УДК 517.9

Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

КЛАССИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИЛЬНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

We prove the existence of a classical solution global in time for the first initial boundary-value problem for nonlinear strongly degenerate parabolic equation.

Доведено існування в цілому за часом класичного розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного рівняння з сильним виродженням.

1. Введение. Пусть $s \in (0, 1)$, $\Omega = (0, l)$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, где l, T — произвольные положительные числа.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} v_t = v^{1+s} v_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T; \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

при некоторых предположениях на гладкость начальной функции $v_0(x)$ и условиях

$$v_0(x) > 0, \quad x \in \Omega, \quad v_0'(0) = \mu_0 > 0, \quad v_0'(l) = -\nu_0 < 0. \tag{2}$$

Равенство нулю искомой функции $v(x, t)$ на концах отрезка $[0, l]$ делает уравнение задачи (1) сильно вырожденным. Мы докажем, что для любого $T > 0$ существует единственное классическое решение задачи (1) (определения функциональных пространств приведены ниже). Существование обобщенного решения задачи вида (1) при менее ограничительных условиях на v_0 доказано в работе [1].

Постановка задачи (1) возникает следующим образом (см. [2]). Пусть неотрицательная функция u_0 имеет конечный носитель $[\zeta_0, \eta_0]$. В задаче Коши для уравнения пористой среды $(m > 1)$

$$u_t = (u^m)_{yy}, \quad y \in R, \quad t > 0; \quad u(y, 0) = u_0(y), \quad y \in R, \tag{3}$$

выполним замену переменных

$$x = \int_{-\infty}^{y} u(z, t)\, dz, \quad l = \int_{\zeta_0}^{\eta_0} u_0(z)\, dz.$$

Тогда функция

* Частично поддержана грантом INTAS 00136 и грантом 01.07/00130 Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

$$v(x,t) = c_m u^m(y,t), \qquad v_0(x) = c_m u_0^m(y), \qquad c_m = m^{m/(m+1)},$$

будет решением задачи (1) при $s = 1/m$.

Известно, что при компактности носителя начального условия в задаче (3) решение имеет компактный носитель при всех $t > 0$. Пусть при $\zeta(t) < y < \eta(t)$ функция $u(y,t)$ положительна $(\zeta(0) = \zeta_0, \eta(0) = \eta_0)$. Кривые $\zeta(t), \eta(t)$ называются свободными границами и находятся в процессе решения задачи. После замены переменных мы приходим к задаче в фиксированной области. Если функция $v(x,t)$ найдена, то, например, левая граница носителя решения задачи (3) имеет вид

$$\zeta(t) = \zeta_0 - c_m^{-1} \int_0^t v_x(0,\tau)\, d\tau .$$

В приложении к задаче (3) существование классического решения задачи (1) означает квалифицированную гладкость свободной границы вплоть до $t = 0$ в зависимости от гладкости начальных условий (см. [3]). Ограничения (2) с точки зрения задачи (3) означают, что отсутствует так называемое время ожидания, в течение которого свободные границы неподвижны [4].

Подробную библиографию по параболическим уравнениям с вырождением различного вида можно найти в обзорах [4, 5].

2. Функциональные пространства. Основной результат. Обозначим

$$D = (0,+\infty), \qquad G = (-\infty, l), \qquad f(x) = x^{q/2} - (l-x)^{q/2}.$$

Введем функции

$$\rho_D(x) = x, \qquad \rho_G(x) = l - x, \qquad \rho_\Omega(x) = \min\{x, l-x\},$$

значения которых равны расстоянию от точки x до конечной границы области D, G, Ω соответственно, а также функции

$$d_D(x,y) = \left| x^{q/2} - y^{q/2} \right|, \qquad d_G(x,y) = \left| (l-x)^{q/2} - (l-y)^{q/2} \right|,$$

$$d_\Omega(x,y) = |f(x) - f(y)|,$$

имеющие смысл „расстояний" между точками x, y, принадлежащими D, G и Ω. Здесь $q \in (0,1)$ (в дальнейшем $q = 1 - s$).

Ниже под Q подразумевается одно из множеств D, G или Ω. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Пространства $H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$, $H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ определяются как множества функций с ограниченными нормами:

$$\|u\|_{H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|_{q,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{Q_T} |u| + \langle\langle u \rangle\rangle_{q,Q_T}^{(\alpha)},$$

$$\|u\|_{H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)} = |u|_{q,\rho,Q_T}^{(\alpha)} = \left| \rho_Q^{-1} u \right|_{q,Q_T}^{(\alpha)},$$

где

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{q,Q_T}^{(\alpha)} = \langle u \rangle_{x,q,Q_T}^{(\alpha)} + \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)},$$

$$\langle u \rangle_{x,q,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(y,t) \in Q_T} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{d_Q^\alpha(x,y)},$$

$$\langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} = \sup_{(x,t),(y,\tau) \in Q_T} \frac{|u(x,t) - u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha/2}}.$$

Обозначим через $H_q^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$ пространство с нормой

$$\|u\|_{H_q^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|_{q,Q_T}^{(1+\alpha)} = \sup_{Q_T}|u| + \sup_{Q_T}|u_x| + \langle\langle u\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(1+\alpha)},$$

где

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(1+\alpha)} = \langle u\rangle_{t,Q_T}^{((1+\alpha)/2)} + \langle\langle u_x\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(\alpha)}.$$

Введем также полунорму

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,Q_T}^{(2+\alpha)} = \left\langle\left\langle \rho_Q^{-1}u_t\right\rangle\right\rangle_{q,Q_T}^{(\alpha)} + \left\langle\left\langle \rho_Q^{s}u_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,Q_T}^{(\alpha)} + \langle u_x\rangle_{t,Q_T}^{((1+\alpha)/2)}$$

и пространство $H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ с нормой

$$\|u\|_{H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)} \equiv |u|_{q,Q_T}^{(2+\alpha)} =$$

$$= |u|_{q,Q_T}^{(\alpha)} + \left|\rho_Q^{-1}u_t\right|_{q,Q_T}^{(\alpha)} + \left|\rho_Q^{s}u_{xx}\right|_{q,Q_T}^{(\alpha)} + \langle u_x\rangle_{t,Q_T}^{((1+\alpha)/2)}.$$

Легко заметить, что при $q = 2$ введенные выше пространства $H_q^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$, $k = 0, 1, 2$, переходят в обычные гельдеровские пространства $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$, определенные в [6] (гл. I). Для функций, которые не зависят от времени, аналогично $H_q^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$, $k = 0, 1, 2$, определим пространства $H_q^{k+\alpha}(\overline{Q})$, опуская в соответствующих определениях полунормы по переменной t.

Будем говорить, что $u \in H_{q,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ $\left(H_{q,\rho,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T), H_{q,0}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)\right)$, если u принадлежит соответствующему пространству с обозначением без нуля в нижнем индексе и $u(x,0) = 0$. Принадлежность u пространству $H_{q,0}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ означает, что $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ и $u \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$.

Теорема 1. *Пусть* $v_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и выполнены условия* (2). *Тогда для любого* $T > 0$ *существует единственное классическое решение задачи* (1) $v \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ *такое, что* $v(x,t) > 0$ *для всех* $(x,t) \in \Omega_T$.

3. Модельная задача. Пусть $f \in H_{q,\rho,0}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $w_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{D})$ и имеет компактный носитель. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} w_t = x^{1+s}w_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \\ w(0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad x \in D. \end{gathered} \tag{4}$$

Решение задачи (4) можно записать в виде [7]

$$w(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi,t)\,w_0(\xi)\,d\xi =$$

$$= w^{(1)}(x,t) + w^{(2)}(x,t),$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2}t^{-1}\xi^{-1/2-s}x^{1/2}\exp\left(-\frac{x^q+\xi^q}{q^2t}\right)I_{1/q}\left(\frac{2x^{q/2}\xi^{q/2}}{q^2t}\right),$$

$I_{1/q}(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, $q = 1 - s$.

Очевидно, что функция $w^{(1)}(x,t)$ является решением задачи вида (4) с нулевым начальным условием, а $w^{(2)}(x,t)$ — решением однородной задачи (4).

Обозначим

$$u = \frac{\xi^{q/2}}{qt^{1/2}}, \quad v = \frac{x^{q/2}}{qt^{1/2}}, \quad z = 2uv$$

и перепишем функцию Грина $G(x,\xi,t)$ в виде

$$G(x,\xi,t) = c_q t^{-1-s/qu-2(1+s)/q} \exp\left(-(u^2+v^2)\right) z^{1/q} I_{1/q}(z). \tag{5}$$

Далее последовательно будут получены оценки функции Бесселя, функции Грина и апостериорные оценки $w^{(1)}(x,t)$ и $w^{(2)}(x,t)$.

Известно [8], что для модифицированной функции Бесселя $I_p(z)$, $p > -1$, имеет место разложение в виде ряда, откуда следует представление

$$I_p(z) = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^p + \frac{1}{\Gamma(p+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2} + O(z^{p+4}) \tag{6}$$

при $|z| \le R$, где R — произвольное положительное число, а также асимптотическое разложение при $z \to \infty$

$$I_p(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 - \frac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p-1/2)}\frac{1}{2z} + \frac{\Gamma(p+5/2)}{2\Gamma(p-3/2)}\frac{1}{(2z)^2} + O(z^{-3})\right). \tag{7}$$

Заметим, что при $p = n + 1/2$ (n — целое число) функцию $I_p(z)$ можно записать в явном виде, и для нее также будут справедливы выражения вида (6), (7).

