УДК 517.927

Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров (Воронеж. ун-т, Россия)

О РАСШИРЕНИИ ОСЦИЛЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

We describe oscillation spectrum properties (a number of zeros, their alternation for eigenfunctions, the simplicity of a spectrum, and so on) for the Sturm – Liouville problem with generalized coefficients.

Описано осциляційні спектральні властивості (число нулів, їх чергованість для власних функцій, простоту спектра та ін.) для задачі Штурма – Ліувілля з узагальненими коефіцієнтами.

В настоящей работе излагаются результаты, подытоживающие исследования воронежцев за последние два десятилетия при построении осцилляционной теории для задачи о стильтьесовской струне

$$\begin{aligned} -(pu')' + Q'u &= \lambda M'u, \\ u(0) = u(l) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где Q' и M' — обобщенные производные от функций ограниченной вариации $Q(x)$ и $M(x)$. Эти исследования существенно тонизированы монографией [1], а также потребностями современной физики [2].

Идея использования интеграла Стильтьеса для анализа уравнений с импульсными параметрами заимствована нами из некоторых работ Феллера и М. Крейна середины XX века. Подсказкой для использования интегро-дифференциальной формы для уравнения (1), т. е.

$$-\int_0^x d(pu') + \int_0^x u\,dQ = \lambda \int_0^x u\,dM, \tag{2}$$

была математическая модель Аткинсона и М. Крейна стильтьесовской струны [3]

$$u'_+(x) = u'_-(0) - \lambda \int_0^{x+0} u\,dM,$$

где $u'_+(x)$ — правая производная, $u_-(0)$ — некое „продленное значение” производной. Внешним символом этого уравнения полагалось считать соотношение

$$-\frac{d}{dM} u'_+(x) = \lambda u(x).$$

Несколько раньше последнее уравнение возникло у Феллера в задаче о диффузии [3]. Осцилляционные свойства в этих работах не рассматривались.

1. На множестве E абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций с производными из $BV[0, l]$ рассматривается уравнение (2), т. е.

$$-\int_0^x d(pu') + \int_0^x u\,dQ = \lambda \int_0^x u\,dM,$$

где $p(\cdot) >> 0$, $p \in BV[0, l]$, функция $Q(\cdot)$ не убывает, а $M(\cdot)$ строго возрастает на $[0, l]$. Интегралы понимаются по Стильтьесу (см., например, [4, 5]). Если p, Q, M достаточно гладкие, то уравнение (2) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00397).

$$-(pu')' + qu = \lambda mu$$

при $q = Q'$, $m = M'$.

Оказывается, при обычных краевых условиях

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{3}$$

задача (2), (3) имеет дискретный строго положительный простой спектр $(0 <)$ $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, а соответствующие собственные функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots$ имеют перемежающиеся нули, причем φ_k имеет внутри $(0, l)$ точно k нулей-узлов.

Наличие в (2) интеграла Стильтьеса означает возможность появления (в отличие от обыкновенного дифференциального уравнения) особенностей, порожденных скачками p, Q, M. Если S — совокупность точек, где p, Q, M могут иметь разрывы, то в каждой из таких точек уравнение (2) как бы раздваивается, приобретая разный смысл при $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$ (если $\xi \in S$). Хуже того, неясно, что понимать под $u'(\xi - 0)$: то ли левую производную $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \dfrac{u(\xi) - u(\xi - \varepsilon)}{\varepsilon}$, то ли левый предел $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} u'(\xi - \varepsilon)$. Аналогичный вопрос возникает и о символе интеграла $\int_0^{\xi - 0}$ — то ли это несобственный интеграл, то ли интеграл по полуинтервалу $[0, \xi)$. Эти недоразумения снимает следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой функции* $u(x) \in E$ *и любой точки* $\xi > 0$ *оба названные значения слева совпадают. То же верно и справа для любой* $\xi < l$, *а также для интегралов.*

Напомним, что через E мы обозначаем множество абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$.

