УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
М. В. Савчук (Ін-т підготовки кадрів держ. служби зайнятості України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ ЗИГМУНДА СЕРЕДНІМИ ФЕЙЄРА

We obtain an asymptotic equality for the upper bounds of deviations of Fejér means on the Zygmund class of functions holomorphic in the unit disk.

Установлено асимптотическое равенство для верхних граней отклонений средних Фейера в классе Зигмунда функций, голоморфных в единичном круге.

Розглянемо клас $\mathcal{Z}$ функцій

$$f(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\widehat{f}_k z^k, \quad \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

голоморфних у крузі $\mathbb{D} := \{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$, для яких

$$B(f) := \sup\{(1-\varrho^2)M(\varrho, f'')\colon \varrho\in[0,1)\}\le 1,$$

де $M(\varrho, f'') = \max_{t\in[0,2\pi]}|f''(\varrho e^{it})|$.

А. Зигмунд [1] показав, що для голоморфної функції f умова $B(f)<\infty$ виконується тоді і тільки тоді, коли f є неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$ і

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(e^{i(x-h)}) - 2f(e^{ix}) + f(e^{i(x+h)})| = O(h),\ h\to 0+\,.$$

Тому клас $\mathcal{Z}$ можна розглядати як „голоморфну частину” класу Зигмунда, який складається з неперервних 2π-періодичних функцій $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, що задовольняють умову

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|g(x-h)-2g(x)+g(x+h)|\le Kh,\ h\ge 0, \tag{1}$$

де K — певна стала, не залежна від g і h.

У даній роботі досліджується величина

$$\mathcal{F}_n\left(\mathcal{Z}; A(\overline{\mathbb{D}})\right) := \sup\left\{\|f-\sigma_n(f)\|\colon f\in\mathcal{Z}\right\},$$

де

$$\sigma_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\widehat{f}_k z^k$$

— середні Фейєра функції f, $A(\overline{\mathbb{D}})$ — диск-алгебра, тобто простір голоморфних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ функцій f, наділений нормою $\|f\| := \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|f(z)|$.

Теорема. *При $n\to\infty$ справджується асимптотична рівність*

$$\mathcal{F}_n\left(\mathcal{Z}; A(\overline{\mathbb{D}})\right) = \frac{\ln n}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2}$$

Це твердження є суміжним з одним результатом О. В. Єфімова [2] про асимптотичну рівність для верхніх меж відхилень середніх Фейєра на спряженому класі дійснозначних 2π-періодичних функцій, які задовольняють умову (1).

Теорема випливає з лем 1 і 2, які мають і самостійний інтерес.

Позначимо $f_\varrho(z) := f(\varrho z)$, $\Delta_2(f, x, z) := f(e^{ix}z) - 2f(z) + f(e^{-ix}z)$.

Лема 1. *Нехай* $0 \le \varrho < 1$ *і* $n \ge 3$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$

$$\|f - f_\varrho\| = (1-\varrho)n\|f - \sigma_n(f)\| + \varepsilon(f, \varrho, n),$$

де

$$|\varepsilon(f,\varrho,n)| \le C(1 + (1-\varrho)n)^2 n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \|\Delta_2(f, x, \cdot)\| dx,$$

C — *стала, не залежна від* f, ϱ *і* n.

Лема 1 є аналогом для голоморфних функцій одного твердження В. В. Жука [3], доведеного для неперервних 2π-періодичних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Лема 2. *Для будь-якого* $\rho \in [0, 1)$

$$\max\{\|f - f_\varrho\|\colon f \in \mathcal{Z}\} = \frac{1}{2}\left(\ln 4 - (1+\varrho)\ln(1+\varrho) - (1-\varrho)\ln(1-\varrho)\right).$$

***Доведення леми* 1.** Відомо [4], що для будь-якої функції g, голоморфної в $\overline{\mathbb{D}}$,

$$|g(z) - g_\varrho(z)| \le (1-\varrho)\|g'\| \quad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}},\ \varrho \in [0,1)$$

і

$$\left|g(z) - g_\varrho(z) - (1-\varrho) z g'_\varrho(z)\right| \le \frac{1}{2}(1-\varrho)^2\|g''\| \quad \forall\, z \in \overline{\mathbb{D}},\ \varrho \in [0,1).$$

Тому

$$\left| \|g - g_\varrho\| - (1-\varrho)\left\|g'\right\| \right| \le \left| \|g - g_\varrho\| - (1-\varrho)\left\|g'_\varrho\right\| \right| + (1-\varrho)\left| \left\|g'_\varrho\right\| - \left\|g'\right\| \right| \le$$

$$\le \left(\frac{(1-\varrho)^2}{2} + (1-\varrho)^2 \right) \|g''\| \le \frac{3}{2}(1-\varrho)^2 \|g''\| \quad \forall\, \varrho \in [0,1). \tag{3}$$

Нехай $P_n = P_n(f)$ — многочлен найкращого наближення порядку n функції f в $A(\overline{\mathbb{D}})$, тобто

$$\|f - P_n\| = E_n(f) := \inf \|f - p_n\|,$$

де інфімум береться по множині всіх алгебраїчних многочленів p_n степеня не більшого за $n-1$.