Из (6), (7) следует оценка

$$I_p(z) \le \begin{cases} cz^p, & z \le 1, \\ c\exp(z)z^{-1/2}, & z \ge 1. \end{cases} \tag{8}$$

Далее, поскольку при $z \le 1$ (см. (6))

$$I_{1/q}(z) = \left[\frac{q}{\Gamma(1/q)}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{1/q} + O\left(z^{1/q+2}\right),$$

$$I_{1/q-1}(z) = \left[\frac{2}{z\Gamma(1/q)}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{1/q} + O\left(z^{1/q+1}\right),$$

легко заключить, что

$$\left|\frac{q}{2}zI_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right| \le cz^{1/q+2} \quad \text{при} \quad z \le 1. \tag{9}$$

Аналогично, используя (7), выводим

$$\begin{gathered} \left|I_{1/q}(z) - I_{1/q-1}(z)\right| \le c\exp(z)z^{-3/2} \quad \text{при} \quad z > 1, \\ \left|2\left(I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right) + \frac{1}{z}I_{1/q-1}(z) - \frac{1}{qz}\left(I_{1/q-1}(z) + I_{1/q}(z)\right)\right| \le \\ \le c\exp(z)z^{-5/2} \quad \text{при} \quad z > 1. \end{gathered} \tag{10}$$

3.1. Оценки функции Грина. Следующий шаг состоит в получении оценок функции Грина и ее производных на основании оценок (8) – (10).

Лемма 1. *Функция Грина $G(x,\xi,t)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\left|D_t^k G(x,\xi,t)\right| \le \tilde{C}_k t^{-k-1-s/q} u^{-2(1+s)/q} \exp\left(-\gamma_k (u-v)^2\right) \begin{cases} z^{2/q}, & z \le 1, \\ z^{1/q-1/2}, & z > 1, \end{cases} \tag{11}$$

$$\left|D_t^k D_x G(x,\xi,t)\right| \le$$

$$\le C_k t^{-k-1-s/q} u^{-2(1+s)/q} \exp\left(-\gamma_k (u-v)^2\right) \frac{v}{x} \begin{cases} z^{2/q-1}(1+v), & z \le 1, \\ z^{1/q-1/2}(1+v/z), & z > 1, \end{cases} \tag{12}$$

где $\gamma_k \in (0, 1)$, $k = 0, 1, 2$.

Лемма 2. *Справедливы оценки*

$$\left|\left(G(x,\xi,t)\frac{\xi}{x}\right)_x\right| \le Ct^{-1-s/q} u^{-2(1+s)/q} \exp\left(-\gamma(u-v)^2\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{2/q} \times$$

$$\times\ x^{-1} \begin{cases} z^{2/q}(v^2+z^2), & z \le 1, \\ z^{1/q-1/2}(1+v), & z > 1, \end{cases} \tag{13}$$

$$\left|\left(G(x,\xi,t)\frac{\xi}{x}\right)_{xt}\right| \le Ct^{-2-s/q} u^{-2(1+s)/q} \exp\left(-\gamma(u-v)^2\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{2/q} \times$$

$$\times\ \frac{1}{x} \begin{cases} z^{2/q}(v^2+z^2), & z \le 1, \\ z^{1/q-1/2}(1+v+v^2/z), & z > 1, \end{cases} \tag{14}$$

где $\gamma \in (0, 1)$.

Ход рассуждений при доказательстве оценок (11) – (14) состоит в том, чтобы получить представление для соответствующей производной, а затем привести его к виду, удобному для применения неравенств (8) – 10).

Оценим, например, G_{xt} и $\left(\dfrac{\xi}{x}G(x,\xi,t)\right)_x$. Используя равенство

$$\left(z^{1/q} I_{1/q}(z)\right)_z = z^{1/q} I_{1/q-1}(z)$$

(см. [9]) и представление (5), можно получить

$$G_x = qc_q t^{-1-s/q} u^{-2(1+s)/q} \exp\left(-(u^2+v^2)\right) \times$$

$$\times\ \frac{v}{x} z^{1/q}\left\{u I_{1/q-1}(z) - v I_{1/q}(z)\right\}. \tag{15}$$

Используя формулы [9]

$$I'_{1/q}(z) = I_{1/q-1}(z) - \frac{1}{(qz) I_{1/q}(z)},$$

$$I'_{1/q-1}(z) = I_{1/q}(z) + \frac{1}{z}\left(\frac{1}{q} - 1\right) I_{1/q-1}(z),$$

приводим выражение для G_{xt} к виду

$$G_{xt} = qc_q t^{-2-s/q} u^{-2(1+s)/q} \exp\left(-(u^2+v^2)\right)\frac{v}{x} z^{1/q} \times$$

$$\times \left\{\left(-2 + (u-v)^2\right)\left[(u-v) I_{1/q-1}(z) + v\left(I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right)\right] + \right.$$

$$+ \ z\left[(u-v)\left(I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z) - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{q} - 1\right)I_{1/q-1}(z)\right) + \right.$$

$$\left. + \ v\left(2\left(I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right) + \frac{1}{z}I_{1/q-1}(z) - \frac{1}{qz}\left(I_{1/q-1}(z) + I_{1/q}(z)\right)\right)\right]\Bigg\}. \qquad (16)$$

При $z \le 1$ из (8) легко получить

$$I_{1/q-1}(z) \le cz^{1/q-1}, \qquad I_{1/q}(z) \le czz^{1/q-1} \le cz^{1/q-1},$$

следовательно, можно считать, что

$$\left|I_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right| \le cz^{1/q-1}$$

и

$$\left|I_{1/q-1}(z) + I_{1/q}(z)\right| \le cz^{1/q-1}.$$

От выражения вида $(u-v)^a$, $a > 0$, внутри фигурных скобок „избавляемся" с помощью неравенства

$$\exp\left(-(u^2+v^2)\right)|u-v|^a \le \exp\left(-(u-v)^2\right)|u-v|^a \le$$

$$\le c_a \exp\left(-\gamma_a(u-v)^2\right), \qquad (17)$$

где c_a, γ_a — некоторые положительные параметры, зависящие от a. Учитывая изложенное выше, приходим к оценке (12) при $k = 1$ и $z \le 1$. Применяя к правой части (16) оценки (10) и последнее неравенство в (17), получаем (12) при $z > 1$ и $k = 1$.

Подставляя (15) в выражение

$$\left(G(x,\xi,t)\,\frac{\xi}{x}\right)_x = \frac{\xi}{x}\left(G_x(x,\xi,t) - \frac{1}{x}\,G(x,\xi,t)\right),$$

имеем

$$\left(G(x,\xi,t)\,\frac{\xi}{x}\right)_x = c_q\frac{\xi}{x^2}t^{-1-s/q}u^{-2(1+s)/q} \times$$

$$\times \ \exp\left(-(u^2+v^2)\right)z^{1/q}\left\{-qv^2I_{1/q}(z) + \frac{q}{2}zI_{1/q-1}(z) - I_{1/q}(z)\right\}.$$

Теперь из (8), (9) следует оценка (13) при $z \le 1$. При $z > 1$ последнее выражение представим в виде

$$\left(G(x,\xi,t)\,\frac{\xi}{x}\right)_x = c_q\frac{\xi}{x^2}t^{-1-s/q}u^{-2(1+s)/q}\exp\left(-(u^2+v^2)\right)z^{1/q} \times$$

$$\times \ \left\{qv(u-v)I_{1/q}(z) - \frac{q}{2}z\left(I_{1/q}(z) - I_{1/q-1}(z)\right) - I_{1/q}(z)\right\},$$

откуда и следует устанавливаемая оценка. Заметим, что по определению $\xi/x = (u/v)^{2/q}$.

Остальные оценки лемм 1 и 2 доказываются аналогично.

Для интегральных оценок функции Грина потребуются неравенства

$$\int\limits_{1/2v}^{\infty} u^{\sigma} \exp\left(-\gamma(u-v)^2\right) du \;\le\; c\begin{Bmatrix} v^{\sigma}, & v \ge 1 \\ \exp\left(-\dfrac{\gamma}{16v^2}\right), & v \le 1 \end{Bmatrix} \le cv^{\sigma},$$

$$\int\limits_{0}^{1/2v} u^{\sigma} \exp\left(-\gamma(u-v)^2\right) du \;\le\; c\begin{Bmatrix} \exp\left(-\gamma v^2\right), & v \ge 1 \\ 1, & v \le 1 \end{Bmatrix} \le c\exp(-\gamma v^2), \tag{18}$$

$$\sigma > -1, \quad \gamma > 0,$$

доказанные в работе [7].