Введем помимо (2) неоднородное уравнение

$$-\int\limits_0^x d(pu') + \int\limits_0^x u dQ = \int\limits_0^x dF, \tag{4}$$

где F — функция ограниченной вариации.

Обозначим через S множество всех точек, где $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ имеют ненулевые простые скачки, т. е. не совпадающие левые и правые пределы. Выбросив S из $[0, l]$, заменим каждую точку $\xi \in S$ парой символов $\{\xi - 0, \xi + 0\}$. Будем считать, что $\xi - 0 > x$ для всех $x < \xi$ и $\xi + 0 < x$ для всех $x > \xi$. Множество, полученное из $[0, l]$ заменой точек $\xi \in S$ на соответствующие пары $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, обозначим через $\overline{[0, l]}_S$.

Множеству $\overline{[0, l]}_S$ можно дать следующее корректное определение как одномерному метрическому пространству.

Взяв жорданово представление исходных коэффициентов p, Q, F в виде $p = p^+ - p^-$, $Q = Q^+ - Q^-$ и $F = F^+ - F^-$, обозначим через σ сумму неубывающих функций

$$\sigma(x) = x + p^+(x) + p^-(x) + Q^+(x) + Q^-(x) + F^+(x) + F^-(x).$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\sigma(x)$ имеет разрывы (полные скачки) только в точках S.

Введем на множестве $[0, l] \backslash S$ метрику $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S \neq \varnothing$, то это метрическое пространство, очевидно, не полно. Его стандартное метрическое пополнение с точностью до изоморфизма совпадает с $\overline{[0, l]}_S$, индуцируя в нем топологию.

Очевидна разрывность этого пространства, равно как и его компактность.

Мы рассматриваем уравнение (4) на множестве значений x из $\overline{[0,l]}_S$, не допуская тем самым в (4) значения x из S. На $\overline{[0,l]}_S$ функции $p(\cdot)$, $Q(\cdot)$, $F(\cdot)$ становятся непрерывными, поскольку их значения $p(\xi+0)$, $p(\xi-0)$, $Q(\xi+0)$, $Q(\xi-0)$, $F(\xi+0)$, $F(\xi-0)$, являющиеся в $[0,l]$ предельными, теперь оказываются собственными значениями в соответствующих точках из $\overline{[0,l]}_S$.

Непрерывность рассматриваемых функций $u(\cdot)$ позволяет сохранять обычный смысл Римана – Стильтьеса для интегрального слагаемого в (4) при $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$, если в качестве собственных использовать значения, которые ранее были предельными.

Таким образом, уравнение (4) нами рассматривается как бы двухслойно: первый уровень — для значений $x \in [0,l]$ в случае решений $u(x)$ (под знаком интеграла) и второй уровень — для значений x в тождестве (4), где x принимается из $\overline{[0,l]}_S$. Это скажется уже на определении задачи Коши, когда при $x \notin S$ она формулируется обычно, т. е. считаются наперед заданными значения решения $u(\xi)$ и его производной $u'(\xi)$, а при $x \in S$ наряду со значением $u(\xi)$ может быть заранее задана одна из односторонних производных $u'(\xi-0)$ или $u'(\xi+0)$.

Теорема 2. *Для любых чисел* u_0, v_0 *и для любой точки* $x_0 \notin \overline{[0,S]}_S$ *существует единственное решение* $u(x)$ *уравнения* (4) *такое, что*

$$u(x_0) = u_0, \qquad u'(x_0) = v_0. \tag{5}$$

2. Мы существенно опираемся на возможность адекватного описания уравнения (2) в виде

$$-d(pu') + udQ = \lambda u dM, \tag{6}$$

где символ dg при $g \in BV[0,l]$ точно описывается, что позволяет рассматривать дифференциальное неравенство

$$-d(pu') + udQ \geq 0 \tag{7}$$

и изучать распределение нулей его решений, а также более сложное неравенство

$$v_0(x)\left[-d(pu') + udQ\right] \geq 0 \tag{8}$$

со знакопеременной $v_0(x)$.

