 2$. Для того щоб мати стохастичні диференціали та інтеграли, треба мати на цьому імовірнісному просторі потік σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, з яким узгоджені вінерівські процеси та випадкові центровані міри [1–3].

Умови, які задовольняють $a(\cdot)$, $b(\cdot, \cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot, \cdot, u)$, $B(t)$, $D(t)$ та $\varphi(t)$, гарантують існування та єдиність сильного розв'язку задачі Коші (2), (3) [2].

Фундаментальний розв'язок детермінованого диференціально-функціонального рівняння

$$dy(t) = a(y_t)\,dt, \quad t \geq 0, \tag{7}$$

позначимо через $h(t)$: $h(0) = I$, $h(s) = 0$ для всіх $s \in [-r, 0)$;

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \Lambda^{-1}(\lambda)\, d\lambda \tag{8}$$

для $t \geq 0$, де $\Lambda(t) = \lambda I + a(e^{\lambda\theta})$, Γ — контур, що охоплює всі нулі квазіполінома $\det \Lambda(\lambda)$ [4].

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) *тривіальний розв'язок рівняння* (7) *експоненціально стійкий;*
2) *корінь Перрона* [5] *матриці*

$$Q = \int_0^\infty b(A_1^{②}(h_t), B_1^{②}(h_t), D_1^{②}(h_t))\, dt \; +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} c\,(A_2^{②}(h_t), B_2^{②}(h_t), D_2^{②}(h_t), u)\, \Pi(du)\, dt, \tag{9}$$

дорівнює одиниці.

Тоді тривіальний розв'язок задачі (2), (3):

I) *стійкий у середньому квадратичному, якщо* $\{ b_i(t),\ d_i(t),\ i = \overline{1,n} \} \subset \subset \mathfrak{N}_1$ *та монотонно спадають;*

II) *нестійкий у середньому квадратичному, якщо* $\{ b_i(t),\ d_i(t),\ i = \overline{1,n} \} \subset \subset \mathfrak{N}_2$ *та монотонно зростають.*

При цьому введено такі позначення:

$$A_i^{②}(h_t) := \left[\int_{-r}^0 h(t+\theta)\, d\beta_i(\theta) \right]^{②}, \tag{10}$$

$$B_i^{②}(h_t) := \int_{-r}^0 \alpha_i^{②}(\theta)\, h^{②}(t+\theta)\, d\theta, \tag{11}$$

$$D_i^{②}(h_t) := \int_{-r}^0 \int_{\mathbb{U}} \gamma_i^{②}(\theta, u)\, h^{②}(t+\theta)\, \Pi(du)\, d\theta, \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

де ② означає, що кожний елемент вектора або матриці береться у квадраті.

Доведення. Рівняння (6) еквівалентне інтегральному рівнянню [6, 7]

$$x(t) = y(t) + \int_0^t h(t-s)[I + B(s)]\, dw_0(s)\, b(A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s)) \; +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} h(t-s)[I + D(s)]\, c\,(A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u)\, \tilde{\nu}_0(du, ds), \tag{13}$$

де $y(t)$ — будь-який розв'язок детермінованого рівняння (7) з початковою умовою (3).

Запишемо рівняння (13) в момент часу $t+\theta$ і застосуємо до одержаних рівнянь відповідно оператори $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ та $c(\cdot, \cdot, \cdot, u)$:

$$b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)) = b(A_1(y_t), B_1(y_t), D_1(y_t)) \; +$$

$$+ \int_0^t b(A_1(h_{t-s}), B_1(h_{t-s}), D_1(h_{t-s})) \times$$

$$\times [I + B(s)]\, dw_0(s)\, b(A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s)) \; +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} b(A_1(h_{t-s}), B_1(h_{t-s}), D_1(h_{t-s}))\,[I + D(s)] \times$$

$$\times\, c(A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u)\, \tilde{\nu}_0(du, ds),$$

$$c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u) = c(A_2(y_t), B_2(y_t), D_2(y_t), u) +$$

$$+ \int_0^t c(A_2(h_{t-s}), B_2(h_{t-s}), D_2(h_{t-s}), u) \times$$

$$\times [I + B(s)]\, dw_0(s)\, b(A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s)) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c(A_2(h_{t-s}), B_2(h_{t-s}), D_2(h_{t-s}), u)\,[I + D(s)] \times$$

$$\times\, c(A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u)\, \tilde{\nu}_0(du, ds).$$