Лемма 3. *Имеют место оценки*

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\xi}{x}\left| D_t^k G(x, \xi, t)\right| d\xi \;\le\; c_k t^{-k}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\int\limits_0^{\infty} \xi\left| D_t^k G_x(x, \xi, t)\right| d\xi \;\le\; c_k t^{-k}(1+v), \quad k = 0, 1, \tag{19}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\left| D_t^k \left(\frac{\xi}{x} G(x, \xi, t)\right)_{x}\right| d\xi \;\le\; c_k t^{-k} v / x, \quad k = 0, 1.$$

Доказательство леммы 3 состоит в совместном применении оценок (11)–(14) и (18). Например, для $(G(x, \xi, t)\xi / x)_{xt}$ из (14) следует $(q = 1 - s)$

$$\int\limits_0^{\infty}\left|\left(\frac{\xi}{x} G(x, \xi, t)\right)_{xt}\right| d\xi = \int\limits_0^{\infty}\left|\left(\frac{\xi}{x} G(x, \xi, t)\right)_{xt}\right| \frac{2}{q} q^{2/q} t^{1/q} u^{2/q-1}\, du \;\le$$

$$\le\; c\left(\int\limits_0^{1/2v} t^{-1} u^{2/q-1-2(1+s)/q} \exp\left(-\gamma(u-v)^2\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{2/q} x^{-1} z^{2/q} \;\times\right.$$

$$\times\; (v^2 + z^2)\, du + \int\limits_{1/2v}^{\infty} t^{-1} u^{2/q-1-2(1+s)/q} \exp\left(-\gamma(u-v)^2\right) \times$$

$$\left.\times\; \left(\frac{u}{v}\right)^{2/q} x^{-1} z^{1/q-1/2}\left(1 + v + \frac{v^2}{z}\right) du\right).$$

После подходящих преобразований подынтегральных выражений и использования оценок (18) приходим к неравенству

$$\int\limits_0^{\infty}\left|\left(\frac{\xi}{x} G(x, \xi, t)\right)_{xt}\right| d\xi \;\le\; \frac{c}{xt}\left(v^2 \exp\left(-\gamma v^2\right) + \begin{Bmatrix} v, & v > 1 \\ v^{-1/q-1/2} \exp\left(-\dfrac{\gamma}{16v^2}\right), & v \le 1 \end{Bmatrix}\right).$$

Теперь, поскольку (см. (17)) $v\exp(-\gamma v^2) \le c$, $v^{-p}\exp(-\gamma/(16v^2)) \le c_p$ для всех $v \ge 0$, $p \ge 0$, заключаем, что

$$\int\limits_0^{\infty}\left|\left(G(x, \xi, t)\,\frac{\xi}{x}\right)_{xt}\right| d\xi \le \frac{cv}{xt}.$$

Лемма доказана.

Отметим далее, что для всех положительных x, t из [9] (формула 6.643.2) следует

$$\int_0^\infty \xi G(x, \xi, t)\, d\xi = x. \tag{20}$$

3.2. **Оценки решения задачи (4).** Пусть L — произвольное положительное число. Обозначим $D_L = (0, L)$.

Лемма 4. *Функции* $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ *удовлетворяют оценкам*

$$\left\langle\left\langle \frac{1}{x} w_t^{(1)} \right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle\left\langle x^s w_{xx}^{(1)} \right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle w_x^{(1)} \right\rangle_{t,D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)} \le c(L,T) \left\langle\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}, \tag{21}$$

$$\left\langle\left\langle \frac{1}{x} w_t^{(2)} \right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle\left\langle x^s w_{xx}^{(2)} \right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle w_x^{(2)} \right\rangle_{t,D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)} \le c(L,T) \langle\langle w_0 \rangle\rangle_{q,D}^{(2+\alpha)}, \tag{22}$$

где постоянная $c(L, T)$ *остается ограниченной при стремлении* T *к нулю.*

Доказательство. Оценим полунормы $\left\langle w_x^{(1)} \right\rangle_{t,D_{L,T}}^{((1+\alpha)/2)}$ и $\left\langle\left\langle x^{-1} w_t^{(2)} \right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}$. Ввиду равенства (20) имеем

$$w_x^{(1)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \xi G_x(x,\xi,t-\tau) \left[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x} \right] d\xi + \int_0^t \frac{f(x,\tau)}{x}\, d\tau.$$

Пусть для определенности $\Delta t = t_1 - t_2 \ge 0$, тогда

$$w_x^{(1)}(x,t_1) - w_x^{(1)}(x,t_2) = \int_{t_1-2\Delta t}^{t_1} d\tau \int_0^\infty \xi G_x(x,\xi,t_1-\tau) \left[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x} \right] d\xi -$$

$$- \int_{t_1-2\Delta t}^{t_2} d\tau \int_0^\infty \xi G_x(x,\xi,t_2-\tau) \left[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x} \right] d\xi +$$

$$+ \int_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int_0^\infty \xi (G_x(x,\xi,t_1-\tau) - G_x(x,\xi,t_2-\tau)) \left[\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x} \right] d\xi +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_1} \frac{f(x,\tau)}{x}\, d\tau = i_1 + i_2 + i_3 + i_4.$$

Легко видеть,что

$$\left| \frac{f(\xi,t)}{\xi} - \frac{f(x,t)}{x} \right| \le \left\langle \frac{f}{x} \right\rangle_{x,q,D_T}^{(\alpha)} \left| \xi^{q/2} - x^{q/2} \right|^\alpha = q^\alpha \left\langle \frac{f}{x} \right\rangle_{x,q,D_T}^{(\alpha)} |u - v|^\alpha t^{\alpha/2}.$$

В правых частях оценок (11) – (14) фигурирует выражение $\exp(-(u - v)^2)$. Применяя к произведению $|u - v|^\alpha \exp(-(u - v)^2)$ оценку (17), можно заметить, что в оценках (19) в правой части появится дополнительный множитель $t^{\alpha/2}$, если под интегралом вместе с функцией Грина будет содержаться множитель $|\xi^{q/2} - x^{q/2}|^\alpha$. Подобные рассуждения будут использованы ниже без дополнительного упоминания.

В силу изложенного выше и соответствующей оценки (19) для первого слагаемого i_1 имеем

$$|i_1| \le c\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \int\limits_0^{2\Delta t} \tau^{\alpha/2}\left(1 + \frac{x^{q/2}}{\tau^{1/2}}\right) d\tau \le$$

$$\le c\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \left((\Delta t)^{1/2} + x^{q/2}\right)(\Delta t)^{(1+\alpha)/2}.$$

Второе слагаемое оценивается аналогично. Для i_3 получим

$$i_3 \le \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_{t_2}^{t_1} d\theta \int\limits_0^{\infty} \xi\,|G_{x\theta}(x,\xi,\theta-\tau)|\left|\frac{f(\xi,\tau)}{\xi} - \frac{f(x,\tau)}{x}\right| d\xi.$$

Применение оценки (19) для ξG_{xt} приводит к неравенству

$$|i_3| \le c\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_{t_2}^{t_1} |\theta-\tau|^{\alpha/2-1}\left(1 + \frac{x^{q/2}}{|\theta-\tau|^{1/2}}\right) d\theta.$$

Если $t_1 - 2\Delta t \le 0$, то интеграл в i_3 равен нулю, так как $f \in H^{\alpha,\alpha/2}_{q,\rho,0}(\overline{D}_T)$ и можно считать, что $f(x,\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Если же $t_1 - 2\Delta t > 0$, то $\Delta t < \theta - \tau < t_1$, и интеграл в правой части последнего неравенства сходится, так что

$$|i_3| \le c\left(t_1^{1/2} + x^{q/2}\right)\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} \int\limits_0^{t_1-2\Delta t} d\tau \int\limits_{t_2}^{t_1} |\theta-\tau|^{\alpha/2-3/2}\, d\theta \le$$

$$\le c\left(t_1^{1/2} + x^{q/2}\right)\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle^{(\alpha)}_{x,q,D_T} (\Delta t)^{(1+\alpha)/2}.$$

Наконец, для последнего слагаемого i_4 легко следует оценка

$$|i_4| \le \left\langle \frac{f}{x} \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T} \int\limits_{t_2}^{t_1} \tau^{\alpha/2}\, d\tau \le c\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,D_T} (\Delta t)^{(1+\alpha)/2}.$$

Суммируя полученные оценки, заключаем, что

$$\left\langle w_x^{(1)} \right\rangle^{((1+\alpha)/2)}_{t,D_{L,T}} \le C\left(T^{1/2} + L^{q/2}\right)\left\langle\left\langle \frac{f}{x} \right\rangle\right\rangle^{(\alpha)}_{q,D_T}.$$

Оценим $\left\langle\left\langle x^{-1} w_t^{(2)} \right\rangle\right\rangle^{(\alpha)}_{q,D_T}$. Сначала нужно получить интегральное представление для $w_t^{(2)}$. Функция Грина $G(\xi,x,t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $G_t = (\xi^{1+s}G)_{\xi\xi}$, значит,

$$w_t^{(2)}(x,t) = \int\limits_0^{\infty} \left(\xi^{1+s}G\right)_{\xi\xi}(x,\xi,t)\, w_0(\xi)\, d\xi.$$

Далее, дважды интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{x} w_t^{(2)}(x,t) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\xi}{x} G(x,\xi,t)\xi^s w_0''(\xi)\, d\xi.$$

Учитывая равенство (20), для разности по переменной t получим выражение

$$\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_1)-\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_2) = \int\limits_{t_2}^{t_1} d\tau \int\limits_0^\infty \frac{\xi}{x}G_\tau(x,\xi,\tau)\left[\xi^s w_0''(\xi)-x^s w_0''(x)\right]d\xi.$$