Опираясь на генезис понятия дифференциала, определяющего интеграл Стильтьеса, мы понимаем под dg при $g(\cdot) \in BV[0,l]$ линейный функционал $l(u)$ из $C^*[0,l]$, определяемый равенством

$$l(u) = \int_0^l u dg.$$

Символ dg мы называем дифференциалом Стильтьеса. Линейность по g этого дифференциала dg очевидна. Равенство $dg = 0$ означает (аналогично лемме Дюбуа – Реймона), что $g \equiv \text{const}$, а неравенство $dg \geq 0$ — что dg есть положительный функционал на множестве (конусе) неотрицательных функций, что эквивалентно неубыванию $g(x)$. Согласно теореме о преобразовании меры для любой непрерывной $u(x)$ существует $h \in BV$ такая, что $udg = dh$. Поэтому для $g(x)$ из $C^1[0,l]$ дифференциал dg адекватен $g'dx$.

Язык дифференциалов делает записи для левых частей (6) – (8) внешне более внятными, чем все слагаемые в (2). Это чисто ассоциативное впечатление помогает проще улавливать аналогию между результатами для уравнения (2) и классическими фактами для теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от (2), все слагаемые в (6) – (8) — функционалы, т. е. абстрактные элементы, не имеющие никакого поточечного содержания на $[0, l]$, что их отличает от обыкновенных дифференциальных уравнений. Напротив, уравнение (2) — поточечное.

3. Для квазидифференциального выражения

$$Du = -d(pu') + udQ$$

справедливо „разложение на множители" Пойа – Мамманы.

Теорема 3. *Если* $dQ \geq 0$, *т. е.* Q *не убывает, то существуют строго положительные функции* φ_0, φ_1 *такие, что*

$$Du = -\varphi_0 d\left(\varphi_1 \frac{d}{dx}(\varphi_0 u)\right).$$

Это представление обосновывает характерную для теории задачи (2), (3) технику подсчета числа нулей с помощью теоремы Ролля. Простым применением этого факта является такое следствие.

Следствие. *Функция Грина* $G(x, s)$ *задачи* $Du = dF$ *при условиях* (3) *существует и строго положительна при* $0 < x$, $s < l$.

Здесь мы под функцией Грина понимаем функцию $G(x, s)$ такую, что решение уравнения $Du = dF$ при условиях (3) можно записать в виде

$$u(x) = \int_0^l G(x, s)\, dF(s).$$

4. Анализ распределения нулей дифференциальных неравенств позволяет устанавливать важные свойства спектра. Например, любая собственная функция $v_0(x)$, соответствующая собственному значению λ_0, наверняка удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_0 Du \geq 0,$$

равно как и присоединенная функция.

Теорема 4. *Пусть* $v_0(x)$ *— нетривиальное решение задачи*

$$Du = 0, \qquad u(0) = u(l) = 0,$$

а функция $u(x)$ *является решением неравенства*

$$v_0(x) Du \geq 0,$$

причем в любой нулевой точке ξ *функции* $v_0(x)$ *выполняется равенство* $p(\xi - 0)u'(\xi - 0) = p(\xi + 0)u'(\xi + 0)$. *Пусть* $u(0) = 0$, $v_0'(l - 0)u(l) \leq 0$. *Тогда функции* $v_0(x)$ *и* $u(x)$ *коллинеарны, т. е. для некоторой константы* C *верно тождество* $u(x) = Cv_0(x)$.

В этой теореме мы снимаем предположение о неубывании $Q(x)$ и считаем $Q \in BV[0, l]$.

Отсюда следует как геометрическая, так и алгебраическая простота всех собственных значений.

5. Число нулей собственных функций нами устанавливается с помощью схемы, которую мы условно называем „накачкой нулей". Прототип этой схемы имеется у Штурма и используется в [3, 6].