Піднесемо до квадрату одержані вище рівняння, застосуємо операцію математичного сподівання, використаємо властивості стохастичних інтегралів [1] та проінтегруємо друге рівняння відносно $u \in \mathbb{U}$. Маємо

$$\mu_b(t) = b^{②}(y_t) + \int_0^t b^{②}(h_{t-s})\, \mu_b(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t b^{②}(h_{t-s})\, B^+(s)\, \mu_b(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} b^{②}(h_{t-s})\, D^+(s)\, \mu_c(t, u)\, \Pi(du)\, ds +$$

$$+ \int_0^t b^{②}(h_{t-s})\, \mu_c(t, u)\, \Pi(du)\, ds, \tag{14}$$

$$\int_{\mathbb{U}} \mu_c(t, u)\, \Pi(du) = \int_{\mathbb{U}} c^{②}(y_t, u)\, \Pi(du) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c^{②}(h_{t-s}, u)\, \mu_b(s)\, \Pi(du)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c^{②}(h_{t-s}, u)\, B^+(s)\, \mu_b(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c^{②}(h_{t-s}, u_1) \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t, u)\, \Pi(du)\, \Pi(du_1)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c^{②}(h_{t-s}, u_1)\, D^+(s) \int_{\mathbb{U}} \mu_c(s, u)\, \Pi(du_1)\, \Pi(du)\, ds, \tag{15}$$

де

$$\mu_b(t) = \mathbb{E}\{b^{②}(x_t)\}; \quad \mu_c(t, u) = \mathbb{E}\{c^{②}(x_t, u)\};$$

$$b^{②}(x_t) = b(A_1^{②}(x_t), B_1^{②}(x_t), D_1^{②}(x_t)); \tag{16}$$

$$c^{②}(x_t, u) = c(A_2^{②}(x_t), B_2^{②}(x_t), D_2^{②}(x_t), u) \tag{17}$$

(аргументи визначені за формулами (10), (11), (12); $b^{②}(y_t)$, $c^{②}(y_t, u)$; $b^{②}(h_t)$, $c^{②}(h_t, u)$ визначені за формулами (16), (17));

$$B^+(t) = \operatorname{diag}\{2b_1(t) + b_1^2(t), \ldots, 2b_n(t) + b_n^2(t)\},$$

$$D^+(t) = \operatorname{diag}\{2d_1(t) + d_1^2(t), \ldots, 2d_n(t) + d_n^2(t)\}.$$

Складемо рівняння (14) та (15) та позначимо

$$k(t) = b^{②}(h_t) + \int_{\mathbb{U}} c^{②}(h_t, u)\, \Pi(du);$$

$$m(t) = \mu_b(t) + \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t, u)\, \Pi(du);$$

$$f(t) = b^{②}(y_t) + \int_{\mathbb{U}} c^{②}(y_t, u)\, \Pi(du).$$

Тоді

$$m(t) = f(t) + \int_0^t k(t-s)\, m(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t k(t-s)[B^+(s) + D^+(s)]\, m(s)\, ds. \tag{18}$$

Зауважимо, що $f(t)$ та $k(t)$ задовольняють нерівності

$$|f(t)| + \|k(t)\| \le N \exp(-\gamma t), \quad t \ge 0, \quad N > 0, \quad \gamma > 0, \tag{19}$$

внаслідок умови 1 теореми 1.