Из оценок (11) и (19) следует

$$\left|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_1)-\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t_2)\right| \le c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} \int\limits_{t_2}^{t_1} \tau^{\alpha/2-1}\,d\tau,$$

значит,

$$\left\langle\frac{1}{x}w_t^{(2)}\right\rangle_{t,D_T}^{(\alpha/2)} \le c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)}. \tag{23}$$

Для оценки разности по x обозначим $h=|\xi^{q/2}-x^{q/2}|$. Будем различать случаи: а) $t<h^2$ и б) $t\ge h^2$. В случае а) необходимая оценка следует из (23), а именно

$$\left|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t)-\frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t)\right| \le \left|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t)-\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,0)\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,0)-\frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,0)\right| + \left|\frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,0)-\frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t)\right| \le$$

$$\le 2\left\langle\frac{1}{x}w_t^{(2)}\right\rangle_{t,D_T}^{(\alpha/2)} t^{\alpha/2} + \left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha \le c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha. \tag{24}$$

В случае б), снова используя тождество (20), записываем разность $(1/x)\times$ $\times\, w_t^{(2)}(x,t)-(1/y)w_t^{(2)}(y,t)$ в виде

$$\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t)-\frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t) = \int\limits_y^x d\theta \int\limits_0^\infty \left(\frac{\xi}{\theta}G(\theta,\xi,t)\right)_\theta \left[\xi^s w_0''(\xi)-\theta^s w_0''(\theta)\right]d\xi.$$

Обозначим $\overline{v}=\theta^{q/2}/\left(qt^{1/2}\right)$. Из соответствующей оценки леммы 3 следует

$$\left|\frac{1}{x}w_t^{(2)}(x,t)-\frac{1}{y}w_t^{(2)}(y,t)\right| \le c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} \left|\int\limits_y^x t^{\alpha/2}\frac{\overline{v}}{\theta}\,d\theta\right| \le$$

$$\le c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} t^{(\alpha-1)/2}\int\limits_y^x \theta^{q/2-1}\,d\theta \le c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)} h^\alpha. \tag{25}$$

Из (23) – (25) выводим

$$\left\langle\left\langle x^{-1}w_t^{(2)}\right\rangle\right\rangle_{q,D,T}^{(\alpha)} \le c\left\langle x^s w_0''\right\rangle_{x,q,D}^{(\alpha)}.$$

Остальные слагаемые в левой части неравенств (21), (22) оцениваются аналогично.

Лемма 4 доказана.

4. Линейная задача. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} u_t = a(x,t)\rho_\Omega^{1+s}u_{xx} + f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_T,\\ u(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\Sigma_T, \qquad u(x,0)=u_0(x), \qquad x\in\Omega, \end{gathered} \tag{26}$$

предположив, что

$$0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1, \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{27}$$

$$u_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, l. \tag{28}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (27), $a \in H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$. *При любых* $f \in H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $u_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *таких, что выполнено условие согласования* (28), *задача* (26) *имеет единственное решение* $u \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$. *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$|u|_{q,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \le C\Big(l, T, a_0, a_1, |a|_{q,\Omega_T}^{(\alpha)}\Big)\Big(|f|_{q,\rho,\Omega_T}^{(\alpha)} + |u_0|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)}\Big). \tag{29}$$

Доказательство проводится методом построения регуляризатора (см. [6], гл. IV). При таком подходе исходная задача сводится к задаче с нулевыми начальными данными, а затем строится регуляризатор, т. е. оператор, обращающий главную линейную часть начально-краевой задачи с „замороженными" коэффициентами.

Ограничимся рассмотрением двух проблем: сведением к задаче с нулевыми начальными данными и доказательством оценки (см. (45) ниже), из которой следует оценка (29) и которая окажется полезной при изучении нелинейной задачи (см., например, [3]).

Приведем (также без доказательства) две леммы.

Лемма 5. *Выполняются неравенства*

$$\begin{gathered}
\max\{d_D(x,y), d_G(x,y)\} \le d_\Omega(x,y), \\
|x-y| \le c_1 d_\Omega(x,y) \quad \text{при} \quad x,y \in [0,l], \\
d_\Omega(x,y) \le c_2 d_D(x,y) \quad \text{при} \quad x,y \in [0, l-\delta], \\
d_\Omega(x,y) \le c_2 d_G(x,y) \quad \text{при} \quad x,y \in [\delta, l], \\
d_\Omega(x,y) \le c_2 |x-y| \quad \text{при} \quad x,y \in [\delta, l-\delta].
\end{gathered} \tag{30}$$

Здесь δ — *произвольное число из интервала* $(0, l/2)$, *постоянная* c_1 *зависит от* q, l, *а* c_2 — *от* q, l *и* δ.

Лемма 6. *Пусть* $u \in H_{q,0}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, *тогда эта функция подчиняется оценкам*

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega_T}^{(1+\alpha)} \le cT^{1/2}\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega_T}^{(2+\alpha)}. \tag{31}$$

Лемма 5 связана с вопросом о том, как соотносятся между собой функции $d_\Omega(x,y)$, $d_D(x,y)$, $d_G(x,y)$, $|x-y|$ и соответствующие им гельдеровские полунормы. Оценки (30) следуют непосредственно из определений указанных функций. Для доказательства леммы 6 необходимо применить формулу конечных приращений и оценки (30).

4.1. Сведение задачи (26) к задаче с нулевыми начальными данными. Задача состоит в том, чтобы по заданным функциям $u_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $u_1 \in H_{q,\rho}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ построить функцию $w \in H_q^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ такую, что

$$w(x,0) = u_0(x), \quad w_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{32}$$

В случае задачи (26) полагаем

$$u_1(x) = a(x,0)\rho_\Omega^{1+s} u''_{0,xx} + f(x,0).$$

Пусть $\varepsilon \in (0, l/2)$ — некоторое фиксированное число, а срезающие функции $\zeta_1, \zeta_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ имеют следующие свойства: $\zeta_1 = 1$ при $x \le l/2$, $\zeta_1 = 0$ при $x > l - \varepsilon$, а ζ_2 равно нулю и единице при $x < \varepsilon$ и $x \ge l/2$ соответственно. Положим

$$\eta_i(x) = \zeta_i(x) / \left(\zeta_1^2(x) + \zeta_2^2(x)\right), \quad i = 1, 2,$$

тогда

$$\eta_1(x)\zeta_1(x) + \eta_2(x)\zeta_2(x) = 1, \quad x \in \Omega.$$

Введем функции

$$\phi_i(x) = u_0(x)\zeta_i(x), \quad \psi_i(x) = u_1(x)\zeta_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Если уже найдены функции $w_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ такие, что

$$w_i(x, 0) = \phi_i(x), \quad w_{i,t}(x, 0) = \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \tag{33}$$

тогда, очевидно, функция

$$w(x, t) = w_1(x, t)\eta_1(x) + w_2(x, t)\eta_2(x) \tag{34}$$

удовлетворяет соотношениям (32).

Построим функцию w_1. Пусть T_* — произвольное положительное число, а функция $\xi(t) \in C^\infty(R)$ равна единице при $t \ge 0$ и нулю при $t < -T_*/2$. Рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$\begin{gathered} w_t^{(1)} = x^{1+s} w_{xx}^{(1)} + g(x, t), \quad x > 0, \quad t > -T_*, \\ w^{(1)}(0, t) = 0, \quad t > -T_*, \quad w^{(1)}(x, -T_*) = 0, \quad x > 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Здесь $g(x, t)$ строится как продолжение функции $(\psi_1(x) - x^{1+s}\phi_{1,xx}(x))$ для $x > l$, $t < 0$ так, чтобы

$$g(x, t) = \xi(t)\left(\psi_1(x) - x^{1+s}\phi_{1,xx}(x)\right)$$

при $x \le l$, $g(x, t) = 0$ при $x > l + 1$ и $g/x \in H_q^{\alpha, \alpha/2}(\overline{D} \times [-T_*, \infty))$;

$$\begin{gathered} w_t^{(2)} = x^{1+s} w_{xx}^{(2)}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ w^{(2)}(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad w^{(2)}(x, 0) = w_0^{(2)}(x), \quad x > 0, \end{gathered} \tag{36}$$

где $w_0^{(2)} \in H_q^{2+\alpha}(\overline{D})$, причем

$$w_0^{(2)}(x) = \phi_1(x) - w^{(1)}(x, 0) \quad \text{и} \quad w_0^{(2)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > l + 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что для

$$w_1(x, t) = w^{(1)}(x, t) + w^{(2)}(x, t)$$

выполнены соотношения (33) при $i = 1$. В силу оценок (21), (22) и неравенств (30) имеем $w_1(x, t)\eta_1(x) \in H_q^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ (заметим, что по построению функции η_1 $w_1(x, t)\eta_1(x) = 0$ при $x \in (l - \varepsilon, l)$). Функция $w_2(x, t)$ строится аналогично. Из (21), (22), (30) следует

$$|w|_{q, \Omega_T}^{(2+\alpha)} \le C(T)\left(|u_0|_{q, \Omega}^{(2+\alpha)} + |u_1|_{q, \rho, \Omega}^{(\alpha)}\right). \tag{37}$$

Для новой неизвестной функции $\overline{u} = u - w$ задача (26) примет вид

$$\overline{u}_t - a(x,t)\rho_\Omega^{1+s}\overline{u}_{xx} = g(x,t) \equiv f(x,t) + a(x,t)\rho_\Omega^{1+s}w_{xx} - w_t, \quad (x,t)\in\Omega_T,$$
$$\overline{u}(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\Sigma_T, \quad \overline{u}(x,0) = 0, \quad x\in\Omega. \tag{38}$$

Следует заметить, что по построению w функция g принадлежит $H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, а функция $\overline{u}$ ищется в классе $H_{q,0}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$.