Если ввести в рассмотрение решение $u(x, \lambda)$ уравнения (2) с начальными условиями

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1, \tag{9}$$

то при каждом λ, когда $u(l, \lambda) = 0$, получаем собственную функцию. Поэтому отслеживание поведения нулей функции $u(x, \lambda)$, их зависимости от λ приводит к ответу о нулях собственных функций. Связь нулей этой функции с параметром λ и их эволюцией при изменении λ определяется уравнением $u(x, \lambda) = 0$ в виде неявной функции $x(\lambda)$. Эта функция заведомо многозначна (при каждом λ функция $u(x, \lambda)$ может иметь по x много нулей, и количество их на $[0, l]$ возрастает с убыванием λ). В этой многозначности удобно разобраться, выделив непрерывные ветви.

Метод накачки нулей. Продолжим вправо от точки $x = l$, т. е. на множество $[l, \infty)$, коэффициенты p, Q, M исходного уравнения так, чтобы они были непрерывными в точке $x = l$ и чтобы p, Q были константами вправо от l, а M — линейной возрастающей функцией ($M(x) = m_0 x + c$ при $m_0 > 0$). Решения этого продолженного уравнения будут определены на $[0, \infty)$, причем на $[0, l]$ они будут совпадать с решениями исходного уравнения. Сохраним за продолженными коэффициентами исходное обозначение. На $[l, \infty)$ это уравнение имеет вид

$$-d(p_0 u') = \lambda m_0 u dx,$$

т. е. $-p_0 u'' = \lambda m_0 u$ (здесь $p_0 = p(l)$). Распространяя на $[l, \infty)$ соответствующее решение $u(x, \lambda)$ задачи (2) – (9), замечаем, что при $\lambda > 0$ эта функция имеет бесконечное число нулей в $[l, \infty)$ и, значит, в $[0, \infty)$.

Обозначим нули $u(x, \lambda)$ на $(0, \infty)$ в порядке их возрастания через

$$z_0(\lambda), z_1(\lambda), \ldots, z_k(\lambda), \ldots .$$

Все они являются простыми нулями $u(x, \lambda)$, непрерывно зависящими от λ. В силу теоремы Штурма каждая из функций $z_k(\lambda)$ строго убывает по λ, когда ее значение принадлежит лучу $(0; \infty)$.

При λ, совпадающем с ведущим собственным значением λ_0, очевидно, $z_0(\lambda_0) = l$. При $\lambda = 0$ функция $u(x, 0)$ не имеет нулей в $(0, l]$, так как уравнение $-d(-pu') + udQ = 0$ не осциллирует на $[0, l]$, поскольку $dQ \geq 0$. Поэтому $\lambda_0 > 0$. Если λ непрерывно увеличивать, то все нулевые точки $z_i(\lambda)$ будут непрерывно, нигде не останавливаясь, двигаться влево. Когда очередная из них $z_k(\lambda)$ совпадет с l, соответствующее решение $u(x, \lambda)$, обнулившись в точке $x = l$, окажется собственной функцией (2), (3), а значение λ, для которого $z_k(\lambda) = l$, — собственным значением. Поскольку попаданию $z_k(\lambda)$ в точку l должно было предшествовать прохождение через эту точку предыдущих нулей $z_0(\lambda)$, $z_1(\lambda), \ldots, z_{k-1}(\lambda)$, то равенство $z_k(\lambda) = l$ определяет λ_k, т. е. k-е собственное значение.

Теорема 5. *Пусть функция* $Q(x)$ *не убывает, а* $M(x)$ *строго возрастает на* $[0, l]$. *Тогда спектр* Λ *задачи* (2), (3) *состоит из неограниченной последовательности вещественных строго положительных простых собственных значений* $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$. *При этом соответствующая* λ_k *собственная функция* $\varphi_k(x)$ *имеет в* $(0, l)$ *точно* k *нулей, в каждом из которых она меняет знак*; *нули* $\varphi_k(x)$ *и* $\varphi_{k+1}(x)$ *перемежаются.*

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Вища шк., 1987.
2. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хоэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. – М.: Мир, 1991.
3. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные дискретные задачи. – М.: Мир, 1991.
4. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1974. – 480 с.
5. *Рисс Ф., Секефальди-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1978. – 587 с.
6. *Левитан Б. М.* Разложение по собственным функциям. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 159 с.

Получено 30.08.07