Легко бачити, що рівняння (18) можна подати у вигляді

$$m(t) = f(t) + \int_0^t H(t-s)\, f(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t H(t-s)[B^+(s) + D^+(s)]\, m(s)\, ds, \quad t \ge 0, \tag{20}$$

де

$$H(t) = k(t) + \int_0^t k(t-s)\, k(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t k(t-s)\, k(s-s_1)\, k(s_1)\, ds\, ds_1 + \ldots .$$

Якщо використати властивості перетворення Лапласа [8], то з умови 2 теореми 1 одержуємо співвідношення $H(t) = A + \Delta(t)$, де матриця $A = \{a_{ij}\}$, а елементи $\delta_{ij}(t)$ матриці $\Delta(t) := \{\delta_{ij}(t)\}$ — неперервні функції, для яких

$$\lim_{t \to +\infty} \delta_{ij}(t) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{21}$$

Тоді з (7) випливає нерівність [9]

$$m(t) \le C + L \int_0^t [\|B^+(s)\| + \|D^+(s)\|] \, m(s) \, ds, \quad t \ge 0,$$

де

$$C := \sup_{t \ge 0} \int_0^t H(t-s) f(s) \, ds; \quad L = \sup_{t \ge 0} H(t).$$

А значить, згідно з лемою Гронуолла–Беллмана [4] маємо оцінку

$$m(t) \le C \exp\left\{ L \int_0^t [\|B^+(s)\| + \|D^+(s)\|] \, ds \right\}, \quad t \ge 0. \tag{22}$$

Доведення *твердження I*. Нехай $\{ b_i(t), \, d_i(t), \, i = \overline{1, n} \} \subset \mathfrak{R}_1$, тоді згідно з (22)

$$\sup_{t \ge 0} |m(t)| < \infty.$$

Підносячи обидві частини рівняння (13) до квадрату та застосовуючи операцію математичного сподівання, одержуємо

$$\mu(t) = y^{②}(t) + \int_0^t h^{②}(t-s) [I + B^+(s) + D^+(s)] \, m(s) \, ds, \quad t \ge 0, \tag{23}$$

де $\mu(t) = \mathbb{E}\left\{ x^{②}(t) \right\}$.

Зауважимо, що з умови 1 теореми 1 випливає нерівність [9]

$$|y^{②}(t)| + \|h^{②}(t)\| \le M \exp\{-\gamma_1 t\}, \quad t \ge 0,$$

для деяких $N > 0$ та $\gamma_1 > 0$.

Згідно з записаною вище нерівністю

$$\sup_{t \ge 0} |m(t)| < \infty, \quad \int_0^\infty \|B^+(s)\| \, ds < \infty, \quad \int_0^\infty \|D^+(s)\| \, ds < \infty,$$

звідки

$$\sup_{t \ge 0} |\mu(t)| < \infty.$$

Це й завершує доведення твердження I, оскільки $\varphi(t) \in \mathbb{D}_0$ довільна, а стійкість розв'язків лінійних детермінованих систем еквівалентна обмеженості кожного розв'язку [10].

Доведення *твердження* II. Виберемо $\{ b_i(t), d_i(t), i = \overline{1, n} \} \subset \mathfrak{R}_2$ та початкову функцію $\varphi(t) \in \mathbb{D}_0$ розв'язку $y(t)$ рівняння (7) таку, що

$$\int_0^\infty f(t) \, dt > 0, \tag{24}$$

де

$$f(t) := b^{②}(y_t) + \int_{\mathbb{U}} c^{②}(y_t, u)\,\Pi(du).$$

Нерівність (23) справедлива завдяки умові 1 теореми 1.

Розглянемо рівняння (20). Якщо врахувати співвідношення (19), (21) та (24), то неважко бачити, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t H(t-s)\,f(s)\,ds \geq 0.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \int_0^t H(t-s)\left[B^+(s) + D^+(s)\right]\left[\int_0^t H(s-s_1)\,f(s_1)\,ds_1\right] ds \right\| = \infty, \tag{25}$$

що випливає з $\{b_i(t),\ d_i(t)\} \subset \mathfrak{R}_2$.