***4.2. Априорная оценка решения задачи* (38).** Пусть $\varepsilon\in(0,l/4)$, ξ — произвольная точка на отрезке $[0,l]$, $\omega(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|x|\le 1/2$ и нулю при $|x|\ge 1$. Покажем, что при достаточно малых значениях параметров T_0 и $\lambda_0\in(0,\varepsilon/2)$ для функции

$$U(x,t) = \overline{u}(x,t)\omega\left(\frac{x-\xi}{\lambda_0}\right)$$

при $t\in[0,T_0]$ имеет место оценка

$$\langle\langle U\rangle\rangle_{q,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \le C(l,\lambda_0,T_0,a_0,a_1)\times$$
$$\times\left(1+|a|_{q,\Omega_T}^{(\alpha)}\right)\left(\left\langle\left\langle\rho_\Omega^{-1}g\right\rangle\right\rangle_{q,\Omega_T}^{(\alpha)} + \langle\langle\overline{u}\rangle\rangle_{q,\Omega_T}^{(1+\alpha)}\right) \quad \forall\, T\le T_0, \tag{39}$$

причем постоянная C в правой части (39) не зависит от выбора ξ.

Для доказательства (39) следует рассмотреть три возможности: 1) $\xi\in[0,\varepsilon)$; 2) $\xi\in(l-\varepsilon,l]$; 3) $\xi\in[\varepsilon,l-\varepsilon]$.

Рассмотрим сначала первый случай. Умножая (38) на $\omega((x-\xi)/\lambda_0)$, получаем

$$U_t - a(x,t)\rho_\Omega^{1+s}U_{xx} = g_{\xi,\lambda_0}(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T,$$
$$U(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\Sigma_T, \quad U(x,0) = 0, \quad x\in\Omega.$$

Здесь

$$g_{\xi,\lambda}(x,t) = g(x,t)\omega\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) - a(x,t)\rho_\Omega^{1+s}\left(2\overline{u}_x\omega_x\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) + \overline{u}\omega_{xx}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right). \tag{40}$$

Обозначим $K_\lambda(\xi) = \{x\in D: |x-\xi|<\lambda\}$. Очевидно, можем считать функции $U(x,t)$, $g_{\xi,\lambda_0}(x,t)$ определенными при всех $(x,t)\in D_T$, причем $U(x,t) = 0$ и $g_{\xi,\lambda_0}(x,t) = 0$ при $x\notin K_{\lambda_0}(\xi)$, $t\in(0,T)$. Следует отметить, что в рассматриваемом случае $\rho_\Omega^{1+s}(x) = x^{1+s}$ при $x\in K_{\lambda_0}(\xi)$, $\lambda_0<\varepsilon/2$. С учетом изложенного заключаем, что функция $U(x,t)$ является решением задачи

$$U_t - a(\xi,0)x^{1+s}U_{xx} = G(x,t), \quad (x,t)\in D_T,$$
$$U(0,t) = 0, \quad t\in(0,T), \quad U(x,0) = 0, \quad x\in D, \tag{41}$$

где

$$G(x,t) = g_{\xi,\lambda_0}(x,t) + (a(x,t)-a(\xi,0))x^{1+s}U_{xx}.$$

Замена переменной $\tau = a(\xi,0)t$, $\hat{U}(x,\tau) = U(x,t)$, $\hat{G}(x,\tau) = G(x,t)$ приводит к модельной задаче

$$\hat{U}_t - x^{1+s}\hat{U}_{xx} = \frac{\hat{G}(x,t)}{a(\xi,0)}, \quad (x,t)\in D_T,$$

$$\hat{U}(0,t) = 0, \quad t \in (0,T), \quad \hat{U}(x,0) = 0, \quad x \in D.$$

Учитывая оценку (21), условие (27) и переходя обратно к переменным (x,t), получаем оценку $(D_{l,T} = \Omega_T)$

$$\left\langle\left\langle x^{-1}U_t\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle\left\langle x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \langle U_x\rangle_{t,\Omega_T}^{((1+\alpha)/2)} \le$$

$$\le C(l,T,a_0,a_1)\left\langle\left\langle \frac{G}{x}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}. \tag{42}$$

Оценим полунорму в правой части (42). Имеем

$$\left\langle\left\langle (a(x,t)-a(\xi,0))x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} \le \sup_{K_\lambda(\xi)\times(0,T)} |a(x,t)-a(\xi,0)| \left\langle\left\langle x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} +$$

$$+ \langle\langle (a(x,t)-a(\xi,0))\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} \sup_{D_T}\left|x^s U_{xx}\right| \le$$

$$\le c\langle\langle a(x,t)\rangle\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}\left(T^{\alpha/2}+\lambda_0^{q\alpha/2}\right)\left\langle\left\langle x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}.$$

Выберем T_0, λ_0 настолько малыми, чтобы множитель перед $\left\langle\left\langle x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}$ в последнем неравенстве стал меньше, чем $1/2$. Это и есть основное ограничение на T_0, λ_0. Возвращаясь к оценке (42), получаем $(T \le T_0)$

$$\left\langle\left\langle x^{-1}U_t\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle\left\langle x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \langle U_x\rangle_{t,\Omega_T}^{((1+\alpha)/2)} \le$$

$$\le C(l,\lambda_0,T_0,a_0,a_1)\left\langle\left\langle \frac{g_{\xi,\lambda_0}}{x}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)}.$$

Из явного представления (40) функции g_{ξ,λ_0} следует оценка

$$\left\langle\left\langle x^{-1}U_t\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle\left\langle x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \langle U_x\rangle_{t,\Omega_T}^{((1+\alpha)/2)} \le$$

$$\le C(l,\lambda_0,T,a_0,a_1)\left(1+|a|_{q,\Omega_T}^{(\alpha)}\right)\left(\left\langle\left\langle \frac{g}{x}\right\rangle\right\rangle_{q,\Omega_T}^{(\alpha)} + \langle\langle \overline{u}\rangle\rangle_{q,\Omega_T}^{(1+\alpha)}\right). \tag{43}$$

Заметим, что постоянная C в правой части (39) зависит от λ_0 и становится неограниченной при стремлении λ_0 к нулю. Однако в дальнейших рассуждениях λ_0 является фиксированной величиной, уменьшаться может только T_0. Поэтому ниже мы не будем указывать на зависимость C от λ_0.

Теперь следует учесть, что, поскольку $\xi \in [0,\varepsilon)$, $\lambda_0 \in (0,\varepsilon/2)$, функция $U(x,t)$ равна нулю при $x > l/2$. Учитывая неравенства (30), имеем

$$\langle\langle U\rangle\rangle_{q,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \le c(l)\left(\left\langle\left\langle \frac{1}{x}U_t\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \left\langle\left\langle x^s U_{xx}\right\rangle\right\rangle_{q,D_T}^{(\alpha)} + \langle U_x\rangle_{t,\Omega_T}^{((1+\alpha)/2)}\right),$$

и, следовательно, оценка (39) в первом случае $(\xi \in [0,\varepsilon))$ доказана.

Доказательство этой оценки во втором случае при $\xi \in (l-\varepsilon, l]$ сводится к предыдущему случаю заменой $z = l - x$. При этом в оценке вида (43) нужно сделать обратную замену $x = l - z$ и снова применить подходящие неравенства из оценок (30).

В третьем случае вместо (41) следует рассмотреть задачу вида

$$
\begin{gathered}
U_t - a(\xi, 0)\rho_\Omega^{1+s}(\xi)U_{xx} = G(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \\
U(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad U(x, 0) = 0, \quad x \in D.
\end{gathered} \tag{44}
$$

В данном случае

$$
G(x, t) = g_{\xi, \lambda_0}(x, t) + \left(a(x, t)\rho_\Omega^{1+s}(x) - a(\xi, 0)\rho_\Omega^{1+s}(\xi)\right)U_{xx},
$$

а $g_{\xi, \lambda_0}(x, t)$ определяется из (40).

Ввиду того, что $a(\xi, 0)\rho_\Omega^{1+s}(\xi) \geq a_0\varepsilon^{1+s}$, для решения задачи (44) выполнена оценка (см. [6], гл. IV)

$$
\| U \|_{H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D}_T)} \leq C(a_0, \varepsilon) \| G \|_{H^{\alpha, \alpha/2}(\overline{D}_T)}.
$$

Поскольку $\varepsilon \in (0, l/4)$, $\lambda_0 \in (0, \varepsilon/2)$, функции $U(x, t)$, $G(x, t)$ равны нулю при $x \in (0, \varepsilon/2)$ и $x \in (l - \varepsilon/2, l)$, поэтому в $\overline{\Omega}_T$ ни U_t / x, ни G / x не имеют особенностей.