Тоді, позначивши

$$\varepsilon(f, \varrho, n) := \|f - f_\varrho\| - \delta\|f - \sigma_n(f)\|,\ \delta := (1-\varrho)n,$$

з урахуванням співвідношення (3), тотожності $P_n(z) - \sigma_n(P_n)(z) = zP'_n(z)/n$ і співвідношень $\|f_\varrho\| \le \|f\|$, $\|\sigma_n(f)\| \le \|f\|$ одержуємо нерівності

$$|\varepsilon(f, \varrho, n)| \le \left| \|f - f_\varrho\| - \|P_n - (P_n)_\varrho\| \right| + \left| \delta \|f - \sigma_n(f)\| - \|P_n - (P_n)_\varrho\| \right| \le$$

$$\leq 2E_n(f) + \delta \left| \|f - \sigma_n(f)\| - \|P_n - \sigma_n(P_n)\| \right| + \left| \|P_n - (P_n)_\varrho\| - \delta \|P_n - \sigma_n(P_n)\| \right| \leq$$

$$\leq 2E_n(f) + 2\delta E_n(f) + \left| \|P_n - (P_n)_\varrho\| - (1-\varrho) \left\|P_n'\right\| \right| \leq \alpha(f, \varrho, n),$$

де

$$\alpha(f, \varrho, n) := 2(1+\delta)E_n(f) + \frac{3}{2}(1-\varrho)^2\|P_n''\|. \tag{4}$$

Оцінимо тепер $\alpha(f, \varrho, n)$.

Для величини $E_n(f)$ за теоремою Л. В. Тайкова [5] справджується нерівність

$$E_n(f) \leq \frac{n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \|\Delta_2(f, x, \cdot)\| dx =: \frac{1}{\pi-2}\Phi_n(f) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Переходячи до оцінки величини $\|P_n''\|$, розглянемо тотожність

$$z^2 P_n''(z) = -zP_n'(z) - (P_n)_\theta''(z),$$

в якій

$$(P_n)_\theta'' = ((P_n)_\theta')_\theta',\ (P_n)_\theta'(z) := \frac{\partial}{\partial\theta} P_n(\varrho e^{i\theta}),\ z = \varrho e^{i\theta}.$$

Оскільки

$$P_n'(e^{ix}) = \frac{-1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (P_n)_\theta''\left(e^{iy}\right) e^{-iy} \left(\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{\cos\nu(x-y)}{\nu+1}\right) dy$$

і, як показали В. Рогозинський і Г. Сегьо [6],

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\cos\nu y}{\nu+1} \geq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ y \in \mathbb{R},$$

то $\|P_n'\| \leq \|(P_n)_\theta''\|$. Тому

$$\|P_n''\| \leq 2\|(P_n)_\theta''\|. \tag{6}$$

Оцінимо тепер $\|(P_n)_\theta''\|$. З цією метою для спрощення записів позначимо $Q_n(x) := P_n(e^{ix})$, $\tilde{\Delta}_2(f, t, x) := \Delta_2(f, t, e^{ix})$ і розглянемо тригонометричний многочлен порядку $n-1$

$$F(x) := \frac{n}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \left(Q_n\left(x+t\right) + Q_n\left(x-t\right)\right)(1 - \sin nt) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здиференціювавши підінтегральний вираз двічі по змінній x, а потім двічі зінтегрувавши по змінній t частинами, одержимо

$$F''(x) = \frac{n}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \left(Q_n''\left(x+t\right) + Q_n''\left(x-t\right)\right)(1 - \sin nt) dt =$$

$$= \frac{n^2}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \big(Q_n'(x+t) - Q_n'(x-t)\big) \cos ntdt = \frac{n^3}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \tilde{\Delta}_2(Q_n, t, x) \sin ntdt.$$

Звідси випливає співвідношення

$$\|F''\| \leq \frac{n^3}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \|\tilde{\Delta}_2(Q_n, t, \cdot)\| \sin ntdt. \tag{7}$$

Зауважимо, що

$$F(x) - Q_n(x) = \frac{n}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \tilde{\Delta}_2(Q_n, t, x)(1 - \sin nt)dt.$$

Оскільки $F - Q_n$ є тригонометричним поліномом порядку $n-1$, то за нерівністю Бернштейна

$$\|(F - Q_n)''\| \leq n^2 \|F - Q_n\| \leq \frac{n^3}{\pi - 2} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \|\tilde{\Delta}_2(Q_n, t, \cdot)\|(1 - \sin nt)dt. \tag{8}$$