Очевидна нерівність

$$m(t) \geq \int_0^t H(t-s)\,f(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^t H(t-s)\left[B^+(s) + D^+(s)\right]\left[\int_0^s H(s-s_1)\,f(s_1)\,ds_1\right] ds, \quad t \geq 0;$$

тоді з (25) маємо

$$\lim_{t\to\infty} |m(t)| = \infty. \tag{26}$$

З співвідношень (23) та (25) маємо $\lim\limits_{t\to\infty} |\mu(t)| = \infty$, що й завершує доведення теореми 1.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) *тривіальний розв'язок рівняння (7) експоненціально стійкий;*

2) *корінь Перрона матриці*

$$Q_1 := \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty b_j(A_{1,j}^{②}(h_t), B_{1,j}^{②}(h_t), D_{1,j}^{②}(h_t))\,dt +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \int_0^\infty \cdot \int_{\mathbb{U}} c_m(A_{2,m}^{②}(h_t), B_{2,m}^{②}(h_t), D_{2,m}^{②}(h_t), u)\,\Pi_m(du)\,dt$$

дорівнює одиниці.

Тоді тривіальний розв'язок системи

$$dx(t) = a(x_t)dt + \sum_{j=1}^{N} \left[I + B_j(t)\right] dw_{0,j}(t)\,b_j(x_t) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \left[I + D_m(t)\right] \int_{\mathbb{U}} c_m(x_t, u)\,\tilde{\nu}_{0,m}(du, dt)$$

стійкий у середньому квадратичному, якщо елементи матриці $\max\{B_j(t), D_j(t)\}$ належать $\mathfrak{R}_1$ *та монотонно спадають;*

нестійкий у середньому квадратичному, якщо елементи матриці $\min\{B_j(t), D_j(t)\}$ належать $\mathfrak{R}_2$ *та монотонно зростають.*

Тут під $\max\{B_j(t), D_j(t)\}$ розуміємо точну нижню границю матриць-функцій $B(t)$, для яких $B(t) \geq B_j(t)$, $B(t) \geq D_m(t)$ $\forall\, t \geq 0$; під $\min\{B_j(t), D_j(t)\}$ розуміємо точну верхню границю матриць-функцій $B(t)$, для яких

$$B(t) \leq B_j(t), \quad B(t) \leq D_m(t), \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, M}.$$

***Зауваження* 1.** Якщо рівняння (2) має коефіцієнти

$$b(\cdot,\cdot,\cdot) = b(x_t)\colon \mathbb{D}_0 \to \mathbb{R}^n; \quad c(\cdot,\cdot,\cdot,u) = c(x_t, u)\colon \mathbb{D}_0 \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n,$$

то умова (9) набуває вигляду

$$Q = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |b(e^{is\theta})|^2 [\Lambda^{-1}(is)]_+^{②}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} |c(e^{is\theta}, u)|^2 [\Lambda^{-1}(is)]_+^{②}\, \Pi(du)\, ds,$$

де „+" означає, що елементи матриці взяті за модулем.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. *Ясинский В. К.* Поведение на бесконечности решений стохастических дифференциальных уравнений со случайными операторами // Дифференциальные уравнения и применение (I): Труды третьей конференции (Руссе, 26 авг. – 2 сент. 1985 г.). – Руссе, 1987. – С. 487–490.
3. *Mizel V. I., Trutzer V.* Stochastic Hereditary Equations: Existence and Asymptotic Stability // Integral Equations. – 1984. – Vol. 7. – P. 1–72.
4. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
6. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
7. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 398 с.
8. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
9. *Свердан М. Л., Ясинский В. К.* Устойчивость решений линейных стохастических функционально-дифференциальных систем в критическом случае // Изв. вузов. – 1982. – **241**, № 6. – С. 53–56.
10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

Одержано 26.04.94