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, и используя неравенства (30), заключаем, что и в третьем случае выполняется оценка (39).

Применяя разложение единицы (см. [6], гл. IV), можно от локальных оценок вида (39) перейти к оценке

$$
\langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q, \Omega_T}^{(2+\alpha)} \leq C(l, T_0, a_0, a_1)\left(1 + | a |_{q, \Omega_T}^{(\alpha)}\right)\left(\left\langle\left\langle \rho_\Omega^{-1} g \right\rangle\right\rangle_{q, \Omega_T}^{(\alpha)} + \langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q, \Omega_T}^{(1+\alpha)}\right).
$$

Из оценок (31) следует

$$
\langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q, \Omega_T}^{(2+\alpha)} \leq C(l, T_0, a_0, a_1)\left(1 + | a |_{q, \Omega_T}^{(\alpha)}\right)\left(\left\langle\left\langle \rho_\Omega^{-1} g \right\rangle\right\rangle_{q, \Omega_T}^{(\alpha)} + T^{1/2}\langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q, \Omega_T}^{(2+\alpha)}\right),
$$

и при достаточно малом T_0 и $T \leq T_0$ получаем

$$
\begin{aligned}
\langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q, \Omega_T}^{(2+\alpha)} &\leq C(l, T_0, a_0, a_1)\left(1 + | a |_{q, \Omega_T}^{(\alpha)}\right)\left\langle\left\langle \rho_\Omega^{-1} g \right\rangle\right\rangle_{q, \Omega_T}^{(\alpha)} \equiv \\
&\equiv C_*\left(1 + | a |_{q, \Omega_T}^{(\alpha)}\right)\left\langle\left\langle \rho_\Omega^{-1} g \right\rangle\right\rangle_{q, \Omega_T}^{(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Отметим, что постоянная C_* в правой части остается ограниченной при T, стремящемся к нулю.

Возвращаясь к оценке (37), в которой, напомним,

$$
u_1(x) = a(x, 0)\rho_\Omega^{1+s}(x)u_0''(x) + f(x, 0),
$$

и применяя (45), приходим к оценке (29) для достаточно малого T_0. Для произвольного T оценка (29) доказывается разбиением отрезка $[0, T]$ на малые промежутки $[T_k, T_{k+1}]$ такие, что $T_{k+1} - T_k \leq T_0$.

5. Нелинейная задача. *5.1. Разрешимость в малом по t.* Вернемся к задаче (1) и докажем сначала ее разрешимость локально по времени.

Теорема 3. *Пусть* $v_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < s$, *и выполнены условия* (2). *Тогда для достаточно малого* τ *существует единственное классическое решение задачи* (1) $v \in H_q^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$.

Как и в линейном случае, исходная задача сводится к задаче с нулевыми начальными данными. Из п. 4.1 следует, что можно построить функцию $w \in H_q^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ такую, что $w(x, 0) = v_0(x)$, $w_t(x, 0) = v_0^{1+s}(x)v_0''(x)$ и имеет место оценка

$$|w|_{q,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \le C(T)\left(|v_0|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)} + \left|\left(\rho_\Omega^{-1}v_0\right)^{1+s}\rho_\Omega^s v_{0,xx}\right|_{q,\Omega}^{(\alpha)}\right).$$

Поскольку $v_0 \in H_q^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и по условию (2) $v_0'(0) > 0$, $v_0'(l) < 0$, нетрудно доказать, что при $\alpha < s$

$$|w|_{q,\Omega_T}^{(2+\alpha)} \le C\left(T, |v_0|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)}\right) \equiv M. \tag{46}$$

Перепишем задачу (1) в виде $(v = w + \overline{v})$

$$\overline{v}_t - a_{\overline{v}}(x,t)\rho_\Omega^{1+s}\overline{v}_{xx} = F_{\overline{v}}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$
$$\overline{v}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma_T, \quad \overline{v}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{47}$$

где

$$a_{\overline{v}}(x,t) = \left[\rho_\Omega^{-1}(x)\left(w(x,t) + \overline{v}(x,t)\right)\right]^{1+s},$$
$$F_{\overline{v}}(x,t) = -w_t + a_{\overline{v}}(x,t)\rho_\Omega^{1+s}w_{xx}. \tag{48}$$

Следует выяснить, какие ограничения на T и $\overline{v}(x,t)$ гарантируют, что для $a_{\overline{v}}$ выполнены условия (27) и функция $a_{\overline{v}}$ принадлежит пространству $H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$. Для произвольного $\overline{v} \in H_{q,0}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ имеем

$$a_{\overline{v}}(x,t)\big|_{t=0} = \left[\frac{v_0(x)}{\rho_\Omega(x)}\right]^{1+s},$$

следовательно,

$$\tilde{a}_0 \le a_{\overline{v}}(x,t)\big|_{t=0} \le \tilde{a}_1,$$

где $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ зависят только от μ_0, ν_0 из условия (2) и нормы $|v_0|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)}$.

Если, кроме того, $\overline{v}(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \Sigma_T$ и $|\overline{v}|_{q,\Omega_T}^{(1+\alpha)} \le 1$, то по формуле конечных приращений

$$\langle a_{\overline{v}}\rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)} \le c\left(\langle w_x\rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)} + \langle \overline{v}_x\rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)}\right)\sup_{\Omega_T}\left|\rho_\Omega^{-1}(w+\overline{v})\right|^s \le C(M),$$

где постоянная M взята из оценки (46).

Очевидно

$$a_{\overline{v}}(x,t)\big|_{t=0} - \langle a_{\overline{v}}\rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)}T^{\alpha/2} \le a_{\overline{v}}(x,t) \le a_{\overline{v}}(x,t)\big|_{t=0} + \langle a_{\overline{v}}\rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)}T^{\alpha/2},$$

а значит,

$$\tilde{a}_0 - C(M)T^{\alpha/2} \le a_{\overline{v}}(x,t) \le \tilde{a}_1 + C(M)T^{\alpha/2}.$$

Таким образом, если

$$T \le T_0 \equiv \left(\frac{\tilde{a}_0}{2C(M)}\right)^{2/\alpha}, \tag{49}$$

$\overline{v} \in H_{q,0}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$, $|\overline{v}|_{q,\Omega_T}^{(1+\alpha)} \le 1$, то

$$0 < a_0 \le a_{\overline{v}}(x,t) \le a_1, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{50}$$

где величины a_0, a_1 зависят от μ_0, ν_0 и нормы $|v_0|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)}$.

При указанных предположениях на $\overline{v}$ функция $a_{\overline{v}}$ принадлежит пространству $H_q^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ и $F_{\overline{v}} \in H_{q,\rho}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$ по построению w.

*5.2. **Доказательство теоремы** 3.* Пусть $\tau < T$ и T удовлетворяет условию (49). В пространстве $H_{q,0}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_\tau)$ рассмотрим выпуклое замкнутое множество

$$B(\tau, r) = \left\{\overline{v}(x,t)\colon \overline{v}(x,t) = 0 \text{ при } (x,t) \in \Sigma_\tau,\ |v|_{q,\Omega_\tau}^{(1+\alpha)} \le r\right\}, \qquad r \le 1.$$

Для произвольного $\overline{v} \in B(\tau, r)$ определим $\overline{u} \in H_{q,0}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$ как решение задачи

$$\begin{gathered} \overline{u}_t - a_{\overline{v}}(x,t)\rho_\Omega^{1+s}\overline{u}_{xx} = F_{\overline{v}}(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \overline{u}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Sigma_\tau, \qquad \overline{u}(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega. \end{gathered} \tag{51}$$

Тем самым задается отображение

$$A\colon B(\tau,r) \to H_q^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_\tau), \qquad \overline{u} = A\overline{v}.$$

Применив теорему Шаудера (см. [10], гл. VII), докажем, что при достаточно малом τ отображение A имеет неподвижную точку.

В силу (50) выполнены предположения теоремы 2. Следовательно, существует единственное решение задачи (51) $\overline{u} \in H_{q,0}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$ и (см. оценку (45)) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q,\Omega_\tau}^{(2+\alpha)} &\le C_*\left(1 + |a_{\overline{v}}|_{q,\Omega_\tau}^{(\alpha)}\right)\left\langle\left\langle \rho_\Omega^{-1}F_{\overline{v}}\right\rangle\right\rangle_{q,\Omega_\tau}^{(\alpha)} \le \\ &\le C\left(l, T_0, a_0, a_1, |v_0|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)}\right) \equiv M_1. \end{aligned} \tag{52}$$

Применяя оценку (31) и последнее неравенство, получаем

$$\langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q,\Omega_\tau}^{(1+\alpha)} \le C\langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q,\Omega_\tau}^{(2+\alpha)}\tau^{1/2} \le CM_1\tau^{1/2},$$

и, значит, для достаточно малого τ имеем $\langle\langle \overline{u} \rangle\rangle_{q,\Omega_\tau}^{(1+\alpha)} \le r$, т. е. A отображает $B(\tau, r)$ в себя.

Аналогично доказательству теоремы 1 из монографии [10] (гл. VII) можно доказать, что ограниченное подмножество пространства $H_{q,0}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$ является компактным подмножеством в пространстве $H_{q,0}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_\tau)$. Следовательно, A отображает $B(\tau, r)$ в компактное подмножество из $B(\tau, r)$.

Осталось доказать непрерывность отображения A.

Пусть $\overline{v}_k \to \overline{v}$ в $H_{q,0}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_\tau)$. Для разности $\overline{u} - \overline{u}_k$ получим задачу

$$\begin{gathered} (\overline{u} - \overline{u}_k)_t - a_{\overline{v}}(x,t)\rho_\Omega^{1+s}(\overline{u} - \overline{u}_k)_{xx} = f_k(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_\tau, \\ \overline{u}(x,t) - \overline{u}_k(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Sigma_\tau, \qquad \overline{u}(x,0) - \overline{u}_k(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega. \end{gathered} \tag{53}$$

Здесь

$$f_k = \left(\left[\rho_\Omega^{-1}(w + \overline{v})\right]^{1+s} - \left[\rho_\Omega^{-1}(w + \overline{v}_k)\right]^{1+s}\right)\rho_\Omega^{1+s}(w + \overline{u}_k)_{xx}.$$

Из (46), (52), (53) следует оценка

$$|\overline{u}-\overline{u}_k|^{(2+\alpha)}_{q,\Omega_\tau} \le C(l, T_0, a_0, a_1, M, M_1)|\overline{v}-\overline{v}_k|^{(1+\alpha)}_{q,\Omega_\tau},$$

что и доказывает непрерывность A.

Таким образом, отображение A удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера, и разрешимость в малом по времени задачи (47), а вместе с тем и задачи (1), доказана. В силу условия (2) и принадлежности решения задачи (1) $v(x, t) = w(x, t) + \overline{v}(x, t)$ пространству $H_q^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$, при достаточно малых значениях τ имеем

$$v_x(0, \tau) > 0, \quad v_x(l, \tau) < 0, \quad v(x, \tau) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{54}$$

Докажем единственность полученного решения. Предположим, что существуют два решения v_1, $v_2 \in H_q^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_\tau)$ задачи (1) такие, что $v_i(x, t) \ge 0$, $i = 1, 2$, для всех $(x, t) \in \Omega_\tau$. Их разность $v_1 - v_2$ удовлетворяет соотношениям

$$(v_1 - v_2)_t - a(x, t)\rho_\Omega^{1+s}(v_1 - v_2)_{xx} + c(x, t)(v_1 - v_2) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_\tau,$$

$$v_1(x, t) - v_2(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_\tau, \quad v_1(x, 0) - v_2(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

где

$$a(x, t) = \left[\rho_\Omega^{-1}(x)v_1(x, t)\right]^{1+s},$$

$$c(x, t) = (1+s)\int_0^1 \left[\rho_\Omega^{-1}(x)(\lambda v_1(x, t) + (1-\lambda)v_2(x, t))\right]^s d\lambda\, \rho_\Omega^s(x)v_{2,xx}(x, t).$$

Очевидно, что $a(x, t)$, $c(x, t)$ — ограниченные функции и $a(x, t) \ge 0$. Применяя принцип максимума (см. [6], теорема 2.1, гл. I), заключаем, что $v_1 - v_2 = 0$.

Теорема 3 доказана.

5.3. ***Разрешимость в целом по времени.*** Для доказательства разрешимости задачи (1) на произвольном промежутке $[0, T]$ нужна равномерная оценка снизу для решения.

Лемма 7. *Имеют место оценки*

$$c_1 e^{-c_0 t}x(l-x) \le v(x, t) \le c_2 x(l-x), \quad (x, t) \in \Omega_T, \tag{55}$$

где постоянные c_0, c_1, c_2 зависят от l, v_0 и не зависят от T и функции $v(x, t)$.

Доказательство. Установим оценку сверху. Из теоремы 2.1 работы [6] (гл. I) следует, что если для некоторой функции $\phi(x, t)$ $\phi(x, 0) \ge v_0(x)$ при $x \in \Omega$, $\phi(x, t) \ge 0$, $x \in \Sigma_T$, $\phi_t - v^{1+s}\phi_{xx} \ge 0$, то $\phi(x, t) \ge v(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega_T$. Очевидно, что функция $\phi(x) = c_2 x(l-x)$, где $c_2 = \sup\limits_{x\in\Omega} v_0(x) / (x(l-x))$, имеет все требуемые свойства.

Построим теперь функцию ψ такую, что $\psi(x, 0) \le v_0(x)$ при $x \in \Omega$, $\psi(x, t) \le 0$, $x \in \Sigma_T$, $\psi_t - v^{1+s}\psi_{xx} \le 0$ при $(x, t) \in \Omega_T$. Ищем ψ в виде $\psi(x, t) = c_1 e^{-c_0 t}x(l-x)$, где $c_1 = \inf\limits_{x\in\Omega} v_0(x) / (x(l-x))$. Интерес представляет только проверка дифференциального неравенства. Получим

$$\psi_t - v^{1+s}\psi_{xx} = -c_0 c_1 e^{-c_0 t}x(l-x) + 2v^{1+s}c_1 e^{-c_0 t} =$$

$$= c_1 e^{-c_0 t}\left[2v^{1+s} - c_0 x(l-x)\right] \le c_1 e^{-c_0 t}\left[2c_2^{1+s} x^{1+s}(l-x)^{1+s} - c_0 x(l-x)\right] \le$$
$$\le c_1 e^{-c_0 t} x(l-x)\left[2c_2^{1+s} l^{2s} - c_0\right] \le 0$$

при

$$c_0 = 2c_2^{1+s} l^{2s} = 2\left(\sup_{x\in\Omega} v_0(x)/(x(l-x))\right)^{1+s} l^{2s}.$$

Лемма доказана.

На основании теоремы 3 можно доказать разрешимость задачи (1) на отрезке $[0, \tau_0]$. Поскольку выполняются соотношения (55) и, следовательно, имеют место неравенства (54), можно взять функцию $v(x, \tau_0)$ в качестве нового „начального" значения и, применив теорему 3, продолжить решение на некоторый промежуток $[\tau_0, \tau_1]$. Продолжив эту процедуру, получим последовательность значений τ_k таких, что на отрезке $[0, \tau_k]$ существует единственное классическое решение задачи (1). Предположим, что последовательность $\{\tau_k\}$ стремится к некоторому конечному пределу τ_*. Докажем, что решение вновь может быть продолжено на отрезок $[\tau_*, \tau_* + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, что будет противоречить предположению о конечности τ_*.

Для этого потребуются априорные оценки решения задачи (1)

$$\mu_* x(l-x) \le v(x,t) \le \nu_* x(l-x), \qquad (x,t)\in\Omega_{\tau_*}, \tag{56}$$

$$|v(\cdot,t)|_{q,\Omega}^{(2+\alpha)} \le M_*, \qquad t\in[\tau_* - \delta_*, \tau_*], \tag{57}$$

где δ_* — некоторое положительное число, а постоянные μ_*, ν_*, M_* не зависят от t. Пусть оценки (56), (57) доказаны. Для произвольного $\bar t \in [\tau_* - \delta_*, \tau_*]$ возьмем $v(x, \bar t)$ в качестве начального значения и применим теорему 3. Согласно этой теореме существует некоторое малое число ε такое, что на отрезке $[\bar t, \bar t + \varepsilon]$ определено единственное классическое решение задачи (1). Важно отметить, что величина ε зависит только от μ_*, ν_*, M_* и не зависит от $\bar t$. Возьмем $\bar t = \tau_* - \varepsilon/2$. Это означает, что на промежутке $[\tau_* - \varepsilon/2, \tau_* + \varepsilon/2]$ существует классическое решение задачи (1), т. е. при наличии оценок (56), (57), как и требовалось выше, классическое решение может быть продолжено на более широкий интервал времени. Осталось получить эти оценки.

Оценка (56) следует из (55) при $\mu_* = c_1 c^{-c_0\tau_*}$, $\nu_* = c_2$. При доказательстве оценки (57) будем действовать следующим образом. Докажем сначала, что при некоторых значениях параметров $\eta > 0$, $\beta \in (0, 1)$ и для всех $t \in [\tau_* - \eta, \tau_*]$ имеет место оценка

$$|v(\cdot,t)|_{q,\Omega}^{(1+\beta)} \le C_1. \tag{58}$$

В свою очередь, оценка (58) следует из неравенства

$$\sup_{Q_\eta}\left|v^s v_{xx}\right| \le C_2, \tag{59}$$

где $Q_\eta = \Omega \times [\tau_* - \eta, \tau_*]$. Последнее же неравенство, как будет показано ниже, может быть выведено как следствие некоторых результатов, полученных в работах [11, 12] (см. также [13]) для решения задачи Коши для уравнения пористой среды.

Итак, если выполнены условия (2), в малом по времени существует единственное классическое решение задачи (1). Исходная проблема состоит в том, чтобы перейти от задачи (1) к задаче Коши (3) для уравнения пористой среды (см. введение). В частности, нужно выяснить, какие свойства имеет функция $u_0(y)$, если известно, что $(x, v_0(x))$ и $(y, u_0(y))$ связаны соотношениями

$$v_0(x) = m^{m/(m+1)} u_0^m(y), \qquad x(y, 0) = \int\limits_{\zeta_0}^{y} u_0(z)\, dz. \tag{60}$$

Очевидно, что, зная только $v_0(x)$, нельзя определить значение ξ_0; иными словами, „профиль" $u_0(y)$ определяется с точностью до сдвига вдоль оси x, поэтому ниже считаем, что ξ_0 — некоторая постоянная. Обозначим через $\sigma(y)$ функцию $x(y, 0)$. Из (60) видно, что

$$\sigma_y(y) = u_0(y) = m^{-1/(m+1)} v_0^{1/m}(\sigma).$$

Теперь при $t = 0$ можем определить вид преобразования $y(x, 0)$ с помощью выражения

$$y(x, 0) = \zeta_0 + m^{1/(m+1)} \int\limits_0^x v_0^{-1/m}(\sigma)\, d\sigma. \tag{61}$$

Обозначим $\eta_0 = y(l, 0)$. Вследствие условия (2) можем считать, что

$$c_1 x(l-x) \le v_0(x) \le c_2 x(l-x), \qquad x \in [0, l],$$

и интеграл в правой части (61) сходится, более того, $y(x, 0)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция x. Значит, существует обратная функция, которую мы снова обозначим через $\sigma(y)$. Введем функцию $u_0(y)$ из соотношения

$$u_0(y) = m^{-1/(m+1)} v_0^{1/m}(\sigma(y)).$$

Отметим, что хотя функция $y(x, 0)$ имеет особенности при $x = 0, l$, т. е. $y_x(x, 0) \to \infty$ при $x \to 0$ и $x \to l$, тем не менее это обстоятельство не вызывает в дальнейшем затруднений. Например, если $x \in (0, l)$ и, следовательно, $y \in (\zeta_0, \eta_0)$, можно сначала продифференцировать равенство

$$u_0^{m-1}(y) = m^{-(m-1)/(m+1)} v_0^{(m-1)/m}(x)$$

по y:

$$\begin{gathered}\left(u_0^{m-1}(y)\right)_y = (m-1)m^{-(2m+1)/(m+1)} v_{0,x}(x), \\ \left(u_0^{m-1}(y)\right)_{yy} = \frac{m-1}{m^2} v_0^{1/m} v_{0,xx}(x) = s(1-s) v_0^s v_{0,xx}(x),\end{gathered} \tag{62}$$

а затем перейти к пределу при $x \to 0$ $(y \to \zeta_0)$, $x \to l$ $(y \to \eta_0)$.

Из изложенного следует, что функция $u_0(y)$ имеет следующие свойства:

$$u_0(y) > 0, \qquad y \in (\zeta_0, \eta_0), \qquad u_0^{m-1} \in C^1([\zeta_0, \eta_0]),$$
$$\left|u_{0,y}^{m-1}\right| > 0 \qquad \text{при} \qquad y = \zeta_0, \eta_0.$$

Продолжим $u_0(y)$ нулем при $y < \zeta_0$, $y > \eta_0$, сохраняя за продолжением прежнее обозначение. При данных условиях на $u_0(y)$ (см., например, [4]) в целом по времени существует единственное обобщенное решение $u(y, t)$ задачи Коши для уравнения пористой среды. Вследствие результатов работы [2] функция $\tilde{v}(x, t) = c_m u^m(y, t)$, где

$$x = \int_{\zeta(t)}^{y} u(z, t)\, dz, \tag{63}$$

будет обобщенным решением задачи (1), которое в силу теоремы единственности в [2] совпадает с уже полученным классическим решением $v(x, t)$ задачи (1) при $t < \tau_*$.

Из работ [11, 12], в частности, следует, что для любого фиксированного $t_0 > 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует положительное число δ такое, что

$$(a-\varepsilon)(y-\zeta(t)) \le u^{m-1}(y, t) \quad \text{при} \quad (y, t) \in R_\delta, \tag{64}$$

где

$$a = (u^{m-1})_y(\zeta(t_0), t_0) > 0,$$

$$R_\delta = \{y \in [\zeta(t), \zeta(t)+\delta],\ t \in [t_0-\delta, t_0]\}$$

и, кроме того,

$$\left|(u^{m-1})_{yy}(y, t)\right| \le C_3 \quad \text{при} \quad (y, t) \in R_\delta. \tag{65}$$

Аналогичное утверждение имеет место в окрестности свободной границы $y = \eta(t)$.

Будем полагать $t_0 = \tau_*$ и докажем, что при $x \in [0, \delta_0]$, $t \in [\tau_* - \delta_0, \tau_*]$, где δ_0 — достаточно малое, можно оценить максимум функции $v^s v_{xx}$. При замене (63) отрезок $[\zeta(t), \zeta(t)+\delta]$ в плоскости (y, t) переходит в отрезок $\left[0, \int_{\zeta(t)}^{\zeta(t)+\delta} u(z, t)\, dz\right]$. Из (64) следует

$$\int_{\zeta(t)}^{\zeta(t)+\delta} u(z, t)\, dz \ge \int_{\zeta(t)}^{\zeta(t)+\delta} (a-\varepsilon)^{\frac{1}{m-1}} (z-\zeta(t))^{\frac{1}{m-1}}\, dz \ge$$

$$\ge \frac{m-1}{m}(a-\varepsilon)^{1/(m-1)} \delta^{m/(m-1)}.$$

Полагаем $\varepsilon = a/2$,

$$\delta_0 = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/(m-1)} \delta^{m/(m-1)} \frac{m-1}{m}.$$

Так же, как в (62), получаем

$$\left(u_0^{m-1}(y)\right)_{yy} = \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right) v_0^{1/m} v_{0,xx}(x) = s(1-s) v_0^s v_{0,xx}(x).$$

Применяя (65), приходим к оценке

$$\left|v^s v_{xx}\right| \le C_4 \quad \text{при} \quad x \in [0, \delta_0], \quad t \in [\tau_* - \delta_0, \tau_*]. \tag{66}$$

Аналогично

$$\left|v^s v_{xx}\right| \le C_5 \quad \text{при} \quad x \in [l-\delta_l, l], \quad t \in [\tau_* - \delta_l, \tau_*]. \tag{67}$$

Обозначим $\delta_* = \min\{\delta_0, \delta_l\}$. В силу оценки (56) можно рассматривать уравнение $v_t = v^{1+s} v_{xx}$ как невырождающееся при $x \in [\delta_*/2, l - \delta_*/2]$ и получить оценку

$$|v_{xx}| \le C_6(\delta_*, \mu_*, \nu_*) \quad \text{при} \quad x \in [\delta_*/2, l - \delta_*/2], \quad t \in [\tau_* - \delta_*, \tau_*]. \quad (68)$$

Из (66) – (68) следует оценка (59) при $\eta = \delta_*$. Из уравнения (1) и оценки (59) следует

$$|v_t| \le C_7 \quad \text{при} \quad (x, t) \in Q_{\delta_*}. \quad (69)$$

Используя оценки (56), (59), (69) и рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве леммы 3.1 [6] (гл. I), можно доказать, что $v \in H^{1+\beta, (1+\beta)/2}(\overline{Q}_{\delta_*})$ для $\beta = (1-s)/(2-s)$ и имеет место оценка вида

$$|v|_{q, Q_{\delta_*}}^{(1+\beta)} \le C_8.$$

Применяя последнюю оценку и метод Шаудера, приходим к неравенству

$$|v|_{q, Q_{\delta_*}}^{(2+\beta_*)} \le M_2\left(C_8, \mu_*, \nu_*, |u(\cdot, \tau_* - \delta_*|_{q, \Omega}^{(2-\beta_*)}\right), \quad (70)$$

где $\beta_* = \min\{\beta, \alpha\}$. Из (70) заключаем, что $v \in H_q^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\overline{Q}_{\delta_*})$, и снова с помощью локальных оценок приходим к (57).

Тем самым теорема 1 доказана.

1. *Ughi M.* A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic // Ann. mat. pura ed appl. – 1986. – **143**. – P. 385 – 400.
2. *Bertsch M., Dal. Passo R.* A numerical treatment of a superdegenerate equation with application to the porous medium equation // Quart. Appl. Math. – 1990. – **48**. – P. – 133 – 152.
3. *Базалий Б. В., Краснощек Н. В.* О регулярности решения задачи со свободной границей для уравнения $v_t = (v^m)_{xx}$ // Алгебра и анализ. – 2000. – **12**. – С. 100 – 130.
4. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**. – С. 135 – 176.
5. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1971. – **1969**. – 220 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* Первая краевая задача для вырождающихся параболических уравнений // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – **3**. – С. 6 – 12.
8. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов: В 3 т. – Рига: Зинатне, 1974. – Т. 1. – 306 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 605 с.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427с.
11. *Caffarelli L. A., Friedman A.* Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of a gas in porous medium // Amer. J. Math. – 1979. – **101**. – P. 1181 – 1193.
12. *Aronson D. G., Vazquez J. L.* Eventual C^∞ regularity and concavity for flows in one-dimensional porous media // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1987. – **99**. – P. 329 – 348.
13. *Aronson D. G.* The porous medium equation // Lect. Notes Math. – 1986. – **1224**. – P. 1 – 46.

Получено 12.02.2003,
после доработки – 07.04. 2004