Додавши нерівності (7) і (8), а потім використавши співвідношення (5), одержимо

$$\|(P_n)''_\theta\| \leq \|F''\| + \|(Q_n - F)''\| \leq \frac{n^2}{\pi - 2}\Phi_n(Q_n) \leq \frac{n^2}{\pi - 2}\Phi_n(f) + \frac{2\pi}{\pi - 2} n^2 E_n(f) \leq$$

$$\leq \frac{n^2}{\pi - 2}\Phi_n(f) + \frac{2\pi}{(\pi - 2)^2} n^2 \Phi_n(f) = \frac{3\pi - 2}{(\pi - 2)^2} n^2 \Phi_n(f). \tag{9}$$

Об'єднавши співвідношення (4) – (6) і (9), отримаємо

$$|\varepsilon(f, \varrho, n)| \leq |\alpha(f, \varrho, n)| \leq \left(\frac{2}{\pi - 2} + \frac{2}{\pi - 2}\delta + \frac{3(3\pi - 2)}{(\pi - 2)^2}\delta^2 \right) \Phi_n(f) \leq$$

$$\leq C(1 + \delta)^2 \Phi_n(f), \quad C := \frac{3(3\pi - 2)}{(\pi - 2)^2}.$$

Лему 1 доведено.

Зауваження. Всі міркування, викладені в доведенні леми 1, залишаються правильними при формальній заміні $A(\overline{\mathbb{D}})$ на $H_p, 1 \leq p \leq \infty$ і $\|\cdot\|$ на $\|\cdot\|_{H_p}$. Тому лема 1 має місце і для функцій із просторів Гарді $H_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Доведення леми 2. Оскільки для будь-якої функції $f \in \mathcal{Z}$

$$f_\varrho(e^{it}) = e^{i2t} \int\limits_0^{\varrho} \int\limits_0^{\varrho_1} f''(re^{it}) dr d\varrho_1 \quad \forall\ \varrho \in [0, 1],\ t \in [0, 2\pi],$$

то

$$f(e^{it}) - f_\varrho(e^{it}) = e^{i2t} \int\limits_\varrho^1 \int\limits_0^{\varrho_1} f''(re^{it}) dr d\varrho_1.$$

Звідси випливає співвідношення

$$\|f - f_\varrho\| \leq \int\limits_\varrho^1 \int\limits_0^{\varrho_1} M(r, f'')dr d\varrho_1 \leq \int\limits_\varrho^1 \int\limits_0^{\varrho_1} \frac{dr}{1-r^2} dr d\varrho_1 = \frac{1}{2} \int\limits_\varrho^1 \ln \frac{1+\varrho_1}{1-\varrho_1} d\varrho_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln 4 - (1+\varrho)\ln(1+\varrho) - (1-\varrho)\ln(1-\varrho) \right). \qquad (10)$$

Легко бачити, що функція

$$f_*(z) := \frac{1}{2}((1+z)\ln(1+z) + (1-z)\ln(1-z)) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{z^{2(k+1)}}{(k+1)(2k+1)}$$

належить $\mathcal{Z}$ і для неї співвідношення (10) перетворюється в рівність.

Доведення теореми. В [1] показано, що

$$L := \sup \left\{ \frac{\|\Delta_2(f, x, \cdot)\|}{x} : x \in [0,1], f \in \mathcal{Z} \right\} < \infty.$$

Враховуючи це, згідно з лемами 1 і 2, для будь-якого натурального $n \geq 3$ одержимо оцінку

$$\mathcal{F}_n\left(\mathcal{Z}; A(\overline{\mathbb{D}})\right) \leq \sup\{\|f - f_{1-1/n}\| \colon f \in \mathcal{Z}\} + \sup\{|\varepsilon(f, 1-1/n, n)| \colon f \in \mathcal{Z}\} \leq$$

$$\leq \frac{\ln n}{2n} + \frac{1}{2}(\ln 4 - (2-1/n)\ln(2-1/n)) + \frac{\pi^2 CL}{2n} \leq$$

$$\leq \frac{\ln n}{2n} + \frac{1}{n}\left(\frac{\pi^2 CL}{2} + \frac{1}{2}(\ln 2 + 1) \right). \qquad (11)$$

Для оцінки знизу візьмемо функцію f_*. Маємо

$$\mathcal{F}_n\left(\mathcal{Z}; A(\overline{\mathbb{D}})\right) \geq \|f_* - \sigma_n(f_*)\| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=[n/2]}^\infty \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} >$$

$$> \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{k} > \frac{1}{2n} \ln\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1 \right) > \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{n-1}{2} \right) \quad \forall\, n \geq 3. \qquad (12)$$

Об'єднуючи співвідношення (11) і (12), при $n \to \infty$ одержуємо (2).

1. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Math. J. – 1945. – **12**. – P. 47 – 76.
2. *Ефимов А. В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 1. – С. 81 – 116.
3. *Жук В. В.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи средних Фейера и Пуассона ее ряда Фурье // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 1. – С. 21 – 32.
4. *Савчук В. В.* Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора – Абеля – Пуассона // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1253 – 1260.
5. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки – 1977. – **22**, № 2. – С. 285 – 295.
6. *Rogosinski W., Szegö G.* Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben // Math. Z. – 1928. – **28**. – S. 73 – 94.

Одержано 28.